Formation prédoctorale en chimie, L3, ENS

Physique des Lasers

TD n° 2

Sylvain Nascimbene & Tanish Satoor

1 Optique Physique

1. Une onde sphérique issue de l'origine du repère a la forme :

$$\psi(\vec{r},t) \propto \frac{e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}}{r}, \text{ avec } \vec{k} = k\hat{r}$$

Convainquez-vous que l'équation a la bonne symétrie et qu'elle satisfait la conservation de l'énergie.

L'approximation paraxiale consiste à ne considérer que des points "proches" de l'axe optique, selon $\vec{z}$. On place dans le plan (x, y) des éléments optiques qui possèdent une symétrie de rotation.

Développez l'argument de l'exponentielle en utilisant $\rho^2 = x^2 + y^2 \ll z^2$ et déterminez alors l'expression pour une onde sphérique dans l'approximation paraxiale.

2. Quelle est la validité de cette approximation ? (Développez l'expression à un ordre supérieur). En quoi ces conditions diffèrent-elles ? Donnez des exemples.
3. Dans cette approximation donnez l'opérateur de transfert $T(\rho)$ pour une lentille de focale f. $T(\rho)$ est défini par

$$\psi_{out} = T(\rho)\psi_{in},$$

où ψ_{out} designe l'onde juste après la lentille.

4. En appliquant l'opérateur de transfert à une onde divergente depuis z_0, on trouve une autre onde sphérique divergent depuis z_1. En déduire la relation de conjugaison pour une lentille mince : $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{f} + \frac{1}{z_0}$. Préciser la convention de signe pour chaque terme. Il existe différentes conventions en fonction du livre.
5. Convainquez-vous que si on considère un miroir sphérique (comme ceux dans une cavité) au lieu d'une lentille, l'opérateur de réflexion est simplement $R(\rho) = T(\rho)$.
6. En parcourant une distance d dans un milieu d'indice n, une onde (de vecteur d'onde k dans le vide) accumule une phase ϕ. Quelle est l'expression de ϕ. Considerez une lentille d'épaisseur uniforme et d'indice variable $n(\rho)$. Comment l'indice doit-il varier pour avoir une lentille de distance focale f ?
7. Considérons maintenant un bloc en verre avec un indice homogène n_0 : quelle forme devrions-nous lui donner afin qu'il devienne une lentille de focale f ? Pensez à laisser une surface plane par simplicité.

Il est en pratique beaucoup plus facile de sculpter une surface sphérique (pourquoi ?). De quel rayon devrait être cette sphère ? Une telle lentille fonctionnera-t-elle en dehors de l'approximation paraxiale ? Quelles précautions devrions-nous prendre en l'utilisant ?

8. Bonus : Qu'en est-il des lentilles que vous voyez dans la fenêtre arrière des bus à Paris ? [1] : Regarder E. Hetch, "Optics" Chapitre 5.

2 Stabilisation d'une cavité

Question préliminaire. On considère une cavité Fabry-Pérot linéaire dont les miroirs plans ont une largeur d et écartés de L. On décrit les faisceaux lumineux à l'aide de l'optique géométrique. Évaluer le temps caractéristique après lequel un faisceau initialement désaxé d'un petit angle α quitte la cavité.
Afin de contourner la difficulté soulevée dans la question préliminaire, on utilise des miroirs *sphériques*. Dans cette question, on suppose que la cavité Fabry-Pérot est constituée de deux miroirs sphériques de même rayon de courbure R situés à une distance L l'un de l'autre.

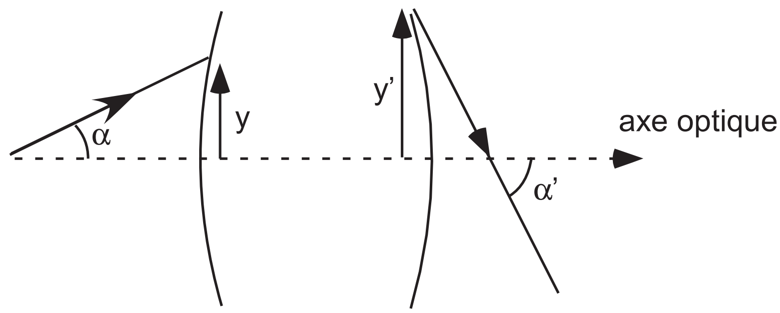
1. Rappeler la relation de conjugaison liant un point M à son point image M' dans le cas du miroir sphérique de rayon de courbure R. Montrer que si M'' est le symétrique de M' par rapport au miroir, la relation liant M à M' est identique à celle obtenue à l'aide d'une lentille mince de focale f que l'on précisera.
   À l'aide de ce résultat, l'étude de la cavité Fabry-Pérot peut se ramener à celle d'une succession infinie de lentilles.
2. *Matrice ABCD.* On considère un élément optique quelconque et un faisceau incident arrivant sur cet élement à une distance y de l'axe optique et un angle α par rapport à celui-ci. De même, on note y' et α' la distance et l'angle du faisceau de sortie (cf. figure ci-dessous). On admet que dans l'approximation paraxiale, les couples (y, α) et (y', α') sont reliés par une relation du type
   $$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$
   Calculer les matrices ABCD dans les cas suivants
   (a) Propagation libre d'un faisceau sur une distance L
   (b) Traversée d'une lentille mince de focale f.
3. On considère un faisceau lumineux se propageant dans la cavité de la question 1 et (y_n, α_n) les paramètres du faisceau à la sortie de la n$^{\text{ème}}$ lentille. À l'aide du formalisme de la matrice ABCD, donner la relation liant (y_{n+1}, α_{n+1}) à (y_n, α_n).
4. À l'aide de la question précédente, exprimer la condition sur f et L pour que la cavité soit stable en présence d'un désaxage.

