

# Mécanique quantique – L3

Emmanuel Baudin – Tom Bienaimé – Sylvain Nascimbène

## TD 6 : oscillateur harmonique 2D et effet Hall quantique

---

### 1 Oscillateur harmonique 2D

#### 1.1 Introduction

##### 1.1.1 Le problème classique

On considère l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique en deux dimensions

$$\mathcal{H}_{xy} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$$

Les équations du mouvement peuvent être facilement intégrées pour obtenir :

$$\begin{cases} x(t) = x_M \cos(\omega t - \varphi_x) \\ p_x(t) = -m\omega x_M \sin(\omega t - \varphi_x) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(t) = y_M \cos(\omega t - \varphi_y) \\ p_y(t) = -m\omega y_M \sin(\omega t - \varphi_y) \end{cases} \quad (2)$$

où  $x_M, \varphi_x, y_M, \varphi_y$  sont des constantes qui dépendent des conditions initiales (on suppose que  $x_M$  et  $y_M$  sont positifs). La trajectoire classique de la particule dans le plan  $xOy$  est une ellipse.

- Calculer les constantes du mouvement suivantes en fonction de  $x_M, \varphi_x, y_M, \varphi_y$  :
  - L'énergie totale  $\mathcal{H}_{xy}$
  - Les énergies  $\mathcal{H}_x$  et  $\mathcal{H}_y$  des trajectoires projetées respectivement sur  $Ox$  et  $Oy$
  - La composante du moment angulaire  $\mathcal{L}$  selon  $Oz$  :  $\mathcal{L}_z = xp_y - yp_x$ . Commenter la valeur de  $\mathcal{L}_z$  en fonction des différentes trajectoires possibles (*i.e.* en fonction des différentes valeurs de  $x_M, \varphi_x, y_M, \varphi_y$ ).

##### 1.1.2 Le problème quantique

Dans la suite, nous nous intéressons aux états propres  $|\varphi_{xy}\rangle$ , états stationnaires d'énergie  $E_{xy}$  de l'Hamiltonien

$$\hat{H}_{xy} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2).$$

Nous cherchons ainsi à résoudre l'équation aux valeurs propres :

$$\hat{H}_{xy} |\varphi_{xy}\rangle = E_{xy} |\varphi_{xy}\rangle$$

## 1.2 Classification des états par les nombres quantiques $n_x$ et $n_y$

2. Montrer que l'on peut écrire  $\hat{H}_{xy} = \hat{H}_x \otimes I + I \otimes \hat{H}_y$ . Donner l'expression de  $\hat{H}_x$ . Donner sans démonstration le spectre de  $\hat{H}_x$  et son degré de dégénérescence.
3. Nous pouvons ainsi choisir les vecteurs de  $\hat{H}_{xy}$  sous la forme :  $|\varphi_{n_x, n_y}\rangle = |\varphi_{n_x}\rangle \otimes |\varphi_{n_y}\rangle$ . En déduire le spectre  $E_{xy}$  de  $\hat{H}_{xy}$ . Quel est le degré de dégénérescence du  $n$ -ème sous-espace propre de  $\hat{H}_{xy}$  ?
4. Montrer que  $\{\hat{H}_x \otimes I, I \otimes \hat{H}_y\}$  forment un ensemble complet d'observables qui commutent (ECOC). Quelle est l'unique base orthonormée de vecteurs propres communs à toutes ces observables ?
5. Est-ce que  $\{\hat{H}_{xy}\}$  seul forme un ECOC ? Est-ce que  $\{\hat{H}_{xy}, \hat{H}_x \otimes I\}$  et  $\{\hat{H}_{xy}, I \otimes \hat{H}_y\}$  forment des ECOC ?

## 1.3 Classification des états par leur moment angulaire

Dans la partie précédente, nous avons trouvé des états propres en fonction des nombres quantiques  $n_x$  et  $n_y$ . Cependant, les axes  $Ox$  et  $Oy$  n'occupent pas une position privilégiée dans le problème. Puisque l'énergie potentielle est invariante par rotation autour de  $Oz$ , nous aurions pu choisir un autre système d'axes orthogonaux  $Ox'$  et  $Oy'$  du plan  $xOy$ . Nous aurions ainsi obtenu des états propres différents des précédents.

