# Physique des lasers

Sylvain Nascimbene

Département de chimie - École Normale Supérieure

Ces notes accompagnent le cours *Physique des lasers*, donné au département de chimie de l'École Normale Supérieure de 2014 à 2021. Elles reprennent le contenu des notes manuscrites du cours, et incluent quelques compléments qui n'étaient pas traités en cours, marqués par le symbole $(*)$ dans la table des matières et dans le texte. Pour aller plus loin, on pourra consulter les ouvrages de référence [1, 2, 3].

## Table des matières

**1 Introduction : ingrédients de base d'un laser** **3**
- 1.1 Un amplificateur optique . . . 3
- 1.2 Une boucle de rétroaction . . . 3
- 1.3 Un couplage avec l'extérieur . . . 4
- 1.4 L'effet laser en trois équations . . . 4

**2 Mécanisme de l'amplification optique** **5**
- 2.1 Interaction lumière-matière : modèle classique . . . 5
  - 2.1.1 L'électron élastiquement lié . . . 5
  - 2.1.2 Propagation d'une onde dans un milieu atomique . . . 6
- 2.2 Modèle d'Einstein . . . 7
  - 2.2.1 Équations d'évolution des populations . . . 7
  - 2.2.2 Origine physique de l'émission stimulée : l'amplification bosonique 8
  - 2.2.3 Amplification dans le modèle d'Einstein . . . 9
- 2.3 Saturation de l'absorption . . . 9
  - 2.3.1 Modèle de l'électron élastiquement lié avec saturation . . . 9
  - 2.3.2 Dynamique des populations . . . 10
- 2.4 Mécanismes de pompage et zoologie des lasers . . . 10
  - 2.4.1 Laser à cristal dopé . . . 11
  - 2.4.2 Lasers à fibre . . . 12
  - 2.4.3 Diode laser . . . 12

**3 Modes transverses d'un faisceau laser** **13**
- 3.1 Modes gaussiens du champ électromagnétique . . . 13
  - 3.1.1 Approximation de l'enveloppe lentement variable . . . 13
  - 3.1.2 Divergence d'un faisceau . . . 14
  - 3.1.3 Solution gaussienne . . . 14

3.1.4 Propriétés du faisceau gaussien . . . 15
3.2 Mode optique dans une cavité laser . . . 17
3.3 Propagation d'un faisceau gaussien : matrices ABCD . . . 17

**4 Laser en régime stationnaire** **19**
4.1 Modes propres longitudinaux d'une cavité Fabry-Perot . . . 19
4.1.1 Transmission d'une cavité . . . 19
4.1.2 Finesse . . . 20
4.1.3 Champ à l'intérieur de la cavité . . . 20
4.2 Condition d'oscillation d'un laser stationnaire . . . 21
4.2.1 Condition sur l'amplitude . . . 22
4.2.2 Condition sur la phase . . . 22
4.3 Fonctionnement en présence d'un champ incident . . . 23
4.3.1 Amplificateur optique . . . 23
4.3.2 Injection optique . . . 24
4.4 Compétition ou coexistence de modes ? . . . 24
4.4.1 Modèle de deux modes en compétition . . . 24
4.4.2 Stabilité des régimes stationnaires . . . 25
4.4.3 Bilan : comment rendre un laser monomode ? . . . 25

**5 Lasers femtoseconde** **26**
5.1 Principe d'un laser femtoseconde . . . 26
5.1.1 Modes de phases aléatoires . . . 26
5.1.2 Modes synchronisés . . . 27
5.2 Réalisation d'un laser femtoseconde : le laser Ti:saphir . . . 28
5.3 Applications en chimie : spectroscopie femtoseconde . . . 29

**6 Optique non linéaire** **29**
6.1 Milieux non linéaires . . . 30
6.2 Propagation lumineuse dans un milieu non linéaire . . . 31
6.3 Effets non linéaires du second ordre . . . 31
6.3.1 Doublage de fréquence . . . 31
6.3.2 Comment réaliser l'accord de phase ? . . . 32
6.3.3 Au-delà de l'approximation de faible déplétion de la pompe . . . 34
6.3.4 Oscillateur paramétrique optique . . . 35
6.4 Effet Kerr optique . . . 36
6.4.1 Autofocalisation . . . 36
6.4.2 Équation de Schrödinger non linéaire . . . 37
6.4.3 Évolution de la taille du faisceau . . . 37
6.4.4 Soliton de Townes . . . 37

# 1 Introduction : ingrédients de base d'un laser

Un laser est un oscillateur optique. Comme tout oscillateur (électronique, mécanique ou acoustique), il est constitué d'un amplificateur dont la sortie est réinjectée à l'entrée, et d'un couplage vers l'extérieur qui permet d'extraire une partie de l'énergie produite. L'objectif de ce chapitre est de présenter ces trois ingrédients, et d'énoncer les conditions sous lesquelles une oscillation peut s'établir spontanément. Les chapitres suivants reprendront chacun de ces ingrédients en détail.

## 1.1 Un amplificateur optique

Le premier ingrédient est un milieu amplificateur. On considère un champ incident monochromatique $E^{\text{in}}(t) = E_0 \cos(\omega t)$, de pulsation $\omega$, qui traverse le milieu. Le champ sortant est proportionnel au champ incident,

$$E^{\text{out}} = \sqrt{G}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} E^{\text{in}}, \tag{1.1}$$

où $G$ est le gain en intensité et $\varphi$ un déphasage. Nous verrons au chapitre 2 que le gain $G$ est en général résonnant autour d'une pulsation $\omega_0$ caractéristique du milieu, correspondant à une transition entre deux niveaux d'énergie des atomes ou des molécules qui le constituent. Nous verrons aussi qu'un milieu à l'équilibre thermodynamique est toujours absorbant ($G < 1$), et que l'obtention d'un gain $G > 1$ nécessite de maintenir le milieu hors d'équilibre par un mécanisme de pompage.

## 1.2 Une boucle de rétroaction

Le deuxième ingrédient est une boucle de rétroaction, qui renvoie la lumière sortant de l'amplificateur vers son entrée. Elle est réalisée par une cavité optique, formée de miroirs. Il peut s'agir d'une cavité en anneau, comme représenté sur la figure 1, ou d'une cavité linéaire de type Fabry-Perot, formée de deux miroirs se faisant face. On note $L$ la longueur d'un tour de cavité.

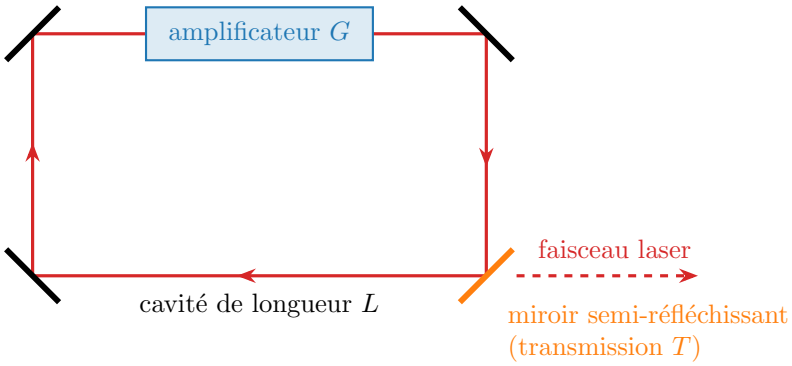



**Figure 1** – Schéma de principe d'un laser : un milieu amplificateur est placé dans une cavité optique (ici en anneau), qui réinjecte la lumière à l'entrée de l'amplificateur. Un des miroirs est partiellement transmissif, ce qui permet d'extraire le faisceau laser.

## 1.3 Un couplage avec l'extérieur

Le troisième ingrédient est un couplage avec l'extérieur, qui permet de prélever une partie de la lumière circulant dans la cavité. Il est réalisé par un miroir semi-réfléchissant, de coefficient de transmission en intensité $T$ (en général de l'ordre de quelques pourcents). Le faisceau transmis par ce miroir constitue le faisceau laser.

## 1.4 L'effet laser en trois équations

Une oscillation peut s'établir spontanément dans la cavité si le champ se reproduit identique à lui-même après un tour de cavité. Cette condition se décompose en trois conditions.

**Équilibre entre gain et pertes.** Sur un tour, l'intensité est multipliée par le gain $G$, et diminuée par la transmission $T$ du miroir de sortie et par les autres pertes de la cavité (absorption et diffusion par les optiques, diffraction), que l'on caractérise par un coefficient $A$. Pour des pertes faibles, la condition de stationnarité s'écrit

$$G(I) - 1 = A + T, \tag{1.2}$$

où $I$ est l'intensité intracavité. Cette condition met en évidence l'importance de la non-linéarité du gain : si $G$ ne dépendait pas de l'intensité, l'égalité (1.2) ne serait vérifiée que pour une valeur particulière des paramètres, et l'intensité lumineuse serait indéterminée. En pratique, le gain diminue lorsque l'intensité augmente (on parle de saturation du gain), et c'est cette décroissance qui fixe l'intensité du laser en régime stationnaire.

**Conservation de la phase sur un tour.** Le champ doit également retrouver sa phase après un tour, ce qui impose

$$\omega \frac{L}{c} = 2\pi m, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Seules certaines pulsations $\omega_m = 2\pi mc/L$ peuvent donc osciller ; ce sont les modes longitudinaux de la cavité.

**Conservation de la distribution transverse du champ.** Enfin, le profil transverse du faisceau doit se reproduire à l'identique après un tour. Un faisceau de taille finie s'étale naturellement par diffraction lors de sa propagation, et un mécanisme de focalisation (par exemple des miroirs courbes) doit compenser cet étalement. Nous verrons au chapitre 3 que cette condition sélectionne des modes transverses de forme gaussienne.

Le plan de ces notes suit ces trois ingrédients. Le chapitre 2 décrit le mécanisme de l'amplification optique, le chapitre 3 les modes transverses d'un faisceau laser, et le chapitre 4 le fonctionnement d'un laser en régime stationnaire. Les chapitres 5 et 6 présentent deux développements importants pour les applications en chimie : les lasers femtoseconde et l'optique non linéaire.

# 2 Mécanisme de l'amplification optique

L'amplification de la lumière par un milieu matériel repose sur l'interaction entre le champ électromagnétique et les atomes ou molécules du milieu. Dans ce chapitre, nous décrivons cette interaction à l'aide de deux modèles complémentaires. Le modèle classique de l'électron élastiquement lié rend compte de la réponse du milieu à un champ (indice de réfraction, absorption), mais prédit un milieu toujours absorbant. Le modèle d'Einstein, qui tient compte de la quantification des niveaux d'énergie et du champ, fait apparaître l'émission stimulée, à l'origine de l'amplification. Nous verrons enfin comment combiner ces deux descriptions, et comment l'inversion de population requise pour l'amplification est obtenue en pratique.

## 2.1 Interaction lumière-matière : modèle classique

### 2.1.1 L'électron élastiquement lié

Le modèle le plus simple de matière est un atome possédant deux niveaux d'énergie, un niveau fondamental $|g\rangle$ et un niveau excité $|e\rangle$, séparés d'une énergie $\hbar\omega_0$. Dans le domaine optique, la fréquence de résonance $\omega_0/2\pi$ est de l'ordre de quelques $10^{14}$ Hz, tandis que la largeur naturelle de la transition, notée $\Gamma$, vérifie typiquement $\Gamma/2\pi \sim 10\,\mathrm{MHz}$ pour une transition atomique permise.

Dans le modèle de l'électron élastiquement lié, on représente l'atome par un électron de masse $m$ et de charge $-e$, rappelé vers le noyau par une force harmonique de pulsation propre $\omega_0$, et soumis à une force de frottement de taux $\Gamma$ qui rend compte de la perte d'énergie par rayonnement. Soumis à une onde plane de champ électrique $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\boldsymbol{\epsilon}$, de polarisation $\boldsymbol{\epsilon}$, la position $\mathbf{r}$ de l'électron obéit à l'équation

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - m\Gamma\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} - eE_0\cos(\omega t - kz)\,\boldsymbol{\epsilon}. \tag{2.1}$$

En notation complexe, et en introduisant le dipôle électrique $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$, la solution en régime forcé s'écrit

$$\mathbf{p} = \frac{e^2\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}m\Gamma\omega}. \tag{2.2}$$

Près de la résonance ($|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$), on peut écrire $\omega_0^2 - \omega^2 \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$, d'où

$$\mathbf{p} = \frac{e^2\mathbf{E}}{2m\omega_0\left[(\omega_0 - \omega) - \mathrm{i}\Gamma/2\right]}. \tag{2.3}$$

On introduit la polarisabilité $\alpha = \alpha' + \mathrm{i}\alpha''$ de l'atome, définie par $\mathbf{p} = \varepsilon_0\alpha\mathbf{E}$. Ses parties réelle et imaginaire valent

$$\alpha' = \frac{e^2(\omega_0 - \omega)}{2m\omega_0\varepsilon_0}\,\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4}, \tag{2.4}$$

$$\alpha'' = \frac{e^2\Gamma}{4m\omega_0\varepsilon_0}\,\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4}. \tag{2.5}$$

La partie réelle $\alpha'$ décrit la composante du dipôle en phase avec le champ, et a une forme dispersive. La partie imaginaire $\alpha''$ décrit la composante en quadrature ; elle est positive

et a une forme lorentzienne de largeur $\Gamma$. On vérifie aisément que la puissance moyenne cédée par le champ à l'atome vaut $\varepsilon_0\omega\alpha'' E_0^2/2$ : la partie imaginaire de la polarisabilité décrit l'absorption.

### 2.1.2 Propagation d'une onde dans un milieu atomique

On considère maintenant un milieu constitué d'atomes de densité $n_{\text{at}}$. Le milieu acquiert une densité de polarisation

$$\mathbf{P} = n_{\text{at}}\mathbf{p} = n_{\text{at}}\varepsilon_0\alpha\mathbf{E} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}, \tag{2.6}$$

où l'on a introduit la susceptibilité électrique $\chi = n_{\text{at}}\alpha$. Le déplacement électrique s'écrit $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}$, avec la permittivité relative

$$\varepsilon_r = 1 + \chi = \underline{n}^2, \tag{2.7}$$

qui définit l'indice de réfraction complexe $\underline{n}$. Pour un milieu dilué, $|\chi| \ll 1$ et $\underline{n} \simeq 1 + \chi/2$. On écrit l'indice complexe sous la forme

$$\underline{n} = n + \mathrm{i}\frac{1}{2\xi k_0}, \qquad k_0 = \frac{\omega}{c}, \tag{2.8}$$

qui définit l'indice de réfraction $n = 1 + n_{\text{at}}\alpha'/2$ et la longueur d'absorption $\xi$, telle que $1/\xi = k_0 n_{\text{at}}\alpha''$.

Une onde plane progressive se propage dans le milieu avec le vecteur d'onde $k = \underline{n}k_0$, soit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(nk_0 z - \omega t)}\,\mathrm{e}^{-z/2\xi}\,\boldsymbol{\epsilon}. \tag{2.9}$$

L'intensité décroît donc exponentiellement avec la distance parcourue,

$$I(z) = I(0)\,\mathrm{e}^{-z/\xi} \equiv I(0)\,\mathrm{e}^{gz}, \tag{2.10}$$

où l'on a défini le gain en intensité par unité de longueur $g = -1/\xi$. On retrouve la loi de Beer-Lambert.

L'indice et le gain sont représentés sur la figure 2 en fonction de la pulsation. On en tire les conclusions suivantes :

- Le gain est toujours négatif : dans ce modèle, le milieu est toujours absorbant, et il n'y a pas d'amplification possible.
- Au-dessus de la résonance, l'indice est inférieur à 1, et la vitesse de phase $v_\varphi = c/n$ est supérieure à $c$. Plus surprenant, la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{c}{n + \omega\,\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega} \tag{2.11}$$

  peut elle aussi être supérieure à $c$ près de la résonance, là où $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega < 0$. Dans ce cas cependant, l'absorption est très importante, et on peut montrer que la vitesse de propagation de l'information reste inférieure à $c$.

