Relativité et Électromagnétisme : TD de soutien n°7
— L7 —

Rayonnement de l'atome d'hydrogène

Sébastien Leurent, Marc Lilley & Sylvain Nascimbène

6 juin 2010

Rayonnement de l'atome d'hydrogène

On rappelle l'expression du champ électrique de Liénard-Wiechert créé en un point $\overrightarrow{r}$ à l'instant t par une charge q :

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1-\beta^2}{(R-\overrightarrow{R}.\overrightarrow{\beta})^3}(\overrightarrow{R}-\overrightarrow{\beta}R)\right]_{t_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\frac{\overrightarrow{R}\times((\overrightarrow{R}-\overrightarrow{\beta}R)\times\overrightarrow{v})}{(R-\overrightarrow{R}.\overrightarrow{\beta})^3}\right]_{t_0} \quad (1)$$

où t_0 est le temps retardé et $\overrightarrow{R}$ le vecteur entre la particule et le point considéré.

Nous adoptons tout d'abord un modèle non quantique et non relativiste de l'atome d'hydrogène. Un électron de charge q_e et de masse m_e est en orbite circulaire sur un cercle de rayon $r_0 = 0.53$ Å et de centre le proton, supposé fixe.

On pourra noter $e^2 = \frac{{q_e}^2}{4\pi\epsilon_0}$.

1. Calculer l'accélération a_0, la vitesse v_0, l'énergie totale de l'électron E_0 et la période T_0. Justifiez l'approximation non relativiste.
2. Donnez la limite non relativiste de (1) dans la zone de rayonnement. Déduisez-en l'état de polarisation du rayonnement émis à grande distance sur l'axe perpendiculaire à la trajectoire passant par le proton, puis dans le plan de la trajectoire.
3. On rappelle que la puissance rayonnée par l'électron est :
$$\mathcal{P} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}\ \|\frac{d\overrightarrow{p}}{dt}\|^2 \quad (2)$$
(formule de Larmor). Calculez l'énergie perdue durant le premier tour, notée $-\Delta E$. Calculez la perte d'énergie relative $-\Delta E/E_0$. Déduisez-en la variation relative du rayon $\Delta r/r_0$.
4. En admettant qu'à chaque révolution l'orbite de l'électron reste circulaire, montrez que la loi d'évolution de l'énergie en fonction du temps peut se mettre sous la forme :
$$\frac{1}{E^3(t)} = \frac{1}{E_0^3(t)} + At \quad (3)$$
Qu'en est-il de l'évolution du rayon de la trajectoire en fonction du temps ?
5. Donnez la durée de vie τ de l'atome dans ce modèle. L'énergie rayonnée est-elle bornée ?

Dans un modèle semi-quantique, le moment cinétique σ de l'électron sur son orbite ne peut prendre que les valeurs discrètes $\sigma_n = n\hbar$, avec n entier naturel non nul.

6. Calculez les niveaux d'énergie E_n de ce modèle.
7. En utilisant les résultats de la question (d), calculez la durée $\tau_{1,2}$ de la transition du niveau E_2 vers le niveau E_1. Expérimentalement on trouve pour la transition $2p \to 1s$ la durée $\tau_{exp} = 1.6 \times 10^{-9}$ s. Comparez τ_{exp} à $\tau_{1,2}$.