PHY563 : PETITE CLASSE 1

Marches aléatoires browniennes et temps de premier passage.

On étudie une marche brownienne sur un réseau cubique de dimension arbitraire D. Le marcheur est à $\mathbf{x}$=0 pour $t = 0$. La probabilité d'être en $\mathbf{x}$ à l'instant t est notée $P(\mathbf{x}, t)$.

1. On étudie la probabilité pour que le marcheur arrive en $\mathbf{x}$ *pour la première fois* au temps t, notée $P_1(\mathbf{x}, t)$. Quelle relation satisfont P et P_1? Il est utile de considérer les fonctions génératrices :

$$\hat{P}(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} P(\mathbf{x}, t)\lambda^t \, , \, \hat{P}_1(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{t=1}^{\infty} P_1(\mathbf{x}, t)\lambda^t .$$

Relier ces deux fonctions en prenant garde au cas $\mathbf{x} = 0$.

2. Calculer la transformée de Fourier spatiale de P, que l'on appellera $\tilde{P}(\mathbf{k}, \lambda)$, pour une marche aléatoire dont la distribution des sauts élémentaires est donnée par $\psi(\mathbf{y})$. Considérer le cas où les sauts se font entre sites voisins sur le réseau.

3. Calculer la probabilité $p_{\mathbf{0}}$ de revenir au moins une fois à l'origine au bout d'un temps quelconque. Etudier le comportement de cette quantité en fonction de la dimension.

4. Même question pour la probabilité $p_{\mathbf{x}}$ de visiter au moins une fois le site $\mathbf{x}$. Pour quelles dimensions D peut-on dire que “tous les chemins (browniens) mènent à Rome” ?

5. Caractériser la loi de distribution du temps de premier retour au site de départ aux longs temps en dimension $D = 1$ puis en dimension $D = 2$.