Examen de relativité et électromagnétisme
— L7 —

22 juin 2010

Seules les notes de cours sont autorisées. L'usage de la calculatrice et des téléphones est interdit.

Problème 1 : Mouvement à force centrale d'une particule relativiste.

On étudie le mouvement d'une particule relativiste de masse m dans un champ de force dérivant d'un potentiel central $\mathrm{U}(r)$.

1. En admettant que le Lagrangien de la particule se met sous la forme :

$$\mathrm{L} = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - \mathrm{U}(r)$$

déduire l'équation du mouvement.

2. Montrer que l'énergie totale $\mathrm{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \mathrm{U}(r)$ et le moment cinétique $\overrightarrow{\mathrm{L}} = \frac{m\,\overrightarrow{r}\wedge\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ où $\beta = v/c$ sont des constantes du mouvement.

3. En déduire que la trajectoire est plane.

4. On note r, θ les coordonnées polaires de la particule dans ce plan. Exprimer l'énergie et le moment cinétique en fonction de $m, r, \dot{r}, \dot{\theta}, \mathrm{U}(r)$. En déduire l'expression de $\dot{r}^2$ et $\dot{\theta}^2$ en fonction de $\mathrm{E}, \mathrm{L}, r, \mathrm{U}(r)$.

5. On considère un potentiel central de la forme $\mathrm{U}(r) = -\frac{k}{r}$. En introduisant la variable $u = 1/r$, montrer que :

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\left(1 - \frac{k^2}{\mathrm{L}^2c^2}\right) = \frac{\mathrm{E}^2 - m^2c^4}{\mathrm{L}^2c^2} + \frac{2\mathrm{E}ku}{\mathrm{L}^2c^2} \tag{1}$$

6. En déduire l'équation différentielle linéaire du second ordre satisfaite par la fonction $u(\theta)$.

7. <u>Limite non relativiste</u>

   On pose $\mathrm{E} = mc^2 - \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll mc^2$

   a) Montrer que l'équation de la trajectoire s'écrit :

$$u(\theta) = \frac{1}{p}(1 + e\cos(\theta))$$

   b) En utilisant l'équation (1), montrer que :

$$e = \sqrt{1 - \frac{2\mathrm{L}^2\varepsilon}{mk^2}} \tag{2}$$

$$p = \frac{\mathrm{L}^2}{mk} \tag{3}$$

c) Décrire l'allure des trajectoires.

8. Cas général

   Montrer que pour $\mathrm{L} > k/c$ et $\mathrm{E} < mc^2$, la solution générale s'écrit :

   $$u(\theta) = \frac{1}{p}(1 + e\cos(\omega\theta))$$

   Exprimer p et ω en fonction de $k, \mathrm{L}, c, \mathrm{E}$.

9. Discuter l'allure générale des trajectoires pour $\mathrm{L} > k/c$, $\mathrm{L} = k/c$ et $\mathrm{L} < k/c$.

10. Montrer que pour $k \ll \mathrm{L}c$ la trajectoire approchée est une ellipse dont le périhélie effectue un déplacement angulaire $\Delta\theta = \frac{\pi k^2}{\mathrm{L}^2 c^2}$ à chaque rotation.

11. Avance du périhélie de Mercure

    On étudie les correction relativistes au mouvement de la planète Mercure dans le champ gravitationnel du Soleil. Montrer que ces corrections se traduisent par une avance du périhélie pour chaque révolution donnée par:

    $$\Delta\theta = \frac{\pi \mathrm{MG}}{c^2 a(1-e^2)}$$

    où M est la masse du Soleil, a est le demi-grand axe de l'ellipse et e est son excentricité.

    On donne :

    - $\mathrm{M} = 1{,}98\ 10^{30}$ kg
    - $\mathrm{G} = 6{,}67\ 10^{-11}$ SI
    - $a = 5{,}8\ 10^{10}$ m
    - $e = 0,2$

    On rappelle la troisième loi de Képler $\frac{\mathrm{T}^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathrm{GM}}$ Une fois corrigée de l'influence des autres planètes, l'expérience donne 43,1" d'arc/siècle. Commenter.

12. Effets relativistes en physique atomique

    On étudie l'interaction d'un électron atomique se déplaçant dans le potentiel coulombien d'un noyau de charge $\mathrm{Z}e$. En utilisant les résultats précédents, montrer que l'électron peut s'effondrer sur le noyau. En utilisant la règle de correspondance $\mathrm{L} = n\hbar$, donner le numéro atomique Z_l au delà duquel ce phénomène apparaît. On l'exprimera en fonction de la constante de structure fine $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$ et on donnera sa valeur numérique. Commenter.

Problème 2 : Rayonnement d'une particule relativiste

La puissance totale rayonnée par une particule de quadri-impulsion p^μ est donnée par l'expression

$$\mathcal{P} = -k\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{4}$$

1. Exprimer $\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ en fonction de la vitesse $\overrightarrow{v}$ et de l'accélération $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$ de la particule.

2. Déterminer la constante k sachant que la puissance rayonnée dans la limite non relativiste est donnée par

$$\mathcal{P}_{\mathrm{NR}} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|^2 \tag{5}$$

3. On considère une particule chargée effectuant un mouvement circulaire uniforme

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \mathrm{R}\,\cos(\omega\,t) \\ y &=& \mathrm{R}\,\sin(\omega\,t) \end{array}\right. \tag{6}$$

Exprimer la puissance rayonnée, en fonction de R, ω, q et c.

4. Montrer que la perte relative d'énergie par tour est donnée par

$$\frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{E}} = \frac{q^2\beta^3}{3\varepsilon_0\, m\, c^2\mathrm{R}}\left(\frac{\mathrm{E}}{m\,c^2}\right)^3 \tag{7}$$

Application : Calculer $\frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{E}}$ dans l'expérience de collisions protons-protons (LHC) du CERN, sachant que les protons, de masse $m = \frac{1\mathrm{GeV}}{c^2}$, y sont portés à une énergie de 7000GeV, et que la circonférence du tunnel du LHC mesure 27km.

Rappel : On rappelle ici que $e \simeq 1.6\ \ 10^{-19}$ C et que $\varepsilon_0 \simeq 8.9\ \ 10^{-12}$ C m^{-1} V^{-1}