Ce modèle présente une limitation importante : il ne présente pas d'effet de saturation, alors qu'un atome à deux niveaux ne peut absorber de l'énergie que de façon limitée (lorsqu'il est dans l'état excité, il ne peut plus absorber). Nous y reviendrons au paragraphe 2.3.

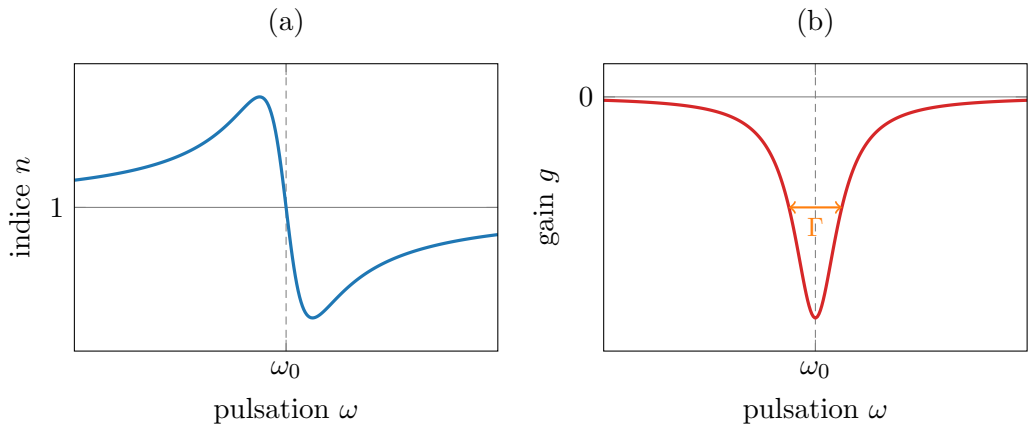



**Figure 2** – Indice de réfraction $n$ (a) et gain en intensité par unité de longueur $g$ (b) d'un milieu d'électrons élastiquement liés, en fonction de la pulsation $\omega$ de l'onde. Le gain est négatif à toute pulsation : le milieu est absorbant, avec un profil lorentzien de largeur $\Gamma$.

## 2.2 Modèle d'Einstein

### 2.2.1 Équations d'évolution des populations

Le modèle d'Einstein (1917) est un modèle phénoménologique de l'interaction entre des atomes à deux niveaux et le champ électromagnétique, qui tient compte de la quantification de l'énergie des atomes. On considère $N = N_a + N_b$ atomes, dont $N_a$ dans le niveau fondamental $a$ et $N_b$ dans le niveau excité $b$, éclairés par un rayonnement de densité spectrale d'énergie $u(\omega)$ (énergie électromagnétique par unité de volume et de pulsation). Einstein postule trois processus élémentaires, représentés sur la figure 3a :

$$\frac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}t} = -AN_b - Bu(\omega_0)N_b + Bu(\omega_0)N_a. \tag{2.12}$$

- Le terme $-AN_b$ décrit l'émission spontanée : un atome excité se désexcite en émettant un photon, en l'absence de tout rayonnement, avec un taux $A = \Gamma$.
- Le terme $+Bu(\omega_0)N_a$ décrit l'absorption d'un photon de pulsation $\omega_0$ par un atome dans le niveau fondamental.
- Le terme $-Bu(\omega_0)N_b$ décrit l'émission stimulée : un photon de pulsation $\omega_0$ induit la désexcitation d'un atome excité, qui émet un second photon *identique* au premier (même pulsation, même direction, même polarisation et même phase). Le taux de ce processus est proportionnel à la densité de photons présents.

Le coefficient $B$ est le même pour l'absorption et l'émission stimulée ; nous le justifions ci-dessous.

**Équilibre thermodynamique.** L'intérêt de ce modèle est qu'il permet de retrouver le rayonnement thermique. À l'équilibre thermodynamique à la température $T$, les populations sont stationnaires, $\mathrm{d}N_a/\mathrm{d}t = 0$, et suivent la loi de Boltzmann, $N_b = N_a\,\mathrm{e}^{-\hbar\omega_0/k_\mathrm{B}T}$. L'équation (2.12) donne alors

$$A + Bu = uB\,\mathrm{e}^{\hbar\omega_0/k_\mathrm{B}T}, \qquad \text{soit} \qquad u(\omega_0) = \frac{A}{B}\,\frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega_0/k_\mathrm{B}T} - 1}. \tag{2.13}$$

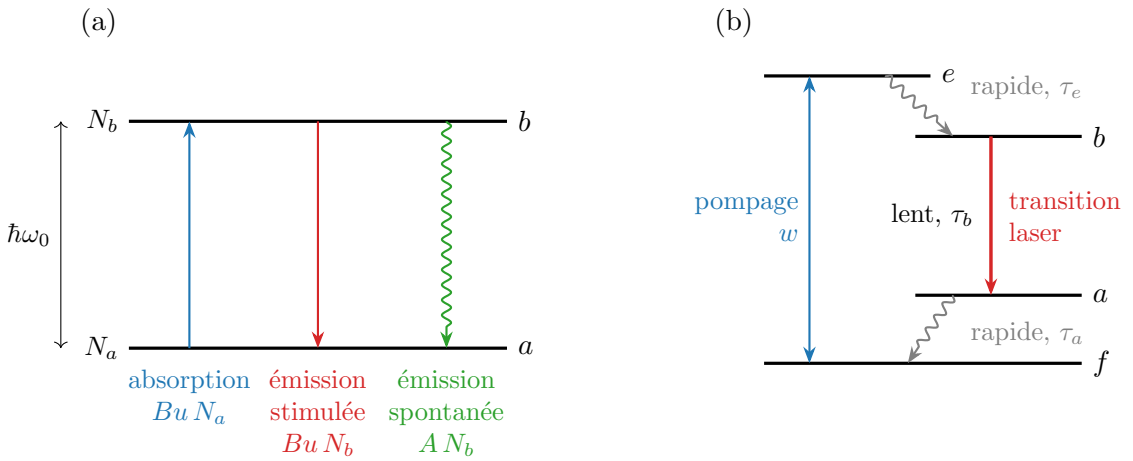



**Figure 3** – (a) Les trois processus du modèle d'Einstein pour un atome à deux niveaux. (b) Modèle à quatre niveaux d'un milieu amplificateur : le pompage porte les atomes du fondamental $f$ vers le niveau $e$, qui se désexcite rapidement vers le niveau $b$, de longue durée de vie. La transition laser a lieu entre $b$ et le niveau $a$, qui se vide rapidement vers $f$.

On compare ce résultat à la loi de Planck du rayonnement du corps noir,

$$u(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}T} - 1}. \tag{2.14}$$

Historiquement, cette loi a permis de résoudre la divergence de la théorie classique du rayonnement (la catastrophe ultraviolette) : en physique classique, chaque mode du champ électromagnétique porterait en moyenne l'énergie $k_\mathrm{B}T$, et l'énergie totale du rayonnement, sommée sur une infinité de modes, divergerait. La loi de Planck est aujourd'hui vérifiée avec une précision remarquable, par exemple pour le rayonnement fossile de l'univers, à 2,7 K.

L'accord entre les deux expressions impose la relation

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega_0^3}{\pi^2 c^3}. \tag{2.15}$$

Le modèle d'Einstein ne permet pas de calculer les coefficients $A$ et $B$ séparément. Un modèle quantique de l'interaction entre l'atome et la lumière donne

$$B = \frac{\pi d^2}{3\varepsilon_0 \hbar^2}, \tag{2.16}$$

où $d$ est l'élément de matrice du dipôle électrique entre les deux niveaux. Le rapport $A/B$ croît comme $\omega_0^3$ : à densité de photons donnée, l'émission spontanée prend de plus en plus d'importance devant l'émission stimulée lorsque la fréquence augmente, ce qui rend difficile la réalisation de lasers dans l'ultraviolet lointain et le domaine des rayons X.

### 2.2.2 Origine physique de l'émission stimulée : l'amplification bosonique

L'émission stimulée est une manifestation du caractère bosonique des photons : la probabilité d'émettre un photon dans un mode du champ est proportionnelle à $1 + n$,

où $n$ est le nombre de photons déjà présents dans ce mode. Le terme 1 correspond à l'émission spontanée, et le terme $n$ à l'émission stimulée. Les bosons ont ainsi tendance à s'accumuler dans un même état quantique.

Une manifestation spectaculaire de cette amplification bosonique est la condensation de Bose-Einstein. Considérons un gaz d'atomes bosoniques piégés dans un potentiel harmonique de pulsation $\omega_0$. À haute température, les atomes se répartissent sur un grand nombre de niveaux d'énergie $E_n$, selon la statistique de Boltzmann $p_n = \mathrm{e}^{-\beta E_n}/Z$. Lorsque la température devient inférieure à une température critique, de l'ordre de $\hbar\omega_0 N^{1/3}/k_\mathrm{B}$ pour $N$ atomes, une fraction macroscopique des atomes s'accumule dans le niveau fondamental du piège : c'est la condensation de Bose-Einstein. Cette transition de phase est reliée à des phénomènes de superfluidité. Le laser peut être vu comme l'analogue, pour les photons, de cette accumulation dans un mode unique.

### 2.2.3 Amplification dans le modèle d'Einstein

D'après l'éq. (2.12), le nombre de photons émis dans le mode du rayonnement incident (par émission stimulée) moins le nombre de photons absorbés est proportionnel à $Bu(N_b - N_a)$. La lumière est donc amplifiée si

$$N_b > N_a, \tag{2.17}$$

c'est-à-dire s'il y a *inversion de population*. L'émission spontanée, quant à elle, se fait dans toutes les directions de l'espace et ne contribue pas à l'amplification du faisceau incident.

On peut aussi s'intéresser au bilan total d'énergie lumineuse, en incluant l'émission spontanée. La lumière est globalement produite par le milieu si $\mathrm{d}N_a/\mathrm{d}t > 0$, soit $AN_b - Bu(N_a - N_b) > 0$. En posant $x = N_b/N$, cette condition s'écrit

$$x > \frac{Bu}{2Bu + A}. \tag{2.18}$$

Pour un rayonnement intense ($Bu \gg A$), on retrouve la condition $x > 1/2$ d'inversion de population.

À l'équilibre thermodynamique, la loi de Boltzmann impose toujours $N_b < N_a$. Pour une transition dans le visible ($\hbar\omega_0 \simeq 2\,\mathrm{eV}$) à température ambiante ($k_\mathrm{B}T \simeq 25\,\mathrm{meV}$), on a $N_b/N_a \sim \mathrm{e}^{-80} \sim 10^{-35}$. L'amplification optique nécessite donc de maintenir le milieu loin de l'équilibre thermodynamique.

## 2.3 Saturation de l'absorption

### 2.3.1 Modèle de l'électron élastiquement lié avec saturation

On peut réconcilier les deux modèles précédents. Un traitement quantique complet de l'atome à deux niveaux (équations de Bloch optiques) conduit à une expression du dipôle atomique moyen semblable à l'éq. (2.3), mais pondérée par la différence des populations :

$$\mathbf{p} = \frac{e^2\mathbf{E}}{2m\omega_0\left[(\omega_0 - \omega) - \mathrm{i}\Gamma/2\right]}\,(p_a - p_b), \tag{2.19}$$

où $p_a$ et $p_b$ sont les probabilités d'occupation des niveaux $a$ et $b$ ($p_a + p_b = 1$), et où l'on a remplacé $e^2/m$ par $e^2 f/m$, avec $f$ la force d'oscillateur de la transition, que nous omettons dans la suite. La polarisabilité devient

$$\alpha = \frac{e^2}{2m\varepsilon_0\omega_0\left[(\omega_0-\omega) - \mathrm{i}\Gamma/2\right]}\,(p_a - p_b). \tag{2.20}$$

Le modèle classique correspond au cas $p_a = 1$, $p_b = 0$ d'un atome dans son état fondamental. Si l'on parvenait à réaliser $p_b > p_a$, le signe de $\alpha''$ s'inverserait, et le milieu deviendrait amplificateur.

### 2.3.2 Dynamique des populations

La population de l'état excité évolue sous l'effet de l'émission spontanée et de l'absorption de lumière. Le taux d'absorption de photons par atome est donné par la puissance absorbée, $\varepsilon_0\omega\alpha'' E_0^2/2$, divisée par l'énergie d'un photon $\hbar\omega_0$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}p_b}{\mathrm{d}t} = -\Gamma p_b + \frac{e^2E_0^2}{8m\hbar\omega_0}\,\frac{\Gamma}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2/4}\,(p_a - p_b). \tag{2.21}$$

Il s'agit exactement de la même équation que celle du modèle d'Einstein : le terme en $p_a$ décrit l'absorption, et le terme en $-p_b$ l'émission stimulée, avec le même coefficient. On l'écrit sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}p_b}{\mathrm{d}t} = -\Gamma p_b + \frac{\Omega_1^2}{4}\,\frac{\Gamma}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2/4}\,(p_a - p_b), \tag{2.22}$$

où l'on a introduit la pulsation de Rabi $\Omega_1$, proportionnelle à l'amplitude du champ ($\Omega_1^2 = e^2E_0^2/2m\hbar\omega_0$ dans ce modèle).

En régime stationnaire, on obtient

$$p_a - p_b = \frac{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2/4}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2/4+\Omega_1^2/2}. \tag{2.23}$$

On a toujours $p_a > p_b$ : quelle que soit l'intensité lumineuse, on ne peut pas inverser la population d'un système à deux niveaux en l'éclairant. Pour une intensité très grande ($\Omega_1 \to \infty$), on obtient seulement $p_a \simeq p_b \simeq 1/2$ : le milieu devient transparent. À résonance, l'éq. (2.23) s'écrit

$$p_a - p_b = \frac{1}{1+2\Omega_1^2/\Gamma^2} = \frac{1}{1+I/I_{\mathrm{sat}}}, \tag{2.24}$$

où l'on a défini l'intensité de saturation $I_{\mathrm{sat}}$ par $I/I_{\mathrm{sat}} = 2\Omega_1^2/\Gamma^2$. On obtient ainsi une susceptibilité non linéaire,

$$\chi = \frac{\chi_{\mathrm{lin}}}{1+I/I_{\mathrm{sat}}}, \tag{2.25}$$

où $\chi_{\mathrm{lin}}$ est la susceptibilité du modèle classique. L'absorption diminue lorsque l'intensité dépasse l'intensité de saturation.

## 2.4 Mécanismes de pompage et zoologie des lasers

Puisqu'il est impossible d'inverser la population d'un système à deux niveaux par éclairement, l'inversion de population doit être obtenue en faisant intervenir d'autres niveaux d'énergie. Nous décrivons ici quelques exemples importants.

### 2.4.1 Laser à cristal dopé

Le laser Nd:YAG est un exemple typique de laser à cristal dopé. Le milieu amplificateur est une matrice cristalline transparente, le grenat d'yttrium-aluminium $Y_3Al_5O_{12}$ (YAG), dans laquelle un dopant, le néodyme, remplace une partie des ions yttrium (typiquement 1 %). Les ions $Nd^{3+}$ se comportent comme des atomes isolés : leurs niveaux d'énergie sont modifiés par la matrice cristalline, mais gardent un sens. Le pompage est réalisé sur des bandes d'absorption situées autour de 730–760 nm et 790–820 nm (en pratique, par des diodes laser à 808 nm). Les ions se désexcitent rapidement vers le niveau $^4F_{3/2}$, de longue durée de vie, et la transition laser a lieu vers le niveau $^4I_{11/2}$, à la longueur d'onde de 1064 nm.

