Relativité et Électromagnétisme : TD n°2
— L7 —

Voyage interstellaire

Igor Ferrier-Barbut, Marc Lilley, Sylvain Nascimbène & Bruno Peaudecerf

19 février 2013

Ce TD, qui regroupe un certain nombre d'applications de la transformation de Lorentz, a pour but d'étudier quelques aspects du voyage à des vitesses proches de celle de la lumière. La première partie permet de mettre en évidence le fameux paradoxe des jumeaux tel qu'il a été formulé par le physicien Paul Langevin (1911). La deuxième partie propose un point de vue qui permet de faire disparaître le paradoxe. Enfin, la dernière partie présente un modèle de voyage plus réaliste que celui proposé précédemment.

1 Paradoxe des Jumeaux

Deux jumeaux naissent sur Terre, l'un est appelé le sédentaire et noté S et l'autre est appelé le voyageur et noté V. Dès leur naissance, les deux jumeaux sont séparés : pendant que S reste sur la Terre, V monte dans une fusée piloté par le pilote P' et part pour une étoile E située à une distance $L = 40$ années-lumière de la Terre et effectue son voyage à la vitesse constante $\boldsymbol{v}$ (par rapport à la Terre) telle que $\gamma = 22$. On note $\mathcal{R}$ le référentiel inertiel lié à la Terre dans lequel S est au repos, et $\mathcal{R}'$ le référentiel inertiel lié au pilote P'. Le point de départ est l'origine O ($x = 0$ et $t = 0$) et le mouvement s'effectue selon l'axe Ox du référentiel $\mathcal{R}$. On notera T la durée du voyage de la Terre à l'étoile dans le référentiel $\mathcal{R}$.

1. Paramétrer les lignes d'univers de S, V et E dans chacun des deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Représenter les diagrammes d'espace-temps dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.
2. Calculer la durée T du voyage vue par S puis la durée T' du voyage pour V.

Les jumeaux S et V, connaissant un brin de relativité, savent que les temps de parcours T et T' sont différents. Chacun des deux veut savoir quel est l'âge de l'autre lorsque le voyage aller est terminé. L'âge de V pour S est déterminé ainsi : S demande à un observateur S_2, lié à $\mathcal{R}$ et fixe sur l'étoile, de lire l'horloge de V à son arrivée sur l'étoile. De même, pour connaître l'âge de S pour V, V demande à un observateur V_2, lié à $\mathcal{R}'$ et coïncidant avec S quand V arrive sur l'étoile, de lire l'horloge de S.

3. Quels sont les âges de V pour S et de S pour V déduits de la procédure ci-dessus ? Quel est le jumeau le plus jeune à l'arrivée de V sur l'étoile ? Pourquoi l'âge de S pour V mesuré ainsi n'est pas égal à T ?

On s'intéresse maintenant au trajet retour : on suppose qu'à peine arrivé sur l'étoile, V saute sur une seconde fusée pilotée par P'', et qui se dirige à la vitesse $-\boldsymbol{v}$ vers la Terre. On note $\mathcal{R}''$ le référentiel inertiel lié à P''.

4. Quel est la durée du trajet retour pour S et pour V ? En déduire les temps d'aller-retour $T_{\mathrm{AR}}[S]$ et $T_{\mathrm{AR}}[V]$ pour S et V.

5. Voici le raisonnement de Langevin : « *le temps d'aller-retour* $T_{\mathrm{AR}}[S]$ *pour* S *est un temps propre, il doit donc être égal à* $T_{\mathrm{AR}}[V]/\gamma$. *De même, le temps d'aller-retour* $T_{\mathrm{AR}}[V]$ *pour* V *est un temps propre, il doit donc être égal à* $T_{\mathrm{AR}}[S]/\gamma$. *Ces deux phrases sont contradictoires si* $\gamma \neq 1$ ». Où est l'erreur dans le raisonnement de Monsieur Langevin [1] ? Quelle phrase est la bonne ?
6. Calculer, pour S, P', P'' et V, la durée du voyage aller et celle du voyage retour. Proposer deux méthodes pour le calcul du temps aller dans $\mathcal{R}''$ et du temps retour dans $\mathcal{R}'$.
7. Enfin, tracer le voyage aller retour dans un diagramme d'espace-temps (ct', x') dans $\mathcal{R}'$.

