Relativité et Électromagnétisme
— L7 —

Devoir maison 2013

à rendre le 14 mai 2013

Le sujet de ce devoir est composé d'exercices posés en examen les années précédentes.

1 Diffusion Compton inverse

On étudie la diffusion élastique électron-photon.

$$e^- + \gamma \to e^- + \gamma$$

Soit ω (resp. ω') la pulsation du photon incident (diffusé) et $v = \beta c$ la vitesse de l'électron incident.

1. Montrer que les quadri-vecteurs énergie-impulsion satisfont :

$$p_e(p_\gamma - p'_\gamma) = p_\gamma p'_\gamma$$

On considère le cas d'une diffusion frontale. L'électron et le photon incidents ont des impulsions de signes opposés. On suppose en outre que le photon final est rétrodiffusé, c'est-à-dire réémis dans la direction incidente avec une impulsion de signe opposé.

2. Écrire les quadri-vecteurs énergie-impulsion p_e, p_γ, p'_γ.
3. En déduire la pulsation ω' en fonction de ω et β.
4. Que devient cette formule pour des électrons ultra-relativistes ?
5. Application : étudier la diffusion d'électrons de haute énergie par le fond cosmologique constitué de photons de longueur d'onde $\lambda = 1.9$ mm. Comment ce phénomène peut-il être observé expérimentalement ?

On donne : $E_e = 30$ GeV ; $m_e c^2 = 0,5$ MeV.

2 Diffusion sur un électron atomique

On étudie l'interaction d'une particule relativiste de masse M et de charge Ze avec un électron atomique de charge $-e$ et de masse m. On fera les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la vitesse initiale de la particule incidente est beaucoup plus grande que la vitesse typique d'un électron sur une orbite atomique.
- la particule incidente décrit la trajectoire rectiligne définie par $(x = vt; y = b)$ pour $-\infty < t < +\infty$. b est le paramètre d'impact.
- A l'instant initial, l'électron est immobile au point O. Au cours de la collision son déplacement reste faible.

1. Discuter la première hypothèse.
2. Montrer que le champ électrique transverse créé en O par la particule incidente est :

$$E_y(t) = \frac{-Zeb\gamma}{4\pi\epsilon_0(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}$$

3. En déduire l'impulsion finale transverse de l'électron pour $t \to +\infty$. On donne :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = 2$$

4. Dessiner l'allure temporelle du champ électrique transverse en O. Quelle est sa largeur temporelle Δt ?
5. En admettant que Δt est un temps caractéristique de collision, estimer le déplacement transverse d de l'électron.
6. Pourquoi l'inégalité $d < b$ doit elle être satisfaite ? En déduire que :

$$b > \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m v^2 \gamma} = b_{min}$$

7. Soit ω_0 une pulsation atomique caractéristique. Pourquoi l'inégalité $\Delta t < 2\pi/\omega_0$ doit-elle être satisfaite ? En déduire que $b < b_{max} = \frac{2\pi\gamma v}{\omega_0}$.
8. Calculer l'énergie cinétique finale de l'électron $\Delta E(b)$. On pourra le traiter comme une particule non relativiste.
9. Soit N le nombre d'atomes par unité de volume et Z le numéro atomique. Montrer que la perte d'énergie par unité de longueur est :

$$\frac{dE}{dx} = 2\pi N Z \int_{b_{min}}^{b_{max}} \Delta E(b) b db$$

3 Pression de radiation

On considère le potentiel vecteur $A_\mu = \frac{E_0}{\omega}\epsilon_\mu \sin kx$ où ϵ est un 4-vecteur de genre espace et k un 4-vecteur de genre lumière tels que :

$$\begin{aligned} k^2 &= k \cdot \epsilon = 0 \\ \epsilon^2 &= -1 \end{aligned}$$

1. Calculer $F_{\mu\nu}$.
2. Montrer que $F_{\mu\nu}$ est une solution des équations de Maxwell dans le vide. Quelle est son interprétation physique ?
3. Calculer le tenseur d'énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$.
4. Vérifier que $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Interpréter.
5. Calculer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. On donne :

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu &= (0,0,1,0) \\ k^\mu &= (\omega/c, \omega/c, 0, 0) \end{aligned}$$

6. L'onde électromagnétique arrive sur le plan $x = 0$ sous une incidence normale. Calculer la pression de radiation due à l'onde incidente. A.N. : Quelle est la pression de radiation pour une lampe de 100 W à une distance de 1 m ?
7. Comment se transforme le tenseur d'énergie-impulsion par rotation ? En déduire les forces longitudinale et transverse exercées sur la surface par une onde arrivant sous incidence θ ?