**Modèle à quatre niveaux.** On modélise ce système par quatre niveaux, représentés sur la figure 3b : le fondamental $f$, le niveau $e$ peuplé par le pompage (avec un taux $w$), le niveau haut de la transition laser $b$ et le niveau bas $a$. Les désexcitations $e \to b$ et $a \to f$ sont rapides (temps caractéristiques $\tau_e$ et $\tau_a$), tandis que le niveau $b$ a une longue durée de vie $\tau_b$. Les populations obéissent aux équations

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N_e}{\mathrm{d}t} = w(N_f - N_e) - \dfrac{N_e}{\tau_e}, \\ \dfrac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}t} = \dfrac{N_e}{\tau_e} - \dfrac{N_b}{\tau_b}, \\ \dfrac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}t} = \dfrac{N_b}{\tau_b} - \dfrac{N_a}{\tau_a}, \\ N = N_a + N_b + N_e + N_f. \end{cases} \tag{2.26}$$

En régime permanent, on obtient

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{\tau_b}{\tau_a} \gg 1, \qquad \frac{N_e}{N_b} = \frac{\tau_e}{\tau_b} \ll 1, \qquad w(N_f - N_e) = \frac{N_e}{\tau_e}. \tag{2.27}$$

Il y a donc inversion de population sur la transition laser $b \to a$. Les deux populations importantes sont $N_b$ et $N_f$, et l'inversion de population relative vaut

$$\frac{N_b - N_a}{N} \simeq \frac{N_b}{N_b + N_f}. \tag{2.28}$$

Avec $wN_f \simeq N_e/\tau_e = N_b/\tau_b$, on obtient

$$\frac{N_b - N_a}{N} \simeq \frac{w\tau_b}{1 + w\tau_b}. \tag{2.29}$$

Le gain $g$ est proportionnel à cette inversion ; il est clairement positif. Une durée de vie $\tau_b$ longue permet d'obtenir une inversion importante avec un taux de pompage modeste.

**Saturation du gain.** Nous avons négligé l'effet de la lumière laser sur les populations. Comme pour l'atome à deux niveaux, on peut montrer que l'émission stimulée réduit l'inversion de population lorsque l'intensité devient importante, avec un facteur de la forme $[(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4]/[(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4 + \Omega_1^2]$. On obtient un gain saturé de la forme

$$g = \frac{g_0}{1 + I/I_1}, \tag{2.30}$$

où $g_0$ est le gain petit signal, proportionnel au taux de pompage, et $I_1$ une intensité de saturation.

### 2.4.2 Lasers à fibre

Dans un laser à fibre, le milieu amplificateur est le cœur d'une fibre optique, dopé par une terre rare (erbium à 1,55 $\mu$m, ytterbium autour de 1,03 $\mu$m, etc.). Le cœur dopé guide la lumière laser sur un mode transverse unique. La lumière de pompage, issue de diodes laser de forte puissance mais de mauvaise qualité spatiale, est injectée dans une gaine qui entoure le cœur et qui forme un guide d'onde multimode ; elle est progressivement absorbée par les ions dopants lorsqu'elle traverse le cœur. La grande longueur d'interaction (plusieurs mètres) et l'excellente dissipation thermique permettent d'atteindre de très fortes puissances (jusqu'au kilowatt) avec un faisceau de grande qualité.

### 2.4.3 Diode laser

La diode laser est aujourd'hui le laser le plus répandu. Son milieu amplificateur est une jonction entre deux semi-conducteurs.

**Qu'est-ce qu'un semi-conducteur ?** Considérons un cristal très pur de silicium. Les niveaux d'énergie des électrons s'organisent en bandes d'énergie permises, séparées par des bandes interdites. Les électrons remplissent les niveaux d'énergie en formant une mer de Fermi. Dans un semi-conducteur, le potentiel chimique se trouve dans une bande interdite, ou gap, d'énergie $\Delta$ : la bande inférieure (bande de valence) est pleine, et la bande supérieure (bande de conduction) est vide. Pour le silicium, $\Delta = 1{,}11\,\text{eV}$, bien plus grand que l'énergie thermique à température ambiante ($k_\text{B}T \simeq 25\,\text{meV}$), et le cristal pur est isolant.

**Dopage.** On peut doper le cristal par un élément apportant des électrons supplémentaires ou au contraire en retirant :

- Un dopant du groupe III (par exemple le bore) prend un électron à la bande de valence, où il laisse une lacune appelée trou. Le gaz d'électrons de la bande de valence se comporte alors comme un gaz de trous dilués : le semi-conducteur est dit de type $p$.
- Un dopant du groupe V (par exemple le phosphore) apporte un électron supplémentaire, qui occupe la bande de conduction : le semi-conducteur est dit de type $n$.

**Jonction $p$-$n$.** On accole un semi-conducteur de type $p$ et un semi-conducteur de type $n$. Les trous diffusent vers la région $n$, et les électrons vers la région $p$. Cette diffusion crée une zone de charge d'espace au niveau de la jonction, et un champ électrique statique qui compense la diffusion. En appliquant une tension dans le sens direct (anode du côté $p$, cathode du côté $n$), on injecte en permanence des trous dans la région $p$ et des électrons dans la région $n$. Au centre de la jonction, électrons et trous sont présents dans la même région (figure 4) : il y a des électrons dans la bande de conduction et des trous dans la bande de valence, c'est-à-dire une inversion de population. La recombinaison d'un électron et d'un trou s'accompagne de l'émission d'un photon d'énergie voisine de $\Delta$. Le courant entretient l'inversion, et donc l'émission de lumière.

Le silicium, dont le gap est indirect, émet très peu de lumière, et n'est pas utilisé pour fabriquer des lasers. On utilise des semi-conducteurs à gap direct, comme l'arséniure

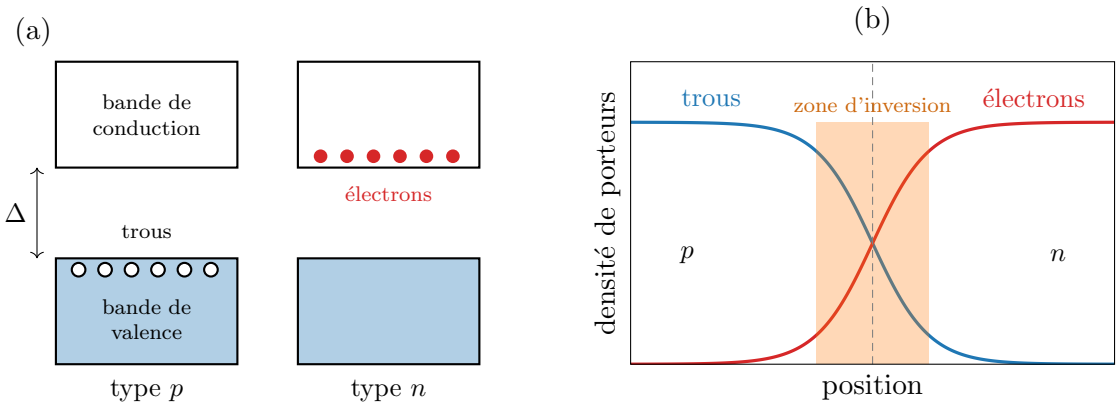



**Figure 4** – (a) Remplissage des bandes d'un semi-conducteur dopé $p$ (trous au sommet de la bande de valence) et dopé $n$ (électrons au bas de la bande de conduction). (b) Densités de trous et d'électrons dans une jonction $p$-$n$ polarisée en direct. Au centre de la jonction, électrons et trous coexistent : il y a inversion de population.

de gallium GaAs ($\Delta = 1{,}42\,\text{eV}$, soit une émission vers 870 nm) et ses alliages, ou le nitrure de gallium GaN pour les diodes bleues.

# 3 Modes transverses d'un faisceau laser

Nous avons vu au chapitre d'introduction que le profil transverse du champ doit se reproduire à l'identique après un tour de cavité. Dans ce chapitre, nous déterminons les solutions des équations de Maxwell qui décrivent un faisceau de taille finie, les faisceaux gaussiens. Nous montrons ensuite qu'une cavité formée de miroirs courbes possède de tels modes stables, puis nous décrivons la propagation d'un faisceau gaussien à travers un système optique à l'aide des matrices ABCD.

## 3.1 Modes gaussiens du champ électromagnétique

### 3.1.1 Approximation de l'enveloppe lentement variable

Dans le vide, le champ électrique obéit à l'équation d'onde

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{3.1}$$

Ses solutions les plus simples sont les ondes planes $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, avec $\omega = ck$, soit pour une propagation selon $z$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$. Une onde plane a cependant une intensité uniforme et une extension spatiale infinie, ce qui ne décrit pas un faisceau laser.

On cherche donc une onde de la forme

$$\mathbf{E} = A(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\,\boldsymbol{\epsilon}, \tag{3.2}$$

où l'enveloppe $A(\mathbf{r})$ varie lentement à l'échelle de la longueur d'onde. On a alors

$$\Delta\mathbf{E} = \left[\Delta_\perp A + \partial_z^2 A + 2\mathrm{i}k\,\partial_z A - k^2 A\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\,\boldsymbol{\epsilon}, \tag{3.3}$$

où $\Delta_\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2$ est le laplacien transverse. L'enveloppe variant lentement, $|\partial_z^2 A| \ll k|\partial_z A|$, et l'équation d'onde se réduit à l'équation paraxiale

$$2\mathrm{i}k\,\partial_z A + \Delta_\perp A = 0. \tag{3.4}$$

Cette équation n'est autre que l'équation de Schrödinger d'une particule libre à deux dimensions, la coordonnée $z$ jouant le rôle du temps.

### 3.1.2 Divergence d'un faisceau

L'analogie avec l'équation de Schrödinger explique la divergence nécessaire d'un faisceau de taille finie. L'inégalité de Heisenberg $\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$ se traduit, avec $p_x = \hbar k\theta$ où $\theta$ est l'angle de propagation par rapport à l'axe $z$, par

$$\Delta x\,\Delta\theta \geq \frac{\lambda}{4\pi}, \tag{3.5}$$

où l'on définit la taille du faisceau dans le plan $z = 0$ et sa divergence angulaire par

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\int x^2 I(x,y,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int I\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}}, \qquad \Delta\theta = \lim_{z\to\infty}\frac{\Delta x(z)}{z}. \tag{3.6}$$

Un faisceau ne peut donc pas être à la fois étroit et parallèle. Un résultat de transformée de Fourier indique que l'égalité dans l'éq. (3.5) est atteinte pour un profil gaussien. C'est la forme que nous recherchons maintenant.

### 3.1.3 Solution gaussienne

On cherche une solution de l'éq. (3.4) à symétrie de révolution, de la forme

$$A(r,z) = u(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr^2/2q(z)}, \tag{3.7}$$

où $q(z)$ est un nombre complexe appelé paramètre confocal. Avec $\Delta_\perp f = \frac{1}{r}\partial_r f + \partial_r^2 f$, on a

$$\partial_z A = \left(u' - \frac{\mathrm{i}kr^2q'}{2q^2}\,u\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr^2/2q}, \qquad \Delta_\perp A = \left(\frac{2\mathrm{i}k}{q} - \frac{k^2r^2}{q^2}\right)u\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr^2/2q}, \tag{3.8}$$

et l'équation paraxiale donne, en regroupant les termes,

$$\left(2\mathrm{i}k\,u' + \frac{2\mathrm{i}k}{q}u\right) + \frac{k^2r^2}{q^2}\,(q'-1)\,u = 0. \tag{3.9}$$

Pour annuler les termes en $r^2$, il faut $q' = 1$, soit

$$q(z) = z - z_0 - \mathrm{i}z_\mathrm{R}, \tag{3.10}$$

où $z_0$ est la position du point de focalisation du faisceau, et $z_\mathrm{R} > 0$ est appelé la longueur de Rayleigh. On trouve de même $u' + u/q = 0$, qui a pour solution $u = C/q$. En choisissant $C = -\mathrm{i}z_\mathrm{R}A_0$, on obtient

$$A(r,z) = \frac{A_0}{1 + \mathrm{i}(z-z_0)/z_\mathrm{R}}\,\exp\left[\frac{\mathrm{i}kr^2}{2(z-z_0-\mathrm{i}z_\mathrm{R})}\right]. \tag{3.11}$$

**Forme module-argument.** On décompose cette expression en module et argument :

$$A(r,z) = \frac{A_0}{\sqrt{1+(z-z_0)^2/z_\mathrm{R}^2}}\,\exp\left[-\frac{k}{2z_\mathrm{R}}\,\frac{r^2}{1+(z-z_0)^2/z_\mathrm{R}^2}\right] \times \exp \mathrm{i}\left[\frac{kr^2}{2\,(z-z_0+z_\mathrm{R}^2/(z-z_0))} - \varphi(z)\right], \tag{3.12}$$

où la phase $\varphi(z)$ est définie par

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(z)} = \frac{1+\mathrm{i}(z-z_0)/z_\mathrm{R}}{\sqrt{1+(z-z_0)^2/z_\mathrm{R}^2}}, \qquad \text{soit} \qquad \tan\varphi = \frac{z-z_0}{z_\mathrm{R}}. \tag{3.13}$$

On définit le col (ou *waist*) $w_0$ du faisceau, son rayon $w(z)$ et le rayon de courbure $R(z)$ de ses fronts d'onde par

$$z_\mathrm{R} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{k w_0^2}{2}, \qquad w(z) = w_0\sqrt{1+\frac{(z-z_0)^2}{z_\mathrm{R}^2}}, \qquad R(z) = z - z_0 + \frac{z_\mathrm{R}^2}{z-z_0}. \tag{3.14}$$

La phase $\varphi(z)$ est appelée phase de Gouy. On obtient finalement l'expression simplifiée

$$A(r,z) = A_0\,\frac{w_0}{w(z)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(z)}\,\mathrm{e}^{-r^2/w^2(z)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr^2/2R(z)}. \tag{3.15}$$

Le paramètre confocal est relié au rayon du faisceau et au rayon de courbure par

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + \mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w^2(z)}. \tag{3.16}$$

### 3.1.4 Propriétés du faisceau gaussien

**Profil d'intensité.** L'intensité du faisceau vaut

$$I(r,z) = A_0^2\left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \mathrm{e}^{-2r^2/w^2(z)}. \tag{3.17}$$

Son profil transverse est gaussien ; $w(z)$ est le rayon pour lequel l'intensité est divisée par $\mathrm{e}^2$ par rapport à sa valeur sur l'axe. La puissance totale

$$P_\mathrm{tot} = \int_0^\infty 2\pi r\,\mathrm{d}r\,I(r,z) = \frac{\pi}{2}A_0^2 w_0^2 \tag{3.18}$$

est indépendante de $z$, comme l'impose la conservation de l'énergie.

**Divergence.** Loin du col, pour $|z-z_0| \gg z_\mathrm{R}$, le rayon du faisceau croît linéairement,

$$w(z) \simeq w_0\,\frac{|z-z_0|}{z_\mathrm{R}} = \theta\,|z-z_0|, \qquad \theta = \frac{w_0}{z_\mathrm{R}} = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{3.19}$$

On a donc $w_0\theta = \lambda/\pi$. Avec $\Delta x = w_0/2$ et $\Delta\theta = \theta/2$ pour un profil gaussien, on vérifie que le faisceau gaussien réalise l'égalité dans l'inégalité de Heisenberg (3.5). La longueur de Rayleigh est la distance sur laquelle le faisceau reste approximativement parallèle (son rayon augmente d'un facteur $\sqrt{2}$ entre $z_0$ et $z_0 + z_\mathrm{R}$).

