Relativité et Électromagnétisme
— L7 —

Examen Final

Les notes de cours et de TD sont autorisées. Durée 3h.

19 Juin 2012

Exercice 1

Une particule de masse m et de charge q décrit un mouvement circulaire uniforme d'équation

$$\begin{cases} x = & -\mathrm{R}\cos\omega t \\ y = & \mathrm{R}\sin\omega t \\ z = & 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. Calculer le temps propre τ dans le référentiel de la particule.
2. Quelle est la trajectoire correspondante $x^\mu(\tau)$ dans l'espace-temps ?
3. Calculer le vecteur vitesse $u^\mu(\tau) = \dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ et le vecteur accélération $\dfrac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}$.
4. Rappeler les équations du mouvement d'une particule chargée de masse m et de charge q plongée dans un champ électromagnétique extérieur $\mathrm{F}^{\mu\nu}$.
5. Calculer le champ extérieur $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ dans lequel est plongée la particule pour que sa trajectoire soit celle donnée par les équations (1).

On donne en appendice les équations des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ créés par une particule chargée.

6. Donner l'expression générale des champs de rayonnement dans la limite non-relativiste.
7. Calculer la puissance rayonnée par la charge dans la direction $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$.
8. Dessiner le diagramme de rayonnement.
9. Calculer la puissance totale rayonnée.

Question facultative (bonus)

Application : la nébuleuse du Crabe est la première radio-source galactique observée. Le rayonnement est émis par des électrons sur des orbites cyclotrons créées par le champ magnétique galactique.

- Estimer le temps de vie d'une orbite cyclotron non relativiste d'un électron plongé dans le champ $\mathbf{B}$. Montrer que
$$\mathrm{T} \sim \frac{\pi\epsilon_0 m^3 c^3}{q^4 \mathrm{B}^2}.$$
- Comparer ce temps à l'âge de la nébuleuse (1000 ans) pour les valeurs numériques données ci-dessous et conclure.

On donne

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &\sim 10^{-9}\,\mathrm{T} \\ m &\sim 9\times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \\ q &\sim 1,6\times 10^{-19}\,\mathrm{C} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 9\times 10^{9} \end{aligned}$$

Exercice 2

Les équations de Maxwell décrivant les champs électrique et magnétique associés à un photon massif de masse $m = \dfrac{\mu\hbar}{c}$ s'écrivent

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha \mathrm{F}^{\alpha\nu} + \mu^2 \mathrm{A}^\nu = \mu_0 j^\nu\,, \\ &\partial_\rho \mathrm{F}_{\alpha\nu} + \partial_\nu \mathrm{F}_{\rho\alpha} + \partial_\alpha \mathrm{F}_{\nu\rho} = 0\,. \end{aligned}$$

1. En déduire les équations de Maxwell généralisées faisant intervenir $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ et les potentiels $\mathbf{A}$ et Φ.
2. En utilisant l'équation de conservation de la charge, montrer que les équations satisfaites par le potentiel A^α prennent la forme
$$(\Box + \mu^2)\mathrm{A}_\alpha = \mu_0\, j_\alpha. \qquad (2)$$
3. On cherche des solutions des équations (2) dans le vide de la forme $\mathrm{A}_\alpha = \epsilon_\alpha\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$. En déduire la relation de dispersion $\omega(\mathbf{k})$ reliant la pulsation au vecteur nombre d'onde $\mathbf{k}$. Calculer la vitesse de groupe $v_\mathrm{g} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$.
4. En s'appuyant sur le principe de correspondance, montrer que la relation de dispersion s'interprète comme la propagation d'une particule massive dont on précisera la masse.
5. On considère deux trains d'onde de longueur d'onde moyenne λ_1 et λ_2 émis au même instant et parcourant la même distance L. Montrer que la différence des temps de réception des deux signaux est donnée au premier ordre en μ par l'expression
$$\Delta t \simeq \frac{1}{8\pi^2 c}\mu^2 \mathrm{L}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\,.$$
Application numérique : des mesures astrophysiques utilisant la lumière émise par certaines étoiles doubles donnent $\delta t < 10^{-3}$ s avec $\mathrm{L} = 10^3$ années lumière, $\lambda_1 = 0.4$ μm et $\lambda_2 = 0.8$ μm. En déduire une limite supérieure sur la masse du photon. On donne $\hbar = 1,05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J.s}$.

Exercice 3

Un observateur O mesure dans le réferentiel $\mathcal{R}$ le champ électromagnétique d'une onde plane qui se propage dans le vide $\left(k = \dfrac{\omega}{c}\right)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^y(x,t) &= \mathrm{E}^0 \cos(kx - \omega t)\,, \\ \mathrm{B}^z(x,t) &= \frac{\mathrm{E}^0}{c}\cos(kx - \omega t)\,. \end{aligned}$$

1. Ecrire les composantes non nulles du tenseur $\mathrm{F}^{\mu\nu}$.
2. Calculer $\mathrm{F}_{\rho\sigma}\mathrm{F}^{\rho\sigma}$.
3. Calculer les composantes non nulles du tenseur d'énergie impulsion

$$\mathrm{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\mathrm{F}^{\mu}{}_{\lambda}\mathrm{F}^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\mathrm{F}_{\rho\sigma}\mathrm{F}^{\rho\sigma}\right)$$

   et donner leur interprétation physique.
4. Que vaut le tenseur d'énergie impulsion $\mathrm{T}'^{\mu\nu}$ pour un observateur O' en mouvement rectiligne uniforme par rapport à O de vitesse $v_x = \beta c$?
5. Calculer la pression de radiation qui s'exerce sur les faces avant et arrière d'une plaque se déplaçant à la vitesse v par rapport à l'observateur O.

Appendice

Les champs électrique et magnétique rayonnés à grande distance en un événement $(\boldsymbol{r}, t)$ par une particule de charge q dont la trajectoire est fixée s'écrivent

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\left\{\frac{\mathbf{n}\wedge\left[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\wedge\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3\,\mathrm{R}}\right\}_{\mathrm{ret}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{n}\wedge\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{c},$$

où toutes les quantités relatives à la particule sont considérées à l'instant retardé $t_0(\boldsymbol{r}, t)$.