2 Résolution en termes de battements de coeur

On considère toujours les deux jumeaux S et V. On suppose que S et V ont tous les deux un coeur qui bat régulièrement avec une période $T_0 = 1s$. En outre, un appareil envoie un flash lumineux isotrope à chaque battement de coeur.

1. Rappeler la loi de composition des vitesses en relativité restreinte (voir cours) ainsi que la formule de l'effet Doppler relativiste (voir TD n°1).
2. Déterminer le nombre de battements de coeur de S qu'observe V pendant le voyage.
3. Déterminer le nombre de battements de coeur de V qu'observe S pendant le voyage.
4. Enfin, déterminer le nombre de battements de coeur de V et S vus par le pilote P' de la première fusée. Conclure.

3 Mouvement uniformément accéléré

Nous allons traiter dans cette partie le paradoxe des jumeaux en calculant explicitement comment évolue le temps propre lors d'un demi-tour « réaliste »du jumeau voyageur.

Pour effectuer son voyage, V monte dans un véhicule spatial de masse M, initialement immobile sur la Terre, et accélère progressivement en se dirigeant vers E. On admettra ici que le vaisseau étant soumis à une force constante F dans $\mathcal{R}'$ (force de poussée), l'équation relativiste de la dynamique permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma(t) M v(t)\right) = F$$

On note toujours T la durée du voyage aller dans $\mathcal{R}$. Au milieu du voyage (en $x = L/2$, à $t = T/2$), le vaisseau se retourne et emploie la force de poussée pour ralentir. La position, la vitesse et l'accélération du vaisseau dans $\mathcal{R}$ sont $x(t)$, $v(t)$ et $g(t)$. On notera $\mathcal{R}'(t)$ le référentiel galiléen tangent au mouvement du vaisseau à l'instant t dans $\mathcal{R}$, défini par les paramètres $\beta_{\mathcal{R}'(t)} = \beta(t)$ et $\gamma_{\mathcal{R}'(t)} = \gamma(t)$ habituels. On notera $\tau(t)$ le temps propre du vaisseau, obtenu en accumulant les temps propres infinitésimaux dans les référentiels tangents successifs. On notera enfin $a = F/M$, $t_0 = c/a$, $\mathcal{L} = ct_0$. Autant que possible les résultats seront exprimés en fonction de L, $\mathcal{L}$, et t_0.

1. Quelles significations physique peut-on donner classiquement à a, t_0 et $\mathcal{L}$?

1. Paul Langevin avait parfaitement compris la relativité restreinte et n'a jamais proposé le paradoxe des jumeaux comme une preuve de l'inconsistance de la relativité restreinte. Au contraire, le « paradoxe »qui porte son nom a en fait été porté devant ses contemporains par Langevin pour leur montrer que la notion de simultanéité pouvait induire en erreur.

2. À partir de l'équation du mouvement du vaisseau dans $\mathcal{R}$ pendant la phase d'accélération, exprimer $v(t)$, $\gamma(t)$ puis $x(t)$ et $g(t)$.
3. Représenter qualitativement les variations de v, x, γ et g pendant l'ensemble du voyage aller (on raisonnera par symétrie pour la phase de freinage).
4. Représenter sur un diagramme d'espace-temps la ligne d'Univers du vaisseau.
5. En utilisant la loi de composition des vitesses, exprimer l'accroissement $\mathrm{d}v'$ de la vitesse dans $\mathcal{R}'$, pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ dans $\mathcal{R}$, en fonction de $\mathrm{d}v = g\mathrm{d}t$. En déduire l'accélération A dans $\mathcal{R}'$ et montrer que $A = a$.
6. Calculer le temps de parcours T dans $\mathcal{R}$ (on utilisera la symétrie par rapport à la manoeuvre de retournement). Donner le comportement de T pour un voyage très court ou un voyage très long (L petit ou grand par rapport à $\mathcal{L}$). Calculer enfin la valeur maximale de γ. Applications numériques : $L = 40$ années lumière, $a = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.
7. Calculer le temps propre τ en fonction du temps t dans $\mathcal{R}$. En déduire la durée du parcours $\mathcal{T}$ pour V. Donner les comportements asymptotiques de $\mathcal{T}$ pour un trajet très court ou très long. Interprétation physique et applications numériques.

4 Formulaire

On rappelle que :

$$\int^x \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$