Ordres de grandeur et méthodes perturbatives

TD n°5 : Solution auto-semblable de l'équation de diffusion, Développement asymptotique des fonctions de Bessel

Sylvain Nascimbène

1 Solution auto-semblable de l'équation de diffusion

On cherche la solution $u(x,t)$ de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

telle que

- u est auto-semblable (existence d'une invariance de type $u(x,t) = \theta^\alpha u(\theta^\beta x, \theta^\gamma t)$) avec des exposants α, β et γ,
- u satisfait

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\, u(x,0)dx = M_1 \neq 0.$$

1. Effectuer une analyse dimensionnelle du problème et mettre en évidence deux paramètres sans dimension Π_0 et Π_1 tels que la solution auto-semblable s'écrit comme $\Pi_0 = \phi(\Pi_1)$. Pour des raisons pratiques, faire le choix tel que seul Π_0 contient u et que seul Π_1 contient x (au numérateur).
2. En substituant cette forme pour $u(x,t)$ dans l'équation de diffusion, trouver l'équation différentielle ordinaire pour $\phi(z)$.
3. Vérifier que $\phi(z