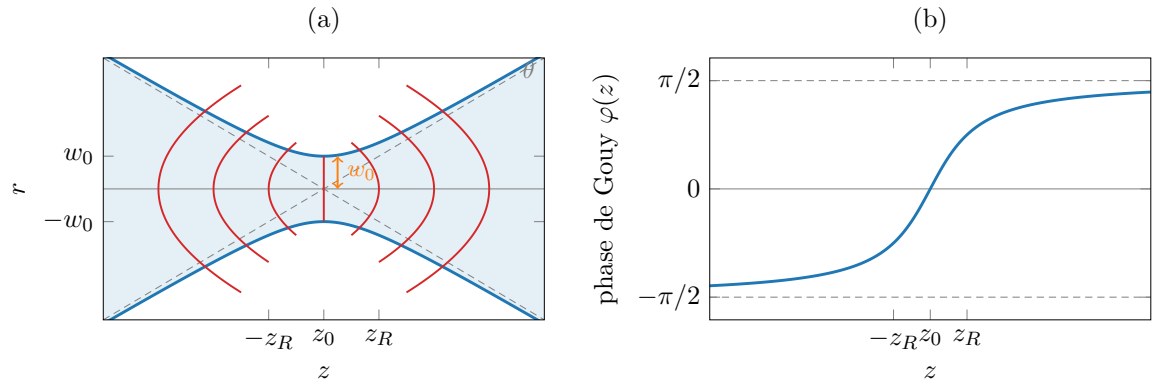



**Figure 5** – (a) Enveloppe $\pm w(z)$ d'un faisceau gaussien (bleu), asymptotes $\pm\theta(z - z_0)$ (pointillés) et fronts d'onde (rouge), plans au col et sphériques loin du col. (b) Phase de Gouy en fonction de $z$.

**Interprétation de $R(z)$.** Les surfaces de phase constante vérifient, en oubliant la phase de Gouy qui varie lentement,

$$kz + \frac{kr^2}{2R(z)} = \text{cste}, \qquad \text{soit} \qquad z(r) \simeq z_1 - \frac{r^2}{2R_1} \tag{3.20}$$

au voisinage de l'axe, où $z_1$ est la position du front d'onde sur l'axe et $R_1 = R(z_1)$. La courbure de cette courbe en $r = 0$ vaut $z''/(1 + z'^2)^{3/2} = -1/R_1$ : $R(z)$ est bien le rayon de courbure des fronts d'onde. Au col, les fronts d'onde sont plans ($R \to \infty$) ; loin du col, $R(z) \simeq z - z_0$ et l'onde est localement sphérique, centrée sur le col (figure 5a).

**Phase de Gouy.** La phase de Gouy $\varphi(z)$ varie de $-\pi/2$ à $+\pi/2$ lorsque l'on traverse le col (figure 5b). Elle correspond à un léger retard de phase longitudinal par rapport à une onde plane.

**Applications numériques.** Pour une longueur d'onde typique $\lambda = 0{,}5\,\mu$m (vert) :
- un col $w_0 = 1\,$mm donne $z_\mathrm{R} = \pi w_0^2/\lambda \simeq 6\,$m et une divergence $\theta \simeq 0{,}16\,$mrad ;
- un col $w_0 = 1\,\mu$m donne $z_\mathrm{R} \simeq 6\,\mu$m : un faisceau fortement focalisé diverge très rapidement.

**Mesure de la distance Terre-Lune.** Des réseaux de coins de cube (de l'ordre de 10 cm de côté) ont été déposés sur la Lune par les missions Apollo. On mesure la distance Terre-Lune, $d \simeq 384\,000\,$km, par la durée de l'aller-retour d'une impulsion laser, $\tau = 2d/c \simeq 2{,}6\,$s. Considérons une impulsion de 3 J et de 4 ns, à $\lambda = 694\,$nm (laser à rubis). Sans précaution, un faisceau de col $w_0 = 1\,$mm a une divergence $\theta = \lambda/\pi w_0 \simeq 0{,}2\,$mrad, et la tache sur la Lune aurait un rayon $w(d) \simeq \theta d \simeq 85\,$km. On élargit donc le faisceau avec un télescope : avec $w_0 = 0{,}5\,$m, on obtient $\theta \simeq 4 \times 10^{-7}\,$rad et $w(d) \simeq 170\,$m. En pratique, la turbulence atmosphérique élargit la tache à quelques kilomètres. Seule une infime fraction des photons émis revient donc vers la Terre, ce qui rend la mesure délicate.

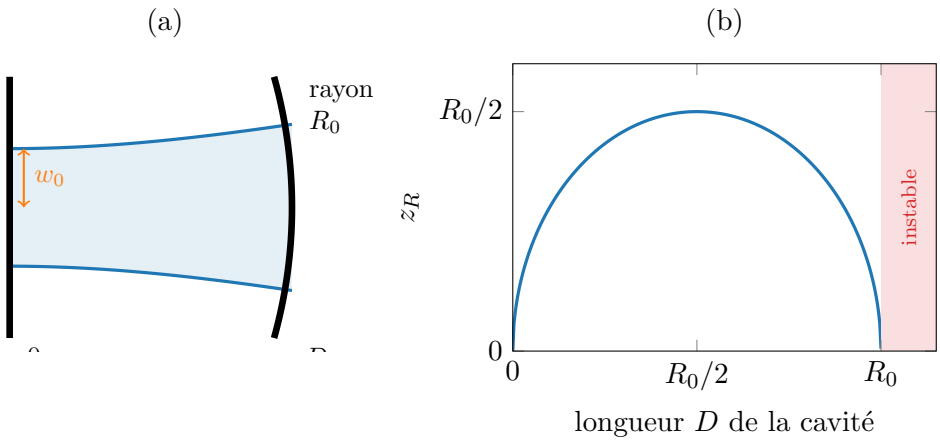



**Figure 6** – (a) Mode gaussien d'une cavité plan-concave : les fronts d'onde coïncident avec la surface des miroirs. (b) Longueur de Rayleigh du mode en fonction de la longueur $D$ de la cavité. Elle est maximale pour $D = R_0/2$, et il n'existe pas de mode stable pour $D > R_0$.

## 3.2 Mode optique dans une cavité laser

Il est clair qu'un faisceau de taille finie ne peut pas exister de manière stable dans une cavité formée de deux miroirs plans : il diverge à chaque aller-retour, et finit par sortir de la cavité. On considère donc une cavité plan-concave, formée d'un miroir plan en $z = 0$ et d'un miroir sphérique concave de rayon de courbure $R_0$ en $z = D$ (figure 6a).

Un faisceau gaussien est un mode stable de la cavité si ses fronts d'onde coïncident avec la surface des miroirs : il se réfléchit alors sur lui-même. Il faut donc que le col soit sur le miroir plan, et que le rayon de courbure du front d'onde soit égal à celui du miroir concave :

$$z_0 = 0, \qquad R(D) = D + \frac{z_\mathrm{R}^2}{D} = R_0. \tag{3.21}$$

On en déduit

$$z_\mathrm{R} = \sqrt{D(R_0 - D)}, \qquad w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_\mathrm{R}}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{k}}\,[D(R_0 - D)]^{1/4}. \tag{3.22}$$

Il faut donc $D < R_0$ : une cavité plus longue que le rayon de courbure du miroir n'a pas de mode stable (figure 6b).

(∗) Plus généralement, une cavité formée de deux miroirs de rayons de courbure $R_1$ et $R_2$, séparés de $D$, possède un mode gaussien stable si

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1, \qquad g_i = 1 - \frac{D}{R_i}. \tag{3.23}$$

La cavité plan-concave correspond à $g_1 = 1$, $g_2 = 1 - D/R_0$. La cavité plan-plan ($g_1 g_2 = 1$) est à la limite de la stabilité.

## 3.3 Propagation d'un faisceau gaussien : matrices ABCD

On considère un faisceau gaussien qui traverse un système de lentilles. Comment prédire les caractéristiques du faisceau après la traversée ? Un faisceau gaussien est

entièrement caractérisé par son paramètre confocal

$$q(z) = z - z_0 - \mathrm{i}z_\mathrm{R}, \tag{3.24}$$

dont la partie réelle donne la distance au col et la partie imaginaire la longueur de Rayleigh. On suppose connu le paramètre $q(z_1)$ en une position $z_1$, et on cherche $q(z_2)$.

**Propagation libre.** D'après l'expression de $q(z)$, on a simplement

$$q(z_2) = q(z_1) + z_2 - z_1. \tag{3.25}$$

**Traversée d'une lentille mince.** Une lentille mince de focale $f$, placée en $z_0'$, se comporte comme une lame d'épaisseur variable qui imprime au champ un déphasage dépendant de la distance à l'axe. Pour une lentille de rayons de courbure $R_1$ et $R_2$ et d'indice $n$, de focale $1/f = (n-1)(1/R_1 - 1/R_2)$, ce déphasage vaut

$$\varphi_\mathrm{lentille}(r) = -\frac{kr^2}{2f} \tag{3.26}$$

à une constante près, avec $f > 0$ pour une lentille convergente. Le champ juste après la lentille vaut donc

$$\mathcal{E}(r, z_0'^+) = \frac{A}{q(z_0'^-)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr^2/2q(z_0'^-)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr^2/2f}, \tag{3.27}$$

ce qui est encore un faisceau gaussien, de paramètre confocal

$$\frac{1}{q(z_0'^+)} = \frac{1}{q(z_0'^-)} - \frac{1}{f}. \tag{3.28}$$

Cette relation ressemble à la relation de conjugaison de l'optique géométrique.

**Matrices ABCD.** Dans les deux cas, on peut écrire

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}, \tag{3.29}$$

avec les matrices

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_\mathrm{propagation} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_\mathrm{lentille} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Ce sont les mêmes matrices que celles qui décrivent la propagation d'un rayon lumineux en optique géométrique paraxiale.

Si deux éléments, décrits par les matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, sont traversés successivement, on obtient

$$q_3 = \frac{A'q_2 + B'}{C'q_2 + D'} = \frac{A'\frac{Aq_1+B}{Cq_1+D} + B'}{C'\frac{Aq_1+B}{Cq_1+D} + D'} = \frac{(A'A + B'C)q_1 + A'B + B'D}{(C'A + D'C)q_1 + C'B + D'D} \equiv \frac{A''q_1 + B''}{C''q_1 + D''}, \tag{3.31}$$

avec

$$\begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

La propagation d'un faisceau gaussien à travers un système optique revient donc à effectuer le produit des matrices ABCD de ses éléments, dans l'ordre inverse de leur traversée.

**Exemple : focalisation d'un faisceau.** Un faisceau collimaté de rayon $W$ (col sur la lentille, $z_\mathrm{R} \gg f$) traverse une lentille convergente de focale $f$. On trouve que le faisceau se focalise au voisinage du foyer, avec un col

$$w_f \simeq \frac{\lambda f}{\pi W}. \tag{3.33}$$

Pour $\lambda = 532\,\mathrm{nm}$, $f = 10\,\mathrm{cm}$ et $W = 2\,\mathrm{mm}$, on obtient $w_f \simeq 8\,\mu\mathrm{m}$. Une puissance de $1\,\mathrm{W}$ donne alors une intensité au centre $2P/\pi w_f^2 \simeq 1\,\mathrm{MW/cm^2}$. Cette capacité à concentrer l'énergie lumineuse est à l'origine des applications du laser en optique non linéaire (chapitre 6).

# 4 Laser en régime stationnaire

Nous disposons maintenant des deux briques de base d'un laser : un milieu amplificateur, dont le gain sature avec l'intensité, et une cavité optique, qui possède des modes transverses stables. Dans ce chapitre, nous étudions d'abord les modes longitudinaux d'une cavité vide, puis les conditions d'oscillation d'un laser et ses propriétés en régime stationnaire. Nous étudions ensuite le comportement d'un laser en présence d'un champ incident, puis la question de la compétition entre plusieurs modes, qui détermine le spectre du laser.

## 4.1 Modes propres longitudinaux d'une cavité Fabry-Perot

### 4.1.1 Transmission d'une cavité

On considère deux miroirs plans, distants de $L_0$, formant une cavité Fabry-Perot. Les miroirs ont des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude $r_1, t_1$ et $r_2, t_2$ (réels), avec $r_i^2 + t_i^2 = 1$ pour des miroirs sans pertes. On note $R_i = r_i^2$ et $T_i = t_i^2$ les coefficients en intensité. Une onde incidente $E_i$ éclaire la cavité ; on note $E_c$ et $E_c'$ les champs intracavité se propageant vers la droite et vers la gauche au niveau du premier miroir, $E_r$ le champ réfléchi et $E_t$ le champ transmis. Quel est le champ intracavité ?

Au niveau du premier miroir, on a

$$\begin{cases} E_c = t_1 E_i - r_1 E_c', \\ E_r = r_1 E_i + t_1 E_c'. \end{cases} \tag{4.1}$$

Pourquoi le signe $-$ ? On a écrit

$$\begin{pmatrix} E_c \\ E_r \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} E_i \\ E_c' \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} t_1 & -r_1 \\ r_1 & t_1 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

et la matrice $U$ doit conserver l'énergie, c'est-à-dire être unitaire. Si l'on écrit plus généralement $U = \begin{pmatrix} t_1 & r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \\ r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} & t_1 \end{pmatrix}$, la condition $U^\dagger U = 1$ impose $t_1^2 + r_1^2 = 1$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_2} = 0$ ; le choix $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = \pi$ conduit au signe $-$.

De même, au niveau du second miroir,

$$E_t = t_2 E_c \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_0}, \qquad E_c' = -r_2 E_c \, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kL_0}. \tag{4.3}$$

On pose $L = 2L_0$, la longueur d'un aller-retour dans la cavité. On obtient

$$\frac{E_c}{E_i} = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}}, \qquad \frac{E_t}{E_i} = \frac{t_1 t_2 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_0}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}}. \tag{4.4}$$

Le coefficient de transmission en intensité vaut donc

$$T = \left|\frac{E_t}{E_i}\right|^2 = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}\cos kL}. \tag{4.5}$$

Il est maximal lorsque $kL = 2\pi p$, avec $p$ entier, et vaut alors

$$T_{\max} = \frac{T_1 T_2}{\left(1 - \sqrt{R_1 R_2}\right)^2}. \tag{4.6}$$

Pour une cavité symétrique ($R_1 = R_2$) sans pertes, $T_{\max} = 1$ : la cavité est parfaitement transparente à résonance, même si chacun des miroirs est très réfléchissant.

### 4.1.2 Finesse

On développe la transmission autour des résonances, dans le cas où les coefficients de réflexion sont élevés. Le dénominateur s'écrit

$$1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}\cos kL = \left(1 - \sqrt{R_1 R_2}\right)^2 \left(1 + m \sin^2 \frac{kL}{2}\right), \tag{4.7}$$

avec

$$m = \frac{4\sqrt{R_1 R_2}}{\left(1 - \sqrt{R_1 R_2}\right)^2}. \tag{4.8}$$

La largeur des résonances est définie par la condition que la transmission soit égale à la moitié de son maximum, soit $m \sin^2(kL/2) = 1$. Pour $m \gg 1$, cela donne

$$\frac{kL}{2} \simeq p\pi \pm \frac{1}{\sqrt{m}}. \tag{4.9}$$

On définit alors la finesse de la cavité

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{m}}{2}, \tag{4.10}$$

qui est le rapport entre l'intervalle de fréquence entre deux pics, ou intervalle spectral libre $c/L$, et la largeur à mi-hauteur des résonances (figure 7).