Pour mieux exploiter la symétrie du problème, nous allons considérer la composante  $\hat{L}_z$  du moment angulaire :

$$\hat{L}_z = \hat{x} \otimes \hat{p}_y - \hat{y} \otimes \hat{p}_x$$

6. Montrer que :
  - $\hat{L}_z = i\hbar (\hat{a}_x \otimes \hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger \otimes \hat{a}_y)$
  - $\hat{H}_{xy} = \hbar\omega (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x \otimes I + I \otimes \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + I \otimes I)$
  - $[\hat{H}_{xy}, \hat{L}_z] = 0$

Nous allons donc chercher une base de vecteurs propres communs à  $\hat{H}_{xy}$  et  $\hat{L}_z$ . Dans la suite, on allégera les notations en omettant les produits tensoriels. Nous introduisons les opérateurs  $\hat{a}_d$  et  $\hat{a}_g$ , opérateur d'annihilation d'un "quanta circulaire" droit et gauche par :

$$\begin{cases} \hat{a}_d = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_x - i\hat{a}_y) \\ \hat{a}_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_x + i\hat{a}_y) \end{cases} \quad (3)$$

7. Montrer que :
  - Les seuls commutateurs non nuls entre les quatre opérateurs  $\hat{a}_d, \hat{a}_g, \hat{a}_d^\dagger, \hat{a}_g^\dagger$  sont  $[\hat{a}_d, \hat{a}_d^\dagger] = [\hat{a}_g, \hat{a}_g^\dagger] = I$
  - $\hat{H}_{xy} = \hbar\omega (\hat{N}_d + \hat{N}_g + I)$  avec  $\hat{N}_d = \hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d$  et  $\hat{N}_g = \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_g$ .
  - $\hat{L}_z = \hbar (\hat{N}_d - \hat{N}_g)$

À ce stade, l'introduction des opérateurs  $\hat{a}_d, \hat{a}_g, \hat{a}_d^\dagger, \hat{a}_g^\dagger$  ont permis de garder une forme très simple pour  $\hat{H}_{xy}$  tout en simplifiant l'expression de  $\hat{L}_z$ .

En utilisant les opérateurs  $\hat{a}_d$  et  $\hat{a}_g$ , nous pouvons maintenant utiliser le même type d'argument que celui que nous avons utilisé pour  $\hat{a}_x$  et  $\hat{a}_y$ . Ainsi, le spectre de  $\hat{N}_d$  et  $\hat{N}_g$  sont des entiers. Une paire  $\{n_d, n_g\}$  détermine de façon unique (à un facteur de phase près) les vecteurs propres communs à  $\hat{N}_d$  et  $\hat{N}_g$  :

$$|\chi_{n_d, n_g}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_d! n_g!}} (\hat{a}_d^\dagger)^{n_d} (\hat{a}_g^\dagger)^{n_g} |\varphi_{0,0}\rangle$$

Les opérateurs  $\{\hat{N}_d, \hat{N}_g\}$  forment donc un ECOC. Les vecteurs  $|\chi_{n_d, n_g}\rangle$  sont également vecteurs propres de  $\hat{H}_{xy}$  et  $\hat{L}_z$  avec les valeurs propres  $\hbar\omega(n+1)$  et  $m\hbar$  avec  $n = n_d + n_g$ ,  $m = n_d - n_g$ .

8. Au regard de ce qui précède, pourquoi  $\hat{a}_d$  et  $\hat{a}_g$  sont appelés opérateur d'annihilation d'un "quanta circulaire" droit et gauche ?
9. Les résultats obtenus sont-ils en accord avec ceux de la partie précédente ? On discutera en particulier le spectre de  $\hat{H}_{xy}$  et la dégénérescence des sous-espaces propres associés.
10. Le spectre de  $\hat{L}_z$  est-il conforme aux résultats généraux vus lors du cours sur les moments angulaires ?
11. Les opérateurs  $\{\hat{H}_{xy}, \hat{L}_z\}$  forment-ils un ECOC ?

## 2 Effet Hall quantique

L'effet Hall quantique entier est une version en mécanique quantique de l'effet Hall mise en évidence en 1980 par le physicien allemand Klaus von Klitzing. La figure 1 synthétise les résultats expérimentaux de cet effet.

