Examen de Relativité et Électromagnétisme
— L7 —

Quelques effets relativistes

21 juin 2011

1 Diagramme de Loedel

Cet exercice porte sur la représentation graphique d'un espace-temps à 2 dimensions (une dimension d'espace et une dimension temporelle).

On considère les systèmes d'axes obliques xOy et $x'Oy'$ définis par la figure 1 ci-dessous :

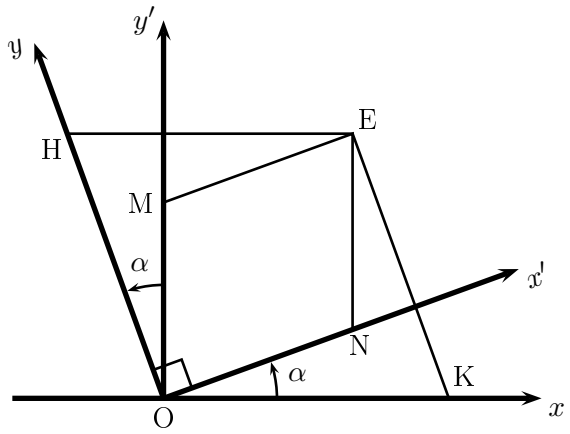
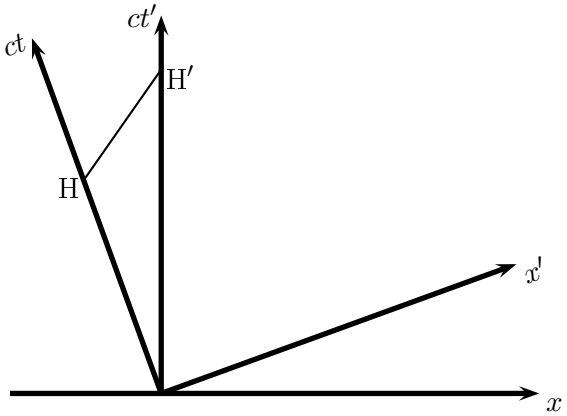


FIG. 1: Diagramme de Loedel

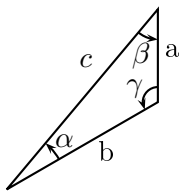
Soit E un point du plan. On le repère par ses coordonnées

$$\begin{cases} x = \mathrm{OK} & y = \mathrm{OH} \\ x' = \mathrm{ON} & y' = \mathrm{OM} \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathrm{OH}^2 - \mathrm{OK}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{ON}^2$.
2. On pose $\mathrm{OH} = ct$, $\mathrm{OK} = x$, $\mathrm{OM} = ct'$, et $\mathrm{ON} = x'$.
   Montrer que si E est un événement d'espace-temps, (ct, x) et (ct', x') représentent ses coordonnées dans deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.
3. Soit v la vitesse de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.
   Exprimez l'angle α en fonction de $\beta = v/c$.
4. Dessinez le cône de lumière issu de O.
   Exprimez l'angle que le rayon lumineux issu de O fait avec l'axe Ox.
5. On se propose de retrouver la formule de l'effet Doppler par une construction purement géométrique (figure 2).
   On considère l'émission d'un signal lumineux issu de H à l'instant T_0, calculer l'instant H' de réception du signal dans le référentiel $\mathcal{R}$.
   On pourra utiliser la relation trigonométrique $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, valable dans le triangle de la figure 2(b).



(a) Diagramme de Loedel



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

(b) identité trigonométrique

FIG. 2: Diagramme de Loedel et effet Doppler

2 Diffusion Compton inverse

On étudie la diffusion élastique électron-photon.

$$e^- + \gamma \to e^- + \gamma$$

Soit ω (resp. ω') la pulsation du photon incident (diffusé) et $v = \beta c$ la vitesse de l'électron incident.

1. Montrer que les quadri-vecteurs énergie-impulsion satisfont :

$$p_e(p_\gamma - p'_\gamma) = p_\gamma p'_\gamma$$

On considère le cas d'une diffusion frontale. L'électron et le photon incidents ont des impulsions de signe opposés. On suppose en outre que le photon final est rétrodiffusé, c'est-à-dire réémis dans la direction incidente avec une impulsion de signe opposé.

2. Écrire les quadri-vecteurs énergie-impulsion p_e, p_γ, p'_γ
3. En déduire la pulsation ω' en fonction de ω et β.
4. Que devient cette formule pour des électrons ultra-relativistes ?
5. Application : étudier la diffusion d'électrons de haute énergie par le fond cosmologique constitué de photons de longueur d'onde $\lambda = 1,9$ mm. Comment ce phénomène peut-il être observé expérimentalement.

On donne : $\mathrm{E}_e = 30$ GeV ; $m_e c^2 = 0,5$ MeV

3 Diffusion sur un électron atomique

On étudie l'interaction d'une particule relativiste de masse M et de charge Ze avec un électron atomique de charge $-e$ et de masse m. On fera les hypothèses simplificatrices suivantes :

– la vitesse initiale de la particule incidente est beaucoup plus grande que la vitesse typique d'un électron sur une orbite atomique.

- la particule incidente décrit la trajectoire rectiligne définie par $(x = vt; y = b)$ pour $-\infty < t < +\infty$. b est le paramètre d'impact.
- A l'instant initial, l'électron est immobile au point O. Au cours de la collision son déplacement reste faible.

1. Discuter la première hypothèse.
2. Montrer que le champ électrique transverse créé en O par la particule incidente est :

$$\mathrm{E}_y(t) = \frac{-\mathrm{Z}eb\gamma}{4\pi\varepsilon_0(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}$$

3. En déduire l'impulsion finale transverse de l'électron pour $t \to +\infty$. On donne :

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = 2$$

4. Dessiner l'allure temporelle du champ électrique transverse en O. Quelle est sa largeur temporelle Δt ?
5. En admettant que Δt est un temps caractéristique de collision, estimer le déplacement transverse d de l'électron.
6. Pourquoi l'inégalité $d < b$ doit elle être satisfaite ? En déduire que :

$$b > \frac{\mathrm{Z}e^2}{2\pi\varepsilon_0 m v^2 \gamma} = b_{min}$$

7. Soit ω_0 une pulsation atomique caractéristique. Pourquoi l'inégalité $\Delta t < 2\pi/\omega_0$ doit-elle être satisfaite ? En déduire que $b < b_{max} = \frac{2\pi\gamma v}{\omega_0}$.
8. Calculer l'énergie cinétique finale de l'électron $\Delta\mathrm{E}(b)$. On pourra le traiter comme une particule non relativiste.
9. Soit N le nombre d'atomes par unité de volume et Z le numéro atomique. Montrer que la perte d'énergie par unité de longueur est :

$$\frac{d\mathrm{E}}{dx} = 2\pi\mathrm{NZ}\int_{b_{min}}^{b_{max}} \Delta\mathrm{E}(b) b db$$