### 4.1.3 Champ à l'intérieur de la cavité

L'intensité intracavité vaut

$$\left|\frac{E_c}{E_i}\right|^2 = \frac{4T_1}{(T_1 + T_2)^2} \, \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{F}^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{kL}{2}}, \tag{4.11}$$

où l'on a supposé $T_1, T_2 \ll 1$, auquel cas

$$\mathcal{F} \simeq \frac{2\pi}{T_1 + T_2}. \tag{4.12}$$

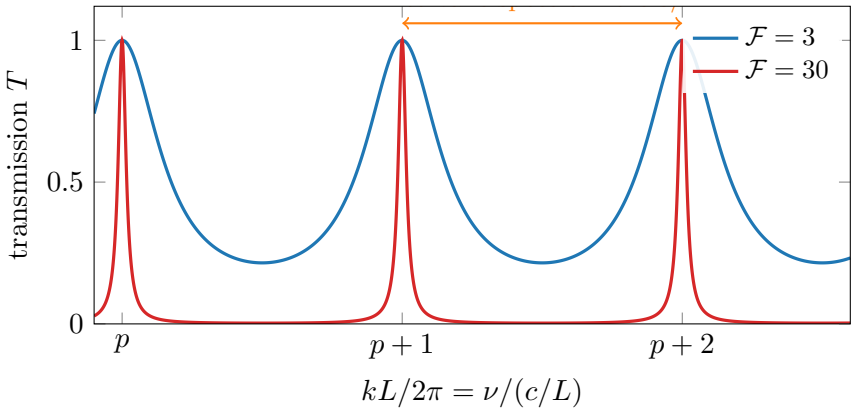



**Figure 7** – Transmission d'une cavité Fabry-Perot symétrique sans pertes en fonction de la fréquence, pour deux valeurs de la finesse. Les résonances sont séparées de l'intervalle spectral libre $c/L$, et leur largeur vaut $c/L\mathcal{F}$.

À résonance, on obtient

$$\left|\frac{E_c}{E_i}\right|^2 \simeq \frac{4T_1}{(T_1+T_2)^2} \gg 1 \qquad \text{si } T_1, T_2 \ll 1. \tag{4.13}$$

L'intensité dans la cavité est très supérieure à l'intensité incidente : la lumière effectue en moyenne de l'ordre de $\mathcal{F}/\pi$ allers-retours avant de sortir.

**Exemple.** Une cavité linéaire de longueur $L_0 = 5\,\text{cm}$, avec $T_1 = T_2 \simeq 1\,\%$, a une finesse $\mathcal{F} \simeq 300$. Son intervalle spectral libre vaut $c/L = 3\,\text{GHz}$, et la largeur de ses résonances 10 MHz. Son facteur de qualité, rapport entre la fréquence optique et la largeur des résonances, vaut $Q = \mathcal{F}\,L/\lambda \sim 6 \times 10^7$.

## 4.2 Condition d'oscillation d'un laser stationnaire

On considère maintenant une cavité en anneau de longueur $L$, contenant un milieu amplificateur de longueur $L_A$ et d'indice $n$, de gain en intensité par unité de longueur $g$ donné par l'éq. (2.30). Le miroir de sortie a un coefficient de réflexion $R$ en intensité, et on note $A$ les autres pertes sur un tour. Un champ $E$ entrant dans l'amplificateur en ressort avec l'amplitude

$$E' = E\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega L_A/c}\,\mathrm{e}^{gL_A/2}, \tag{4.14}$$

puis revient à l'entrée de l'amplificateur après un tour avec l'amplitude

$$E'' = E'\sqrt{R\,\mathrm{e}^{-A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(L-L_A)/c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}, \tag{4.15}$$

où $\varphi_0$ est le déphasage dû aux réflexions sur les miroirs. En régime stationnaire, $E'' = E$, et deux cas sont possibles :

— $E = 0$ : le laser est éteint ;

— $E \neq 0$, et alors

$$\sqrt{R\,\mathrm{e}^{-A}}\,\mathrm{e}^{gL_A/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\{\omega[(n-1)L_A+L]/c+\varphi_0\}} = 1. \tag{4.16}$$

### 4.2.1 Condition sur l'amplitude

Le module de l'équation précédente donne

$$R\,\mathrm{e}^{-A}\,\mathrm{e}^{gL_A} = 1, \qquad \text{soit} \qquad gL_A = \mathcal{P}, \qquad \mathcal{P} = A + \ln\frac{1}{R} \simeq A + T. \tag{4.17}$$

Le gain doit compenser exactement les pertes $\mathcal{P}$. Avec le gain saturé $g = g_0/(1 + I/I_s)$, on obtient l'intensité intracavité

$$I = I_s\left(\frac{g_0 L_A}{\mathcal{P}} - 1\right) = I_s\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{\text{seuil}}} - 1\right), \tag{4.18}$$

où l'on a utilisé que le gain petit signal $g_0$ est proportionnel au taux de pompage $\Lambda$. Le laser ne fonctionne qu'au-dessus d'un seuil de pompage $\Lambda_{\text{seuil}}$, pour lequel le gain petit signal compense les pertes. Au-delà, l'intensité croît linéairement avec le pompage (figure 8a). On remarque que, au-dessus du seuil, le gain reste bloqué à la valeur $g = \mathcal{P}/L_A$, quel que soit le pompage.

**Comment optimiser le coefficient de réflexion du miroir de sortie ?** La puissance de sortie vaut $P_{\text{out}} = TP_{\text{in}}$, où $P_{\text{in}}$ est la puissance intracavité. Si $T$ est trop petit, la lumière est piégée dans la cavité et l'essentiel de la puissance est perdu dans les pertes $A$. Si $T$ est trop grand, les pertes sont trop importantes et le laser passe sous le seuil, pour $T > T_{\max} = g_0 L_A - A$. Entre ces deux limites, la puissance de sortie

$$P_{\text{out}} \propto T\left(\frac{g_0 L_A}{A + T} - 1\right) \tag{4.19}$$

passe par un maximum (figure 8b), pour

$$T_{\text{opt}} = \sqrt{g_0 L_A A} - A. \tag{4.20}$$

### 4.2.2 Condition sur la phase

L'argument de la condition d'oscillation donne

$$\frac{\omega}{c}\left[(n(\omega, I) - 1)L_A + L\right] + \varphi_0 = 2\pi p, \qquad p \in \mathbb{Z}. \tag{4.21}$$

Comme pour la cavité vide, seules des fréquences discrètes, séparées d'environ $c/L$, peuvent osciller. Parmi elles, seules celles pour lesquelles le gain petit signal $g_0(\omega)L_A$ dépasse les pertes $\mathcal{P}$ sont susceptibles d'osciller (figure 8c). Comment la lumière se répartit-elle entre ces fréquences autorisées ? Nous répondrons à cette question au paragraphe 4.4.

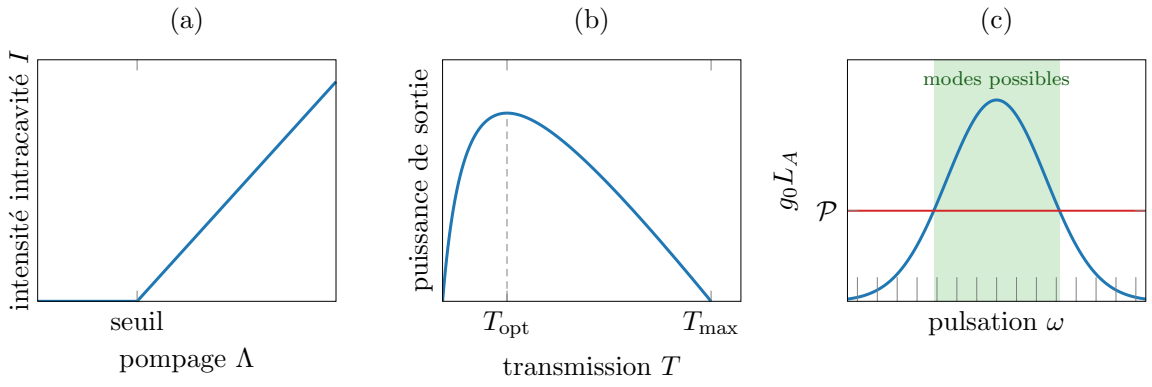



**Figure 8** – (a) Intensité intracavité en fonction du pompage : le laser s'allume au-delà d'un seuil. (b) Puissance de sortie en fonction de la transmission $T$ du miroir de sortie, pour $g_0 L_A = 0{,}1$ et $A = 0{,}01$. (c) Gain petit signal en fonction de la pulsation, comparé aux pertes $\mathcal{P}$ : seuls les modes longitudinaux de la cavité (traits verticaux) pour lesquels le gain dépasse les pertes peuvent osciller.

## 4.3 Fonctionnement en présence d'un champ incident

On injecte maintenant un champ $E_{\text{in}}$ dans la cavité à travers le miroir de sortie, de coefficients $\sqrt{R}$ et $\sqrt{T}$ en amplitude. On note $\Phi$ le déphasage sur un tour et $E_{\text{cav}}$ le champ intracavité juste après le miroir. Les champs vérifient

$$\begin{cases} E_{\text{out}} = -\sqrt{R}\, E_{\text{in}} + \sqrt{T}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi + (gL_A - A)/2}\, E_{\text{cav}}, \\ E_{\text{cav}} = \sqrt{R}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi + (gL_A - A)/2}\, E_{\text{cav}} + \sqrt{T}\, E_{\text{in}}, \end{cases} \tag{4.22}$$

d'où

$$E_{\text{cav}} = \frac{\sqrt{T}}{1 - \sqrt{R}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi + (gL_A - A)/2}}\, E_{\text{in}}, \tag{4.23}$$

$$E_{\text{out}} = \frac{-\sqrt{R} + (R+T)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi + (gL_A - A)/2}}{1 - \sqrt{R}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi + (gL_A - A)/2}}\, E_{\text{in}}. \tag{4.24}$$

On suppose que la cavité a une grande finesse ($T \ll 1$, soit $\sqrt{R} \simeq 1 - T/2$), de faibles pertes ($A \ll 1$), un faible gain ($gL_A \ll 1$), et que le champ incident est quasi résonnant avec la cavité : $\Phi = 2\pi m + \delta$, avec $|\delta| \ll 1$. En développant au premier ordre, on obtient

$$E_{\text{out}} = \frac{\mathrm{i}\delta + (gL_A - A + T)/2}{-\mathrm{i}\delta - (gL_A - A - T)/2}\, E_{\text{in}}. \tag{4.25}$$

### 4.3.1 Amplificateur optique

Le gain en intensité vaut

$$G_i = \left| \frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}} \right|^2 = \frac{\delta^2 + (gL_A - A + T)^2/4}{\delta^2 + (gL_A - A - T)^2/4}. \tag{4.26}$$

Pour $gL_A = A + T$, c'est-à-dire au seuil d'oscillation du laser, le gain est infini à résonance : on a un amplificateur parfait ! En dessous du seuil, la cavité contenant le milieu amplificateur se comporte comme un amplificateur régénératif, dont le gain est d'autant plus grand qu'on est proche du seuil.

### 4.3.2 Injection optique

À quoi ressemble le champ intracavité ? On écrit le champ incident $E_{\text{in}} = \sqrt{I_{\text{in}}}$ et le champ intracavité $E_{\text{cav}} = \sqrt{I}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$. L'expression de $E_{\text{cav}}$ donne

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\sqrt{I}\left(\frac{T+A-gL_A}{2} - \mathrm{i}\delta\right) = \sqrt{TI_{\text{in}}}, \tag{4.27}$$

soit

$$\begin{cases} (T+A-gL_A)\sqrt{I} = 2\sqrt{TI_{\text{in}}}\cos\psi, \\ \delta\sqrt{I} = \sqrt{TI_{\text{in}}}\sin\psi. \end{cases} \tag{4.28}$$

— Sans champ incident ($I_{\text{in}} = 0$), on peut avoir une intensité $I$ non nulle : c'est l'effet laser. Les deux équations sont satisfaites pour $g(I)L_A = T + A$, soit $I = I_0$ (intensité du laser libre), et $\delta = 0$. La phase $\psi$ est arbitraire.

— Si l'on injecte un faible champ incident, la phase $\psi$ du laser peut prendre une valeur bien fixée, à condition que

$$\delta^2 < \frac{TI_{\text{in}}}{I_0}. \tag{4.29}$$

Le laser est alors dit injecté : il oscille en phase avec le champ incident, à sa fréquence. Le laser est dit esclave, et le laser qui fournit le champ incident maître. Cette technique permet d'obtenir un laser de forte puissance ayant les propriétés spectrales (finesse spectrale, stabilité) d'un laser maître de faible puissance.

## 4.4 Compétition ou coexistence de modes ?

### 4.4.1 Modèle de deux modes en compétition

On considère le cas de deux modes longitudinaux, notés 1 et 2, qui partagent le même milieu amplificateur. Le gain de chaque mode est saturé par sa propre intensité et par celle de l'autre mode :

$$g_1 = \frac{g_{01}}{1 + \frac{I_1}{I_1^{\text{sat}}} + \frac{I_2}{I_{2\to1}^{\text{sat}}}}, \qquad g_2 = \frac{g_{02}}{1 + \frac{I_2}{I_2^{\text{sat}}} + \frac{I_1}{I_{1\to2}^{\text{sat}}}}. \tag{4.30}$$

On analyse l'effet de ces non-linéarités pour de faibles intensités. Au premier ordre en intensité, l'évolution des intensités s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = (\alpha_1 - \beta_1 I_1 - \theta_{12} I_2)\, I_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = (\alpha_2 - \beta_2 I_2 - \theta_{21} I_1)\, I_2, \end{cases} \tag{4.31}$$

où $\alpha_i$ est le gain net (gain moins pertes) du mode $i$, $\beta_i$ décrit l'autosaturation et $\theta_{ij}$ la saturation croisée. Les régimes stationnaires sont donnés par

$$(\alpha_1 - \beta_1 I_1 - \theta_{12} I_2 = 0 \quad \text{ou} \quad I_1 = 0) \quad \text{and} \quad (\alpha_2 - \beta_2 I_2 - \theta_{21} I_1 = 0 \quad \text{ou} \quad I_2 = 0)\,. \tag{4.32}$$

Dans le plan $(I_1, I_2)$, les deux premières conditions définissent deux droites $D_1$ et $D_2$ (figure 9).

### 4.4.2 Stabilité des régimes stationnaires

**Cas où les droites ne se croisent pas.** Les deux modes ne peuvent pas coexister. Supposons que la droite $D_1$ soit au-dessus de $D_2$ (figure 9a). Pour déterminer la stabilité de la solution $(I_1 = 0, I_2 = I_2^0)$, avec $I_2^0 = \alpha_2/\beta_2$, on pose $I_2 = I_2^0 + i_2$ et on linéarise les équations :

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = (\alpha_1 - \theta_{12} I_2^0)\, I_1, \qquad \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -\beta_2 I_2^0\, i_2. \tag{4.33}$$

La droite $D_1$ étant au-dessus de $D_2$, on a $\alpha_1/\theta_{12} > I_2^0$, soit $\alpha_1 - \theta_{12} I_2^0 > 0$ : une petite intensité $I_1$ croît exponentiellement, et la solution est instable. La seule solution stable est $(I_1 = \alpha_1/\beta_1, I_2 = 0)$ : seul le mode de plus grand gain oscille.

**Cas où les droites se croisent.** Il existe alors une solution bimode $(I_1^0, I_2^0)$, à l'intersection des deux droites. Pour étudier sa stabilité, on pose $I_1 = I_1^0 + i_1$, $I_2 = I_2^0 + i_2$. Au premier ordre,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \beta_1 I_1^0 & \theta_{12} I_1^0 \\ \theta_{21} I_2^0 & \beta_2 I_2^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

La matrice a une trace positive et un déterminant

$$\Delta = I_1^0 I_2^0 \left(\beta_1\beta_2 - \theta_{12}\theta_{21}\right). \tag{4.35}$$

- Si $\Delta < 0$, soit $\theta_{12}\theta_{21} > \beta_1\beta_2$, la matrice a forcément une valeur propre négative, et la solution bimode est instable (figure 9c). Il y a alors deux solutions monomodes stables, et le laser peut basculer de l'une à l'autre : c'est un régime de bistabilité.
- Si $\Delta > 0$, soit $\theta_{12}\theta_{21} < \beta_1\beta_2$, les deux valeurs propres ont le même signe et sont positives : la solution bimode est stable (figure 9b). Le laser fonctionne de manière stable sur les deux modes.

