Mécanique quantique – L3

Sylvain Nascimbène

Séance de tutorat du 5 décembre 2019

Téléportation quantique

La téléportation quantique consiste à transmettre un bit quantique $|\phi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ d'un endroit (Alice) à un autre (Bob) en envoyant deux bits classiques.
Comme point de départ, on suppose qu'Alice et Bob partagent un état intriqué de type EPR $|\psi_1\rangle = 1/\sqrt{2}(|+-\rangle - |-+\rangle)$, et Alice détient en plus le spin $|\phi\rangle$ à transmettre. Alice détient donc deux spins, et Bob un seul.

1. Quelle est l'expression du vecteur d'état $|\Phi\rangle$ du système total ? On placera le spin à transmettre en premier.
2. On rappelle l'expression des quatre états de Bell :

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= 1/\sqrt{2}(|+-\rangle - |-+\rangle) \\ |\psi_2\rangle &= 1/\sqrt{2}(|+-\rangle + |-+\rangle) \\ |\psi_3\rangle &= 1/\sqrt{2}(|++\rangle - |--\rangle) \\ |\psi_4\rangle &= 1/\sqrt{2}(|++\rangle + |--\rangle). \end{aligned}$$

   Montrer qu'on peut réécrire l'état de départ $|\Phi\rangle$ sous la forme

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} |\psi_i\rangle \otimes (\alpha_i|+\rangle + \beta_i|-\rangle).$$

   Donner l'expression des coefficients α_i, β_i.
3. Alice effectue maintenant une mesure de l'état de Bell de ses deux spins. L'état de ses spins est donc projeté sur un des quatre états de Bell. Le résultat peut être paramétré par deux bits classiques.

   Quelle est la probabilité qu'Alice mesure un état de Bell donné ?

   Quel est l'état du spin de Bob après la mesure, en fonction du résultat de la mesure d'Alice ?
4. Après mesure et donc projection de l'état $|\Phi\rangle$ sur le résultat de mesure, Alice envoie à Bob son résultat de mesure. Bob utilise alors cette information pour agir sur son spin, de sorte que dans tous les cas il se retrouve à la fin avec l'état $|\phi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$, ce qui était le but de l'expérience de téléportation.

   Par exemple, si Bob sait qu'Alice a mesuré l'état de Bell $|\psi_1\rangle$, il ne change rien à son spin qui est déjà dans l'état $|\phi\rangle$.

   Pour les trois autres résultats de mesure, proposer une transformation unitaire qui amène le spin de Bob dans l'état $|\phi\rangle$. On cherchera des transformations de la forme $\sigma_x^\alpha \sigma_z^\beta$.

5. Si Bob veut utiliser son spin avant qu'Alice ne fasse de mesure, peut-il faire une transformation unitaire de son spin qui l'amène dans l'état $|\phi\rangle$?
6. *Remarque : comment mesurer un état de Bell ?*

   L'idée est de faire une transformation unitaire amenant les états $|\psi_i\rangle$ sur les états $|\pm\pm\rangle$, qu'on sait distinguer simplement. On combine pour cela deux évolutions unitaires :

   — une « porte CNOT », qui transforme $|+\pm\rangle$ en $|+\pm\rangle$ et $|-\pm\rangle$ en $|-\mp\rangle$.

   — une « porte de Hadamard » qui n'agit que sur le premier spin. Elle s'exprime à l'aide des matrices de Pauli selon $1/\sqrt{2}(\sigma_x + \sigma_z)$.

   Vérifier qu'on réalise bien ainsi la transformation escomptée.

Bibliographie

— *Article fondateur* : C. H. Bennett *et al*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1985 (1993)

— *Vérification expérimentale* : D. Bouwmeester *et al*, Nature **390**, 575 (1997).