### 2.1 Les niveaux de Landau

On cherche à calculer les niveaux d'énergie d'un gaz bidimensionnel d'électrons libres en présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$  stationnaire et uniforme perpendiculaire au plan du gaz. Ce gaz occupe un carré de côté  $L$  dans le plan  $xOy$ . Le nombre d'électrons par unité de surface est  $n_s$  et leur masse  $m$ . On néglige l'interaction coulombienne entre les électrons. On se place dans la jauge de Landau où le potentiel vecteur est

$$\mathbf{A} = xB\mathbf{u}_y$$

On rappelle que l'Hamiltonien d'un électron libre dans un champ magnétique s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2$$

1. Montrer que l'Hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + eB\hat{x})^2]$$

Pour une énergie  $E$ , l'invariance par translation selon la direction  $y$  permet de chercher des solutions qui sont aussi état propre de  $\hat{p}_y$  (les ondes planes dans la direction  $y$ ). Ceci nous conduit à chercher les fonctions d'onde des états stationnaires sous la forme :

$$\psi_k(x, y) = e^{iky} f_k(x)$$

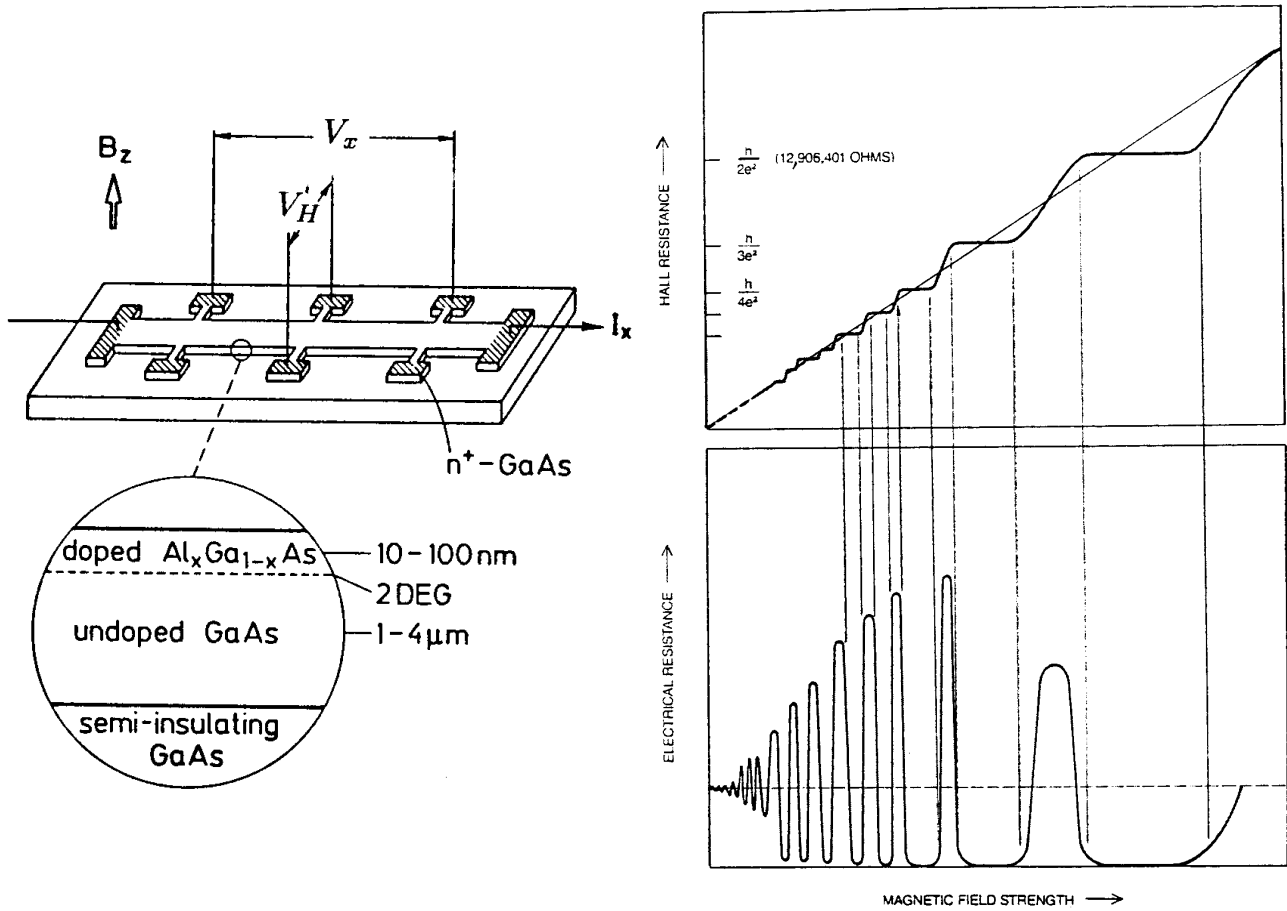


FIGURE 1 – Échantillon utilisé pour mesurer l’effet Hall. Le gaz d’électron 2D est créé dans une hétérostructure de GaAs. La tension de Hall  $V_H$  et la chute de tension  $V_x$  sont mesurées avec un courant constant  $I_x$  en fonction du champ magnétique  $B$  perpendiculaire au gaz l’électron 2D. Dans l’effet Hall quantique, la résistance de Hall  $R_H = V_H/I_x$  possède des plateaux qui coïncident avec l’annulation de la résistance électrique  $R_x = V_x/I_x$  de l’échantillon. Sur les plateaux, la valeur de la résistance de Hall est précisément égale à  $R_H = \frac{h}{e^2 \nu}$ , où  $\nu$  est un entier.

2. Montrer que l’équation de Schrödinger stationnaire pour  $\psi_k(x, y)$  implique que  $f_k(x)$  est solution avec l’énergie  $E$ , de l’équation de Schrödinger stationnaire d’un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_c$  centré en  $x_k = -kl_B^2$ , où l’on a posé :

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \quad \text{et} \quad l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$$

Préciser la dimension de  $l_B$ . Comment appelle-t-on  $\omega_c$  ?

3. Quelle est l’énergie  $E_n$  associée à la fonction propre  $\psi_k(x, y)$  ?
4. Donner l’expression des fonctions d’onde  $\psi_{n,k}(x, y)$  qui dépendent de deux nombres quantiques  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{R}$  (on ne cherchera pas à les normaliser).  
À quoi ressemblent ces fonctions d’onde ?

Quelle est leur extension spatiale typique et sur quelle valeur sont-elles centrées dans la direction  $x$  ?