[1] : Regarder "Lasers", A. Siegman Chapitre 15

3 Image d'un faisceau gaussien

Dans cette exercice, nous étudions la traversée d'une lentille par un faisceau gaussien. Les amplitudes des champs électromagnétiques sont proportionnelles à

$$u(r, z) = \frac{\exp(\mathrm{i}\varphi(r, z))}{q(z)} \exp\left(-\mathrm{i}k\frac{r^2}{2q(z)}\right), \tag{1}$$



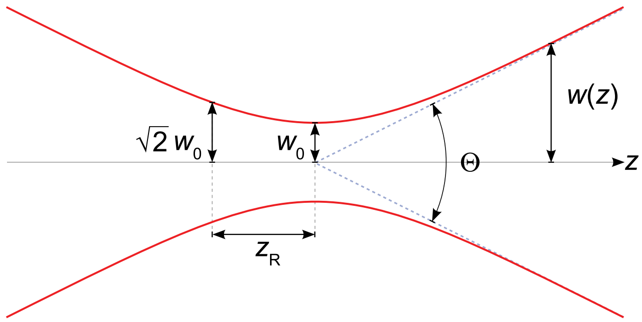
où $r^2 = x^2 + y^2$, $k = 2\pi/\lambda$, φ est la phase de Gouy, et $q(z)$ le paramètre complexe du faisceau ($q(z) = z + \mathrm{i}z_\mathrm{R}$, où z_R est la longueur de Rayleigh $z_\mathrm{R} = \pi w_0^2/\lambda$).

1. Montrer que l'intensité du faisceau a un profil gaussien,
$$I(r,z) = |u|^2 \propto \frac{w_0^2}{w^2(z)} \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \tag{2}$$
où le waist du faisceau $w(z)$ est donné par
$$w(z) = w_0\sqrt{1 + (z/z_\mathrm{R})^2} \tag{3}$$

2. L'effet d'un élément optique caracterisé par une matrice ABCD s'écrit
$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \tag{4}$$
Rappeler les matrices ABCD pour la propagation libre d'un rayon sur une distance L et pour le passage d'un rayon à travers une lentille mince de focale f.
Calculer le paramètre complexe q' d'un faisceau gaussien après propagation libre et après passage à travers une lentille mince.

3. Si vous voulez focaliser un faisceau de lumière en un petit point : de quelle taille doit être le faisceau avant la lentille ? et la taille de la lentille elle-meme ? Regarder "Diffraction-limited system". Est-ce que il y a un lien entre cette formule et le principe d'incertitude de Heisenberg ?

4. Considérons un pointeur laser (comme celui qu'on peut acheter pour quelques euros) à 1064nm. On veut réaliser un mode Laguerre-Gauss et pour cela on utilise une plaque de phase d'un pouce de diamètre. Le faisceau doit avoir un front d'onde plan lors de la traversée de la plaque de phase. Au foyer le faisceau aura la forme d'un donut et devrait avoir une taille de $\sim 10\mu$m afin de servir à piéger des atomes. Concevoir l'optique qui le fera. Utiliser le logiciel *Gaussian Beam*[2].



[1] : https ://www.rp-photonics.com/gaussian_beams.html
[2] : http ://gaussianbeam.sourceforge.net/

4 Focalisation d'un faisceau gaussien

On envoie un faisceau gaussien "quasi-parallèle" de waist w_0 localisé en z_0 sur une lentille convergente de focale f. L'origine des z est choisie au centre de la lentille.

1. Montrer que cette situation correspond à la condition

$$f \ll z_0 \ll z_R.$$

2. Calculer la relation de conjugaison des faisceaux gaussiens. Déterminer de façon approchée la position du waist image. Comparer au cas de l'optique géométrique.
3. Montrer qu'à l'ordre dominant, le waist image vaut

$$w_0' = \frac{\lambda f}{\pi w_0}.$$

5 Propagation d'un faisceau gaussien dans une fibre optique

Une fibre optique à gradient d'indice est modélisée par un milieu invariant dans la direction z et dont l'indice varie dans la direction transverse selon la loi

$$n(x,y) = n_0 - n_0\gamma^2\frac{x^2+y^2}{2} = n_0(1-\gamma^2\frac{r^2}{2})$$

On suppose que le faisceau se propageant dans la fibre est gaussien et on note $q(z)$ son paramètre confocal à la position z.

1. On considère le passage de z à $z+dz$, caractarisé par la matrice ABCD :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & dz \\ -\gamma^2 dz & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Interpréter cette matrice en termes d'opérations élémentaires sur le faisceau.

2. En utilisant la question précédente, montrer que $q(z)$ est la solution de

$$\frac{dq}{dz} = 1 + \gamma^2 q^2 = 1 + \frac{n_2}{n_0} q^2$$

3. Cette equation a-t-elle une solution stationnaire q_0 ? Si oui, en donner l'expression. Penser à l'utilité de cette solution en pratique.
4. On pose $q = q_0 + \delta$, avec $\delta \ll q_0$. Donner l'évolution de δ et commenter.

[1] : Voir "Lasers", A. Siegman Chapter 16 et 17