Physiquement, la saturation croisée est forte lorsque les deux modes interagissent avec les mêmes atomes. C'est le cas pour un milieu à élargissement homogène, où tous les atomes ont la même fréquence de résonance : les modes sont en compétition, et un seul d'entre eux survit. Au contraire, dans un milieu à élargissement inhomogène (par exemple un gaz élargi par effet Doppler), chaque mode interagit avec une classe différente d'atomes, la saturation croisée est faible, et les modes coexistent.

### 4.4.3 Bilan : comment rendre un laser monomode ?

De nombreuses applications, en particulier en spectroscopie, nécessitent un laser monomode. Plusieurs stratégies sont possibles :

- injecter le laser par un laser maître monomode ;
- utiliser une cavité courte, dont l'intervalle spectral libre $c/L$ est comparable à la largeur de la courbe de gain, de sorte qu'un seul mode ait un gain important $(\alpha_1 \gg \alpha_2)$ ;
- introduire des pertes pour toutes les fréquences sauf une, à l'aide d'un élément sélectif placé dans la cavité. Pour une diode laser en cavité étendue, on utilise par exemple un réseau de diffraction dont l'ordre 1 est renvoyé dans la diode (montage de Littrow), ou un filtre interférentiel à bande étroite.

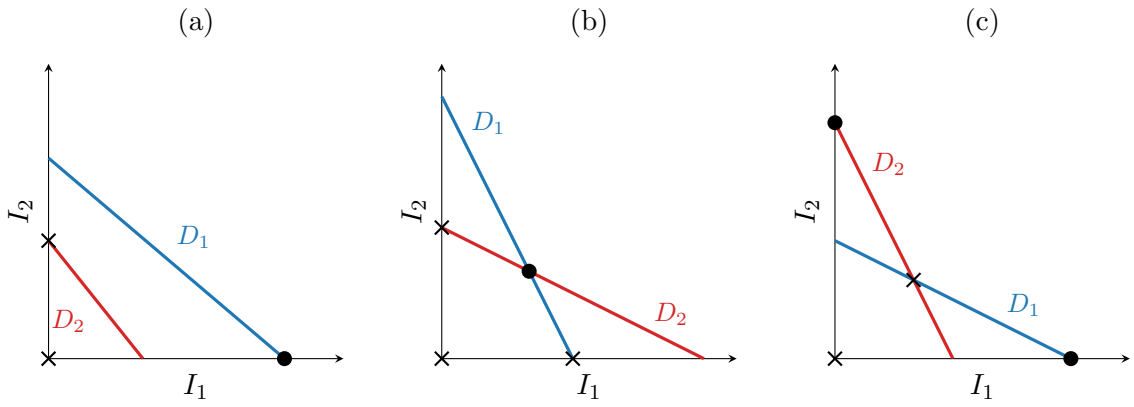



**Figure 9** – Régimes stationnaires de deux modes en compétition, dans le plan des intensités $(I_1, I_2)$. Les disques désignent les solutions stables et les croix les solutions instables. (a) Les droites $D_1$ et $D_2$ ne se croisent pas : seul le mode 1 oscille. (b) Les droites se croisent avec $\theta_{12}\theta_{21} < \beta_1\beta_2$ : les deux modes coexistent. (c) Les droites se croisent avec $\theta_{12}\theta_{21} > \beta_1\beta_2$ : deux solutions monomodes stables (bistabilité).

# 5 Lasers femtoseconde

Nous avons supposé jusqu'ici que le laser fonctionnait en régime continu. Nous montrons dans ce chapitre qu'un laser oscillant simultanément sur un grand nombre de modes longitudinaux peut produire un train d'impulsions extrêmement brèves, à condition que les phases des modes soient bloquées les unes par rapport aux autres. Ces lasers femtoseconde ont ouvert la voie à l'étude des réactions chimiques en temps réel.

## 5.1 Principe d'un laser femtoseconde

On considère un laser dont le spectre est réparti sur un grand nombre $N$ de modes longitudinaux, de pulsations

$$\omega_n = \frac{2\pi c}{L}\, n = n\omega_0 \tag{5.1}$$

(on a omis un décalage de pulsation commun à tous les modes, sans importance pour la suite). Le champ s'écrit

$$\mathcal{E}(t) = \sum_n c_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t}. \tag{5.2}$$

On écrit les coefficients sous la forme $c_n = a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n}$, et on suppose un « peigne de fréquences » : $a_n = a$ pour $0 \leq n < N$, et $a_n = 0$ sinon. L'intensité vaut

$$I(t) = \frac{1}{2}|\mathcal{E}|^2 = a^2 \left[\frac{N}{2} + \sum_{n<m} \cos\left((n-m)\omega_0 t + \varphi_n - \varphi_m\right)\right]. \tag{5.3}$$

### 5.1.1 Modes de phases aléatoires

En général, les phases $\varphi_n$ des modes sont décorrélées. L'intensité moyenne vaut alors

$$\langle I \rangle = a^2 \frac{N}{2} + a^2 \sum_{n<m} \langle \cos\left((n-m)\omega_0 t + \varphi_n - \varphi_m\right)\rangle = N\frac{a^2}{2}. \tag{5.4}$$

A-t-on vraiment un laser bien stable ? Calculons les fluctuations d'intensité, $\delta I = \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle^{1/2}$ :

$$\delta I^2 = a^4 \sum_{\substack{n<m \\ n'<m'}} \langle \cos\left[(n-m)\omega_0 t + \varphi_n - \varphi_m\right] \cos\left[(n'-m')\omega_0 t + \varphi_{n'} - \varphi_{m'}\right] \rangle \,. \qquad (5.5)$$

La moyenne sur les phases est nulle sauf si $n = n'$ et $m = m'$, d'où

$$\delta I^2 = a^4 \sum_{n<m} \langle \cos^2 \rangle = a^4 \, \frac{N(N-1)}{2} \, \frac{1}{2} \simeq \frac{a^4 N^2}{4}, \qquad \text{soit} \qquad \delta I \simeq a^2 \frac{N}{2} = \langle I \rangle. \quad (5.6)$$

Les fluctuations d'intensité sont aussi grandes que l'intensité moyenne : le laser fluctue énormément (figure 10a).

### 5.1.2 Modes synchronisés

Que se passe-t-il si les modes sont synchronisés, avec $\varphi_n = 0$ ? Le champ vaut

$$\mathcal{E}(t) = a \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t} = a \, \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}N\omega_0 t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}}, \qquad (5.7)$$

et l'intensité

$$I(t) = \frac{a^2}{2} \, \frac{\sin^2(N\omega_0 t/2)}{\sin^2(\omega_0 t/2)}. \qquad (5.8)$$

Cette fonction est périodique, de période $T = 2\pi/\omega_0 = L/c$, la durée d'un tour de cavité. Pour $t \ll T/N$, on a $I(t) \simeq a^2 N^2/2 = N\langle I \rangle$ : l'intensité crête est $N$ fois plus grande que l'intensité moyenne. L'intensité s'annule pour la première fois en $t_1 = 2\pi/N\omega_0 = T/N$. Entre deux pics principaux, l'intensité reste faible : au voisinage du premier maximum secondaire, en $t \simeq 1{,}5\, t_1$, elle ne vaut que $4/9\pi^2 \simeq 4{,}5\,\%$ de l'intensité crête.

Le laser émet donc un train d'impulsions de durée $\sim T/N$, séparées de la durée $T$ d'un tour de cavité (figure 10b). Physiquement, une seule impulsion circule dans la cavité, et une fraction en est extraite à chaque passage sur le miroir de sortie. On retrouve une propriété générale de la transformée de Fourier : la durée de l'impulsion est de l'ordre de l'inverse de la largeur spectrale $N\omega_0/2\pi$ du laser.

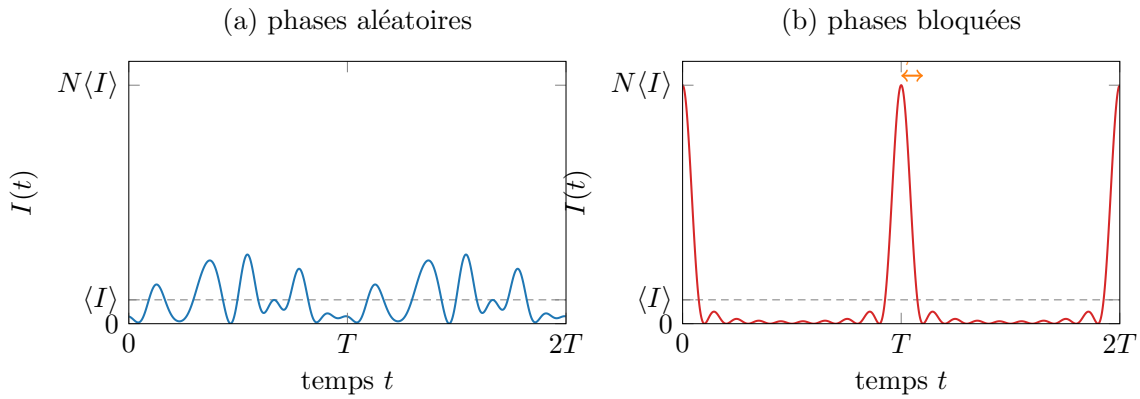



**Figure 10** – Intensité d'un laser oscillant sur $N = 10$ modes de même amplitude, en fonction du temps. (a) Phases aléatoires : l'intensité fluctue fortement autour de sa valeur moyenne. (b) Phases bloquées : le laser émet un train d'impulsions de durée $T/N$, d'intensité crête $N\langle I\rangle$, séparées de la durée $T$ d'un tour de cavité.

## 5.2 Réalisation d'un laser femtoseconde : le laser Ti:saphir

**Ordres de grandeur.** Le milieu amplificateur du laser titane-saphir est un cristal de saphir ($Al_2O_3$) dopé par des ions $Ti^{3+}$. Son gain s'étend sur une très large gamme de longueurs d'onde, typiquement de 600 à 1000 nm, soit des fréquences comprises entre $f_1 = c/\lambda \simeq 3 \times 10^{14}$ Hz et $f_2 \simeq 5 \times 10^{14}$ Hz. Pour une cavité de longueur (sur un tour) $L \sim 1$ m, l'intervalle entre modes vaut $f_0 = \omega_0/2\pi = c/L \simeq 300$ MHz. Le nombre de modes vaut donc

$$N = \frac{f_2 - f_1}{f_0} \sim \frac{2 \times 10^{14}}{3 \times 10^8} \sim 10^6. \tag{5.9}$$

La période de répétition vaut $T = 1/f_0 \simeq 3$ ns, et la durée d'une impulsion peut atteindre $T/N \sim 5$ fs.

**Schéma du laser.** Le cristal de Ti:saphir est pompé par un laser continu vert (laser Nd:$YVO_4$ doublé, à 532 nm). Une difficulté est que la longueur optique de la cavité dépend de la longueur d'onde, car l'indice de réfraction du saphir varie avec la longueur d'onde (dispersion). Les différents modes ne sont alors plus équidistants, et l'impulsion s'étale. On compense cette dispersion avec une paire de prismes : les différentes longueurs d'onde parcourent des chemins différents dans le verre des prismes, ce qui permet d'ajuster le temps de parcours de chaque composante spectrale.

**Mécanismes de blocage de modes.**

— *Lentille de Kerr.* Pour favoriser le fonctionnement impulsionnel, on introduit des pertes qui sont plus faibles à forte intensité. On utilise l'effet Kerr optique dans le saphir : l'indice dépend de l'intensité, $n(I) = n_0 + n_2 I$. Le faisceau, plus intense au centre, voit une lentille convergente d'autant plus forte que l'intensité est grande. Les impulsions intenses sont alors mieux focalisées, et passent sans pertes à travers un petit trou placé dans la cavité, tandis que le régime continu, de faible intensité, subit des pertes. Le laser a plus de pertes à basse intensité !

— *Auto-injection des modes optiques.* On peut aussi faire passer la lumière dans un modulateur de phase, modulé à la pulsation $\omega_0$. Un mode de pulsation $n\omega_0$ ressort du modulateur sous la forme

$$E_{\text{out}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\omega_0 t + \varepsilon\cos\omega_0 t)} \simeq \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t}\left[1 + \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\right)\right]$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t} + \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\omega_0 t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\omega_0 t}\right). \qquad (5.10)$$

Les bandes latérales injectent les modes voisins, de pulsations $(n \pm 1)\omega_0$, et leurs phases se bloquent sur celle du mode $n$.

**Ordres de grandeur de puissance.** Pour une puissance moyenne $\langle P\rangle = 1\,\mathrm{W}$ et une période de répétition $T \sim 10\,\mathrm{ns}$, chaque impulsion a une énergie $E = \langle P\rangle T \sim 10\,\mathrm{nJ}$. Pour une durée de 10 fs, la puissance crête atteint 1 MW ! Les puissances crêtes sont encore bien plus élevées dans les systèmes amplifiés. Une difficulté pratique est alors l'endommagement des optiques du laser.

## 5.3 Applications en chimie : spectroscopie femtoseconde

Les lasers femtoseconde permettent de suivre en temps réel le mouvement des noyaux au cours d'une réaction chimique, qui se déroule sur des échelles de temps de l'ordre de la centaine de femtosecondes [4]. On utilise une expérience de type pompe-sonde : l'impulsion laser est séparée en deux. Une première impulsion, la pompe, déclenche la réaction dans l'échantillon. Une seconde impulsion, la sonde, retardée d'un temps $\tau$ réglable à l'aide d'une ligne à retard (un trajet optique de $1\,\mu$m correspond à un retard de 3,3 fs), mesure l'état du système. On enregistre le signal détecté en fonction du retard $\tau$.

**Exemple : photodissociation de l'iodure de sodium.** Dans son état fondamental, la molécule NaI est ionique ($Na^+I^-$). L'impulsion de pompe la porte dans un état excité covalent (Na + I), dont la courbe de potentiel croise celle de l'état ionique vers 6,9 Å (figure 11a). Le paquet d'ondes créé par la pompe oscille dans le puits de potentiel formé par ce croisement évité, avec une période de l'ordre de la picoseconde. À chaque passage au voisinage du croisement, une fraction du paquet d'ondes s'échappe vers la voie de dissociation Na + I. Le signal mesuré en fonction du retard présente des oscillations amorties, qui reflètent directement ce mouvement des noyaux (figure 11b) [5].

**Autres applications.** Les lasers femtoseconde sont aussi utilisés pour l'usinage laser (la brièveté des impulsions permet d'enlever de la matière sans échauffer les zones voisines), ou pour la fusion par confinement inertiel, qui utilise des impulsions laser de très forte énergie pour comprimer une cible de combustible.