### Dégénérescence

Les fonctions d'onde dépendent de deux nombres quantiques  $n$  et  $k$  alors que les niveaux d'énergie dépendent que de  $n$ . Nous voulons estimer le degré de dégénérescence du sous-espace propre associé à l'énergie  $E_n$ .

5. Effet du confinement selon  $y$ . On impose des conditions aux limites périodiques dans la direction  $y$ . Quelles conséquences sur les valeurs possibles de  $k$  ?
6. Effet du confinement selon  $x$ . Puisque les fonctions d'onde sont localisées exponentiellement autour de  $x_k = -kl_B^2$ , et que l'on doit avoir  $0 \leq x_k \leq L$ , quelle contrainte cela impose-t-il sur les valeurs possibles de  $k$  ?
7. En négligeant le spin de l'électron, en déduire que la dégénérescence d'un niveau de Landau est

$$\mathcal{N} = \frac{BL^2}{\Phi_0} \quad \text{avec} \quad \Phi_0 = \frac{h}{e}$$

$\Phi_0$  est le quantum de flux magnétique. On peut le voir comme le flux magnétique contenu dans la surface  $2\pi l_B^2$ . Il joue un rôle important dans de nombreux problèmes quantiques en présence de champ magnétique.

## 2.2 La quantification de la résistance de Hall

Nous allons maintenant essayer de comprendre les données expérimentales de la figure 1. Celles-ci montrent que la résistance de Hall a des plateaux qui dépendent d'un nombre entier  $\nu$ . Dans la partie précédente, nous avons montré que le spectre d'énergie est composé des niveaux de Landau, également repéré par un entier. Chacun de ces niveaux peut contenir un grand nombre, mais un nombre fini d'électrons. On veut montrer que ces entiers sont les mêmes : c'est-à-dire que  $R_H = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu}$  quand précisément le  $\nu$ -ème niveau de Landau est rempli.

8. En physique classique, la résistance de Hall vaut  $R_H = \frac{B}{n_s e}$ . Sur la figure 1, quelle courbe correspond à la résistance de Hall classique ?
9. En comparant la mesure expérimentale  $R_H = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu}$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ) et la prédiction de l'effet Hall classique, quelle est la densité électronique nécessaire pour remplir le  $\nu$ -ème plateau ?
10. Quand un niveau de Landau est complet, il y a un gap d'énergie dans le spectre d'excitation du système.  
 Quel est le coût en énergie pour un électron d'occuper le niveau de Landau suivant ?  
 Pourquoi l'effet Hall quantique s'observe à très basse température ? En dessous de quelle température doit-on refroidir l'échantillon pour observer cet effet ?
11. Si on applique un petit champ électrique ; que se passe-t-il pour la valeur de la résistance électrique  $R_x$  ? Est-ce en accord avec les données expérimentales de la figure 1 ?