

## PHY 563 : Petite Classe 2

---

### Elasticité du modèle du ver

Des expériences récentes ont permis de mesurer des caractéristiques force-élongation dans une molécule d'ADN, attachée à un bout à un plaque, à l'autre bout à une petite bille sur laquelle on exerce une force. Les résultats sont donnés sur la figure jointe pour une molécule de longueur  $L = 32.7 \mu\text{m}$  (97000 paires de bases). On cherche ici à retrouver ces caractéristiques dans le cadre de deux modèles simples.

1. On considère une chaîne formée de  $N$  segments rigides de longueur  $b = L/N$ , libres de s'articuler les uns par rapport aux autres. On applique sur une extrémité une force d'intensité  $f$  suivant l'axe  $z$  tout en maintenant l'autre extrémité fixe. Montrée que l'extension moyenne de la molécule suivant l'axe  $z$  est

$$z(f) = L \left[ \coth \left( \frac{fb}{k_B T} \right) - \left( \frac{k_B T}{fb} \right) \right]. \quad (1)$$

la figure jointe (haut) montre plusieurs comparaisons de cette formule avec les données expérimentales. Que concluez-vous?

2. On suppose maintenant que la molécule possède une rigidité locale : l'énergie associée à deux chaînons successifs, de vecteurs unitaires  $\vec{u}, \vec{u}'$  est  $E = J(\vec{u} - \vec{u}')^2$  où  $J$  est une constante énergétique. Montrer que dans la limite continue  $b \rightarrow 0$  l'énergie élastique de la molécule vaut, en l'absence de force,

$$E = k_B T \frac{A}{2} \int_0^L ds \left( \frac{d\vec{u}}{ds} \right)^2, \quad (2)$$

où  $\vec{u}(s)$  est le vecteur tangent à la molécule au point d'abscisse curviligne  $s$ . Quelle est l'unité de  $A$ ? Que représente physiquement cette grandeur?

3. Exprimer la probabilité  $P(s, \vec{u})$  que le vecteur tangent en  $s$  soit dans la direction  $\vec{u}$  sous la forme d'un rapport d'intégrale de chemins. En déduire que, pour une force nulle,  $P$  satisfait l'équation d'évolution

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \frac{1}{2A} \Delta P, \quad (3)$$

où  $\Delta$  est le Laplacien sur la sphère unité en dimension trois.

Quels sont les états propres et valeurs propres de  $\Delta$ ? Supposons qu'une extrémité de la molécule est orientée suivant l'axe  $z$ . Quelle est la probabilité que le vecteur tangent en  $s$  fasse un angle  $\theta$  avec cet axe? Justifier l'appellation longueur de persistance habituellement donnée à  $A$ .

4. On soumet maintenant la molécule à une force  $f$  suivant l'axe  $z$ . Comment faut-il modifier l'équation d'évolution (3)? Comment feriez-vous pour calculer l'extension moyenne de la molécule à : faible force, grande force? La figure (bas) montre le meilleur fit des données obtenu pour  $A = 53.4$  nm. Que vous inspire ce résultat?
5. Est-ce-que les résultats ci-dessus vont être toujours corrects si l'on tire non plus sur une molécule d'ADN mais seulement sur l'un de ses deux filaments?