# 6 Optique non linéaire

Les fortes intensités produites par les lasers, en particulier en régime impulsionnel, permettent d'observer la réponse non linéaire des matériaux à la lumière. Nous nous intéressons ici à deux types d'effets non linéaires : la conversion de fréquence (doublage

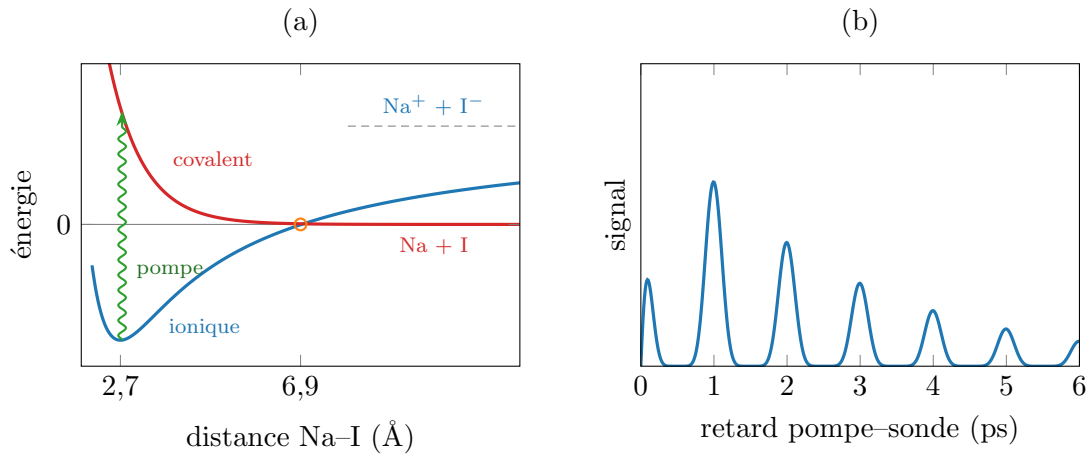



**Figure 11** – (a) Courbes de potentiel schématiques (diabatiques) de NaI : état ionique $Na^+I^-$ (bleu) et état covalent Na + I (rouge), qui se croisent vers 6,9 Å. La pompe porte la molécule de l'état fondamental ionique vers l'état covalent. (b) Allure du signal pompe-sonde en fonction du retard : le paquet d'ondes oscille avec une période de l'ordre de la picoseconde, et s'amortit car une fraction de la population se dissocie à chaque passage au croisement (voir réf. [5]).

de fréquence, oscillateur paramétrique optique), qui permet d'étendre considérablement la gamme des longueurs d'onde accessibles, ce qui est essentiel pour la spectroscopie ; et la modification de la propagation de la lumière par l'effet Kerr optique (autofocalisation, solitons). On pourra consulter la réf. [6] pour une présentation détaillée.

## 6.1 Milieux non linéaires

Au chapitre 2, nous avons écrit la polarisation du milieu sous la forme $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$, avec une susceptibilité qui dépend de l'intensité,

$$\chi \propto \frac{d^2 n_{\text{at}}}{\hbar \varepsilon_0} \frac{1}{\Delta + \mathrm{i}\Gamma/2} \frac{1}{1 + I/I_{\text{sat}}} \tag{6.1}$$

pour un milieu d'atomes à deux niveaux. La polarisation se développe ainsi en puissances du champ, en $E$, $|E|^2 E$, $|E|^4 E$, etc. Ce modèle, qui suppose un milieu isotrope, n'autorise que des puissances impaires du champ. En toute généralité, on a

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j + \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k + \varepsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots, \tag{6.2}$$

avec sommation sur les indices répétés. La susceptibilité d'ordre deux $\chi^{(2)}_{ijk}$ est un tenseur de rang 3, et celle d'ordre trois un tenseur de rang 4.

Le tenseur $\chi^{(2)}$ s'annule pour un matériau possédant la symétrie d'inversion $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$. En effet, si l'on a $P_i = \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k$, alors par inversion, le champ et la polarisation changent de signe, et le tenseur reste identique ; on a donc

$$-P_i = \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} (-E_j)(-E_k) = P_i, \qquad \text{d'où} \qquad \chi^{(2)}_{ijk} = 0. \tag{6.3}$$

Les non-linéarités d'ordre deux n'interviennent donc que dans des milieux non centrosymétriques, comme certains cristaux : KDP ($KH_2PO_4$), KTP ($KTiOPO_4$), BBO

($\beta$-$BaB_2O_4$), niobate de lithium ($LiNbO_3$). Les non-linéarités d'ordre trois existent dans tous les milieux, y compris les liquides, les gaz et les verres.

## 6.2 Propagation lumineuse dans un milieu non linéaire

On rappelle l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu de polarisation $\mathbf{P}$,

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\partial_t^2\mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)} + \dots \tag{6.4}$$

On intègre la partie linéaire $\mathbf{P}^{(1)}$ dans l'indice optique $n(\omega)$, et on note $P^{\mathrm{NL}}$ la partie non linéaire. On écrit la composante de pulsation $\omega$ du champ sous la forme

$$E(\mathbf{r},\omega) = A(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\omega)z}, \qquad k(\omega) = n(\omega)\frac{\omega}{c}, \tag{6.5}$$

où l'enveloppe $A$ varie lentement. Comme au chapitre 3, on obtient l'équation

$$2\mathrm{i}k(\omega)\,\partial_z A + \Delta_\perp A = -\frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}\,P^{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\omega)z}. \tag{6.6}$$

Dans un premier temps, on ne s'intéresse pas à la dépendance transverse : on considère des ondes planes. L'équation devient

$$\partial_z A = \frac{\mathrm{i}\omega}{2n(\omega)\varepsilon_0 c}\,P^{\mathrm{NL}}(z,\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\omega)z}. \tag{6.7}$$

## 6.3 Effets non linéaires du second ordre

On considère l'effet de deux champs de pulsations $\omega_1$ et $\omega_2$,

$$E = A_1(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 z-\omega_1 t)} + A_2(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2 z-\omega_2 t)} + \text{c.c.} \tag{6.8}$$

La polarisation non linéaire d'ordre deux $P^{(2)} = \varepsilon_0\chi^{(2)}E^2$ comprend des termes
- en $2\omega_1$ et $2\omega_2$ : doublage de fréquence ;
- en $\omega_1+\omega_2$ : somme de fréquences ;
- en $\omega_1-\omega_2$ : différence de fréquences ;
- de fréquence nulle : redressement optique (polarisation statique du milieu).

Ces processus peuvent être vus comme des processus élémentaires à trois photons, qui conservent l'énergie ; par exemple, pour la somme de fréquences, deux photons de pulsations $\omega_1$ et $\omega_2$ sont convertis en un photon de pulsation $\omega_1+\omega_2$.

### 6.3.1 Doublage de fréquence

Dans un premier temps, on se restreint au doublage de fréquence : un seul champ incident, à la pulsation $\omega_1$. La polarisation non linéaire du second ordre s'écrit

$$P^{\mathrm{NL}}(z,t) = \varepsilon_0\chi^{(2)}\left(A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 z-\omega_1 t)} + \text{c.c.}\right)^2 = \varepsilon_0\chi^{(2)}\left(A_1^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(k_1 z-\omega_1 t)} + \text{c.c.} + 2|A_1|^2\right). \tag{6.9}$$

Le premier terme oscille à la pulsation double $\omega_2 = 2\omega_1$ (doublement de fréquence) ; le dernier, de fréquence nulle, correspond au redressement optique. On s'intéresse à la génération d'un champ de pulsation $\omega_2 = 2\omega_1$. D'après l'éq. (6.7), il évolue selon

$$\partial_z A_2 = \frac{\mathrm{i}\chi^{(2)}\omega_2^2}{2k_2c^2}\, A_1^2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}, \qquad \Delta k = 2k_1 - k_2. \tag{6.10}$$

Si l'on tient compte de la présence de $A_2$, la polarisation non linéaire devient

$$\begin{aligned} P^{\mathrm{NL}}(z,t) &= \varepsilon_0\chi^{(2)}\left(A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 z-\omega_1 t)} + A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2 z-\omega_2 t)} + \text{c.c.}\right)^2 \\ &= \varepsilon_0\chi^{(2)}\left(A_1^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k_1 z-\omega_2 t)} + 2A_2A_1^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(k_2-k_1)z-\omega_1 t]} + \dots\right). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Le second terme oscille à la pulsation $\omega_1$ : le champ fondamental est également affecté par la non-linéarité, ce qui est obligatoire pour assurer la conservation de l'énergie. Il évolue selon

$$\partial_z A_1 = \frac{2\mathrm{i}\chi^{(2)}\omega_1^2}{2k_1c^2}\, A_2A_1^*\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta k z}. \tag{6.12}$$

**Résolution dans le régime de faible déplétion.** On suppose que le champ incident à $\omega_1$ ne varie pas beaucoup en amplitude. L'éq. (6.10) s'intègre alors directement, avec $A_1$ constant. Si le milieu non linéaire est compris entre $z = 0$ et $z = L$, on obtient

$$A_2(L) = \frac{\chi^{(2)}\omega_2^2}{2k_2c^2}\, A_1^2\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k L} - 1}{\Delta k}, \tag{6.13}$$

et donc l'intensité

$$I_2 \propto \left(\frac{\chi^{(2)}\omega_2^2}{2k_2c^2}A_1^2\right)^2 \left(\frac{\sin(\Delta k L/2)}{\Delta k/2}\right)^2 = \left(\frac{\chi^{(2)}\omega_2^2}{2k_2c^2}A_1^2\right)^2 L^2\, \mathrm{sinc}^2\, \frac{\Delta k L}{2}. \tag{6.14}$$

— Dans le cas d'un accord de phase, $\Delta k = 0$ : la polarisation non linéaire et le champ $A_2$ oscillent en phase au cours de la propagation. Alors

$$I_2 \propto \left(\frac{\chi^{(2)}\omega_2^2 A_1^2}{2k_2c^2}\right)^2 L^2. \tag{6.15}$$

Le champ à $\omega_2$ croît linéairement avec $L$, et l'intensité quadratiquement.

— Sans accord de phase, l'intensité harmonique oscille avec la longueur du cristal (figure 12b). Elle est maximale pour une longueur de cohérence $L_{\mathrm{coh}} = \pi/\Delta k$, et s'annule pour $L = 2L_{\mathrm{coh}}$. Cette annulation périodique est due à l'accumulation d'un déphasage entre $A_2$ et la polarisation non linéaire $\propto A_1^2$ : au-delà de $L_{\mathrm{coh}}$, la polarisation non linéaire se met à s'opposer à $A_2$, et le champ harmonique est reconverti en champ fondamental.

### 6.3.2 Comment réaliser l'accord de phase ?

**Accord de phase par biréfringence.** Dans la plupart des matériaux, la dispersion est normale : l'indice $n(\omega)$ croît avec la fréquence. L'accord de phase $k_2 = 2k_1$, qui s'écrit $n_2 = n_1$, n'est donc pas réalisé. En pratique, on parvient à l'accord de phase en utilisant un cristal biréfringent. On considère un cristal uniaxe, caractérisé par un indice

$n_o$ (ordinaire) pour une polarisation perpendiculaire à l'axe optique $\mathbf{e}'$, et un indice $\bar{n}_e$ (extraordinaire) pour une polarisation parallèle à $\mathbf{e}'$. Pour une onde qui se propage selon une direction faisant un angle $\theta$ avec l'axe optique, et polarisée dans le plan formé par cette direction et l'axe optique, on montre que l'indice vaut

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\sin^2\theta}{\bar{n}_e^2} + \frac{\cos^2\theta}{n_o^2}. \tag{6.16}$$

On suppose que la composante à $\omega_1$ est polarisée selon l'axe ordinaire, et celle à $\omega_2$ selon l'axe extraordinaire. La condition d'accord de phase devient

$$n_e(2\omega_1, \theta) = n_o(\omega_1). \tag{6.17}$$

On choisit un matériau dont l'indice extraordinaire est inférieur à l'indice ordinaire ; pour un angle $\theta$ bien choisi, on réalise l'accord de phase (figure 12a).

Un problème de cette méthode est que, pour $\theta \neq 0, 90°$, la direction de propagation de l'énergie de l'onde extraordinaire diffère de celle de l'onde ordinaire : les deux faisceaux se décalent progressivement l'un par rapport à l'autre, ce qui limite la longueur d'interaction utile. Heureusement, dans certains cristaux, l'accord de phase est possible à $\theta = 90°$, et ajustable par les dépendances en température des indices (exemple : le niobate de lithium).

**Quasi-accord de phase.** Pour les cristaux de faible biréfringence, ou pour exploiter la composante diagonale $\chi^{(2)}_{33}$ du tenseur non linéaire, qui est la plus importante, on utilise le quasi-accord de phase. On rappelle que $\chi^{(2)}$ change de signe par inversion. On alterne donc périodiquement la polarité du cristal (on parle de cristal périodiquement polarisé), de manière à alterner le signe de $\chi^{(2)}$ avec une période $\Lambda$ :

$$\chi(z) = \chi \ \mathrm{sgn}\left[\cos\frac{2\pi z}{\Lambda}\right]. \tag{6.18}$$

On développe $\chi(z)$ en série de Fourier :

$$\chi(z) = \chi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_m z}, \qquad q_m = \frac{2\pi}{\Lambda} m, \qquad a_m = \frac{2}{m\pi} \sin\frac{m\pi}{2}. \tag{6.19}$$

L'équation donnant l'évolution du champ harmonique devient

$$\partial_z A_2 = \frac{\mathrm{i}\omega_2 \chi}{2 n_2 c} A_1^2 \sum_m a_m \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta k + q_m) z}. \tag{6.20}$$

On choisit $\Lambda$ tel que $q_{-1} + \Delta k = 0$, soit

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\Lambda}, \tag{6.21}$$

ce qui rétablit l'accord de phase pour la composante $m = -1$, avec un coefficient non linéaire effectif

$$\chi_{\mathrm{eff}} = \chi |a_{-1}| = \frac{2}{\pi}\chi. \tag{6.22}$$

Les autres composantes ne vérifient pas l'accord de phase, et leur effet devient négligeable pour des distances $L \gg \Lambda$ (figure 12b). Valeur typique : pour le doublage de fréquence de $\lambda = 1064\,\mathrm{nm}$ dans le niobate de lithium périodiquement polarisé (PPLN), $\Lambda = 6{,}8\,\mu\mathrm{m}$.

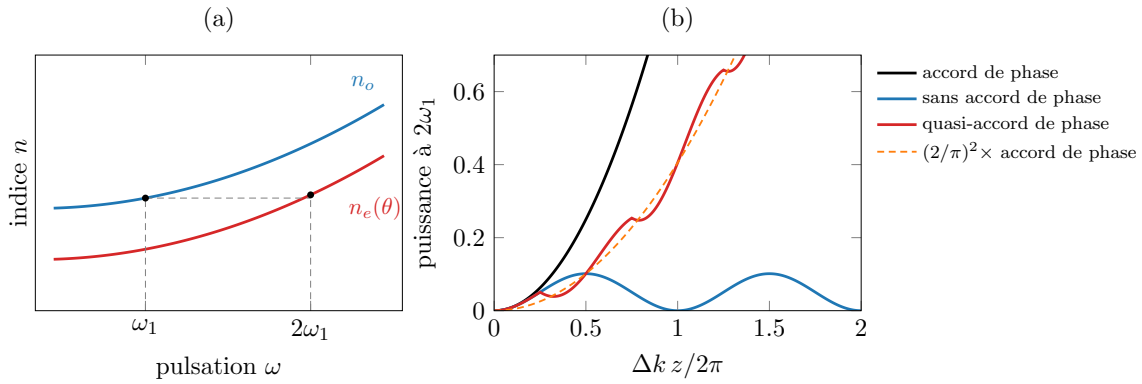



**Figure 12** – (a) Accord de phase par biréfringence : en dispersion normale, les indices croissent avec la fréquence, mais on peut choisir l'angle $\theta$ pour que l'indice extraordinaire à $2\omega_1$ soit égal à l'indice ordinaire à $\omega_1$. (b) Puissance du champ harmonique en fonction de la distance de propagation, dans le régime de faible déplétion : avec accord de phase, sans accord de phase, et avec quasi-accord de phase. Ce dernier suit en moyenne la courbe d'accord de phase réduite d'un facteur $(2/\pi)^2$.

