Relativité et Électromagnétisme : TD de soutien n°8
— L7 —

Rayonnement des antennes

Sébastien Leurent, Marc Lilley & Sylvain Nascimbène

13 juin 2012

On considère une antenne de longueur l dans laquelle on établit une onde stationnaire de courant d'amplitude I_0, de pulsation ω, de longueur d'onde λ. On se place dans l'approximation de Roubaud des antennes filiformes, qui consiste à assimiler la vitesse des ondes dans l'antenne et dans le vide. On écrira donc $\lambda = 2\pi c/\omega$. Les extrémités de l'antenne constituent des noeuds pour cette onde de courant. On note m le nombre de demi-oscillations spatiales dans l'antenne. Enfin, on ne prend pas en compte l'extension transverse de l'antenne et on étudie le rayonnement à une distance R telle que $R \gg l$.

1 Calcul des champs rayonnés

1. Pour un vecteur d'onde donné (pour m donné), écrire l'expression de la densité volumique de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ dans l'antenne. Représentez cette fonction pour t fixé dans les cas $m = 1$ et $m = 2$.

   On va calculer explicitement les champs et la puissance rayonnés par cette antenne dans la zone d'onde.

2. Exprimez le potentiel vecteur crée par l'antenne en un point $\mathbf{R}$ en distinguant les cas m pair ou impair. On utilisera :

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{c})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}$$

3. En déduire les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ rayonnés par l'antenne.

4. Montrez que la puissance moyenne rayonnée par unité d'angle solide peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \begin{cases} \dfrac{I_0^2}{8\pi^2\epsilon_0 c} \dfrac{\cos^2(\frac{m\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta} & \text{pour } \ m \text{ impair} \\ \dfrac{I_0^2}{8\pi^2\epsilon_0 c} \dfrac{\sin^2(\frac{m\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta} & \text{pour } \ m \text{ pair} \end{cases} \tag{1}$$

2 Etude du cas $m = 1$: antenne demi-onde

1. Tracer l'allure du diagramme de rayonnement d'une antenne demi-onde et comparer au rayonnement d'un dipôle.

2. A l'aide de l'équation de conservation de la charge, montrez qualitativement que l'antenne demi-onde est assimilable à un dipôle.

3. Calculez le moment dipolaire de l'antenne demi-onde. Dans le cadre de l'approximation dipolaire et à l'aide du formulaire, déduisez-en la puissance rayonnée par unité d'angle solide et la puissance rayonnée totale. Comparez ce résultat avec la question précédente.

2.1 Formulaire

On rappelle l'expression de la puissance rayonnée par un dipôle électrique d'amplitude $\mathbf{d_0} = d_0 e^{-i\omega t}\mathbf{u_z}$:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{d_0^2}{32\pi^2\epsilon_0}\frac{\omega^4}{c^3}\sin^2\theta$$

On donne la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta} \simeq 1.219.$$