### 6.3.3 Au-delà de l'approximation de faible déplétion de la pompe

On se restreint ici à la situation d'accord de phase. Les amplitudes évoluent selon les éq. (6.10) et (6.12), que l'on réécrit

$$\begin{cases} \partial_z A_2 = \dfrac{\mathrm{i}\chi^{(2)}\omega_2}{2n_2 c}\, A_1^2, \\ \partial_z A_1 = \dfrac{\mathrm{i}\chi^{(2)}\omega_1}{n_1 c}\, A_2 A_1^*. \end{cases} \tag{6.23}$$

L'intensité lumineuse de chaque composante s'écrit $I_j = 2n_j\varepsilon_0 c|A_j|^2$. On vérifie que l'intensité totale $I = I_1 + I_2$ est conservée :

$$\begin{aligned} \partial_z I &\propto n_1 A_1^* \partial_z A_1 + n_2 A_2^* \partial_z A_2 + \text{c.c.} \propto \mathrm{i}\left(\omega_1 A_2 A_1^{*2} + \frac{\omega_2}{2} A_2^* A_1^2\right) + \text{c.c.} \\ &= \mathrm{i}\omega_1 \left(A_2 A_1^{*2} + \text{c.c.}\right) + \text{c.c.} = 0, \end{aligned} \tag{6.24}$$

car $A_2 A_1^{*2} + \text{c.c.}$ est réel. On pose alors

$$A_1 = \sqrt{\frac{I}{2n_1\varepsilon_0 c}}\, u_1, \qquad A_2 = \mathrm{i}\sqrt{\frac{I}{2n_2\varepsilon_0 c}}\, u_2. \tag{6.25}$$

Les équations de propagation deviennent

$$\partial_z u_2 = \frac{u_1^2}{\ell}, \qquad \partial_z u_1 = -\frac{u_1 u_2}{\ell}, \qquad \text{où} \qquad \ell = \frac{c}{\chi^{(2)}\omega_1}\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 c\, n_1^2 n_2}{I}}. \tag{6.26}$$

On pose $\zeta = z/\ell$, si bien que le système devient

$$\begin{cases} \partial_\zeta u_1 = -u_1 u_2, \\ \partial_\zeta u_2 = u_1^2. \end{cases} \tag{6.27}$$

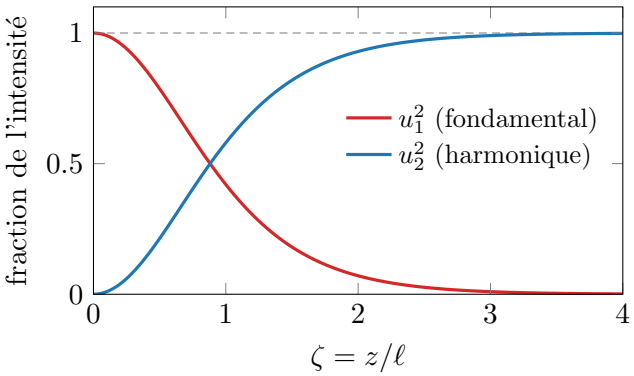



**Figure 13** – Doublage de fréquence avec accord de phase, au-delà de l'approximation de faible déplétion : fraction de l'intensité dans le champ fondamental et dans le champ harmonique en fonction de la distance de propagation.

Si $u_1$ et $u_2$ sont réels en $z = 0$, les solutions restent réelles. On vérifie la conservation de l'énergie, $\partial_\zeta(u_1^2 + u_2^2) = -2u_1^2u_2 + 2u_2u_1^2 = 0$. On a donc $u_1^2 + u_2^2 = 1$, d'où

$$\partial_\zeta u_2 = 1 - u_2^2, \qquad \text{soit} \qquad u_2 = \tanh(\zeta - \zeta_0). \tag{6.28}$$

En $z = 0$, on suppose $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, soit $\zeta_0 = 0$. D'où

$$u_2(\zeta) = \tanh\zeta, \qquad u_1(\zeta) = \sqrt{1 - \tanh^2\zeta} = \frac{1}{\cosh\zeta}. \tag{6.29}$$

Toute l'intensité est progressivement convertie à la fréquence double (figure 13). Pour $z \ll \ell$, on retrouve $u_2^2 \simeq (z/\ell)^2$, c'est-à-dire la croissance quadratique du régime de faible déplétion.

**Valeurs typiques.** Pour une puissance $P_1 = 1\,\mathrm{W}$ en régime continu et un cristal de longueur $L = 1\,\mathrm{cm}$, le col optimal du faisceau focalisé dans le cristal est de l'ordre de $20\,\mu\mathrm{m}$, et la longueur caractéristique $\ell$ vaut quelques dizaines de centimètres. L'efficacité de conversion n'est alors que de l'ordre du pourcent. Elle peut être améliorée :

— en utilisant des lasers impulsionnels, dont la très forte intensité crête donne une efficacité élevée (souvent supérieure à 50 %) ;
— en plaçant le cristal dans une cavité optique résonnante pour le champ fondamental, qui augmente l'intensité incidente de l'ordre de la finesse.

Le laser Nd:YAG à 1064 nm, doublé, triplé (par somme de fréquences entre le fondamental et l'harmonique 2) ou quadruplé, fournit ainsi des impulsions intenses à 532, 355 et 266 nm. Le laser vert à 532 nm utilisé pour pomper le Ti:saphir est un laser Nd:$YVO_4$ doublé en fréquence.

### 6.3.4 Oscillateur paramétrique optique

On considère maintenant le processus inverse de la somme de fréquences. On note
— $\omega_1$ : le signal à amplifier ;
— $\omega_3$ : le faisceau de pompage, intense ;
— $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ : le faisceau complémentaire (*idler*).

Un photon de pompe se scinde en un photon signal et un photon complémentaire. Comme pour le doublage, on obtient des équations couplées pour les amplitudes. En supposant l'accord de phase réalisé et le faisceau de pompe non déplété, elles s'écrivent

$$\partial_z A_1 = \mathrm{i}\kappa_1 A_3 A_2^*, \qquad \partial_z A_2 = \mathrm{i}\kappa_2 A_3 A_1^*, \qquad \kappa_j = \frac{\chi^{(2)}\omega_j}{n_j c}. \tag{6.30}$$

On en déduit $\partial_z^2 A_1 = \kappa_1\kappa_2 |A_3|^2 A_1$. Pour un champ complémentaire initialement nul, on trouve

$$A_1(z) = A_1(0)\cosh gz, \qquad A_2(z) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\,\frac{A_3}{|A_3|}\,A_1^*(0)\sinh gz, \qquad g = \sqrt{\kappa_1\kappa_2}\,|A_3|. \tag{6.31}$$

Le signal est amplifié exponentiellement, en même temps qu'un champ complémentaire est créé : c'est l'amplification paramétrique optique. Contrairement à l'amplification dans un milieu à inversion de population, aucune énergie n'est stockée dans le milieu, qui reste transparent.

En plaçant le cristal non linéaire dans une cavité optique pompée à $\omega_3$, on réalise un oscillateur paramétrique optique (OPO). Comme pour un laser, l'oscillation démarre lorsque le gain paramétrique, qui croît avec l'intensité de pompe, compense les pertes de la cavité. Les pulsations $\omega_1$ et $\omega_2$ sont choisies toutes deux résonnantes par ajustement de la cavité, et satisfont la condition d'accord de phase : on obtient un laser accordable en ajustant la condition d'accord de phase (angle ou température du cristal).

Les OPO constituent des sources accordables sur de très larges gammes de longueurs d'onde. Par exemple, un OPO à cristal de BBO pompé par un laser Nd:YAG triplé à 355 nm fournit des impulsions nanoseconde accordables de 410 nm à plus de 2 $\mu$m. Les amplificateurs paramétriques pompés par des lasers Ti:saphir amplifiés fournissent de même des impulsions femtoseconde accordables du visible à l'infrarouge moyen. Ces sources ont largement remplacé les lasers à colorant en spectroscopie.

## 6.4 Effet Kerr optique

### 6.4.1 Autofocalisation

L'effet Kerr est un processus non linéaire du troisième ordre, qui se traduit par un indice de réfraction de la forme

$$n = n_0 + \frac{n_2}{2}\langle E^2\rangle, \tag{6.32}$$

où $\langle E^2\rangle$ est la moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$. Pour un champ monochromatique $E(t) = \mathcal{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \text{c.c.}$, on a $\langle E^2\rangle = 2|\mathcal{E}|^2$, soit $n = n_0 + n_2|\mathcal{E}|^2$.

Nous considérons ici l'influence de cet effet Kerr sur la propagation du mode transverse d'un faisceau lumineux de profil gaussien, qui entre dans un milieu non linéaire. L'indice de réfraction présente lui-même un profil gaussien, maximal au centre du faisceau, où il vaut $n_0 + n_2|\mathcal{E}_{\max}|^2$ (pour $n_2 > 0$). Le milieu agit alors comme une lentille convergente. Cette autofocalisation s'oppose à la diffraction, qui induit un étalement du profil transverse. C'est ce mécanisme qui est utilisé pour le blocage de modes par lentille de Kerr dans les lasers Ti:saphir (chapitre 5).

### 6.4.2 Équation de Schrödinger non linéaire

La propagation est décrite par l'équation de l'enveloppe lentement variable. On pose $E(\mathbf{r},t) = A(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 z-\omega t)}$, où $k_0 = n_0\omega/c$, avec $E$ solution de

$$\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2}\left(n_0 + n_2|E|^2\right)^2 E = 0. \tag{6.33}$$

En développant $\frac{\omega^2}{c^2}(n_0 + n_2|E|^2)^2 \simeq k_0^2(1+\alpha'|E|^2)$, avec $\alpha' = 2n_2/n_0$, on obtient

$$2\mathrm{i}k_0\,\partial_z A + \Delta_\perp A + \alpha|A|^2 A = 0, \qquad \alpha = \frac{2k_0^2 n_2}{n_0}. \tag{6.34}$$

Cette équation n'est plus linéaire, et le comportement du faisceau dépend de sa puissance totale

$$P = \int \mathrm{d}^2\mathbf{r}\,|A|^2(\mathbf{r},z), \tag{6.35}$$

qui est indépendante de $z$. On introduit le champ normalisé $\Psi = A/\sqrt{P}$, qui obéit à

$$2\mathrm{i}k_0\,\partial_z\Psi + \Delta_\perp\Psi + \alpha P|\Psi|^2\Psi = 0. \tag{6.36}$$

C'est une équation de Schrödinger non linéaire à deux dimensions, la coordonnée $z$ jouant le rôle du temps, et le terme non linéaire celui d'une interaction attractive.

### 6.4.3 Évolution de la taille du faisceau

On définit la taille $\sigma$ du faisceau par

$$\sigma^2(z) = \int \mathrm{d}^2\mathbf{r}\,|\Psi|^2(\mathbf{r},z)\,r^2. \tag{6.37}$$

Son évolution est régie par un théorème du viriel :

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^2}{\mathrm{d}z^2} = \frac{2}{k_0^2}\,\mathcal{E}, \qquad \mathcal{E} = \int \mathrm{d}^2\mathbf{r}\left[|\boldsymbol{\nabla}_\perp\Psi|^2 - \frac{\alpha P}{2}|\Psi|^4\right], \tag{6.38}$$

où l'« énergie » $\mathcal{E}$ est une quantité conservée au cours de la propagation. Elle comprend deux termes : un terme d'énergie cinétique, qui décrit la diffraction, et un terme d'attraction non linéaire. L'évolution de la taille résulte d'une compétition entre diffraction et non-linéarité. Pour un faisceau de front d'onde plan en $z = 0$, on obtient

$$\sigma^2(z) = \sigma^2(0) + \frac{\mathcal{E}}{k_0^2}\,z^2. \tag{6.39}$$

Si $\mathcal{E} < 0$, il est clair que le faisceau lumineux va s'effondrer sur lui-même en une distance finie (figure 14a). Pour $\mathcal{E} = 0$, on peut espérer avoir une solution indépendante de $z$.

### 6.4.4 Soliton de Townes

On cherche une solution stationnaire de l'éq. (6.36), de la forme

$$\Psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Kz}R(r), \tag{6.40}$$

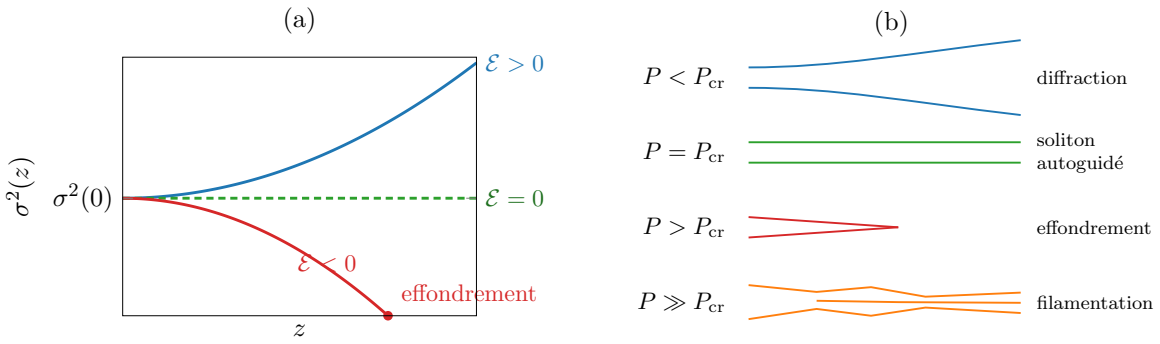



**Figure 14** – (a) Évolution de la taille d'un faisceau dans un milieu Kerr, selon le signe de l'énergie conservée $\mathcal{E}$. (b) Régimes de propagation en fonction de la puissance du faisceau, comparée à la puissance critique $P_{\rm cr}$.

avec $R$ réelle positive. Elle vérifie

$$-2k_0 K\, R = -\Delta_\perp R - \alpha P\, R^3. \tag{6.41}$$

Supposons que l'on ait une telle solution. Alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}K'z}\lambda^{-1}R(r/\lambda)$ est également solution, avec $K' = K/\lambda^2$, et elle a la même norme. On a donc une famille de solutions invariante par homothétie. Ces solutions ont toutes la même puissance $P = P_{\rm cr}$ : elles ne peuvent exister que pour cette valeur de $P$. Le profil $R(r)$, appelé soliton de Townes, est maximal au centre et décroît exponentiellement à grande distance. Avec la convention $n = n_0 + n_2 I$ (où $n_2$ est rapporté à l'intensité), la puissance critique vaut $P_{\rm cr} \simeq 1{,}9\,\lambda^2/(4\pi n_0 n_2)$, soit quelques gigawatts dans l'air pour un laser Ti:saphir.

**Bilan.** Selon la puissance du faisceau, on observe différents régimes (figure 14b) :
- $P < P_{\rm cr}$ : la diffraction l'emporte, et le faisceau s'élargit ;
- $P = P_{\rm cr}$ : possibilité d'une solution autoguidée, qui se propage sans se déformer ;
- $P > P_{\rm cr}$ : le faisceau s'effondre sur lui-même ;
- $P \gg P_{\rm cr}$ : le faisceau se fragmente en de multiples filaments.

Ce comportement est pertinent pour la propagation des lasers impulsionnels de forte puissance crête : l'autofocalisation peut endommager les optiques, et la filamentation dans l'air est utilisée par exemple pour la détection à distance de molécules.

# Références


[1] Anthony E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, Mill Valley, 1986.

[2] Orazio Svelto. *Principles of Lasers*. Springer, New York, 5 edition, 2010.

[3] Gilbert Grynberg, Alain Aspect, and Claude Fabre. *Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized Light*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[4] Ahmed H. Zewail. Femtochemistry: Atomic-scale dynamics of the chemical bond. *J. Phys. Chem. A*, 104:5660–5694, 2000.

[5] A. Mokhtari, P. Cong, J. L. Herek, and A. H. Zewail. Direct femtosecond mapping of trajectories in a chemical reaction. *Nature*, 348:225–227, 1990.

[6] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, Burlington, 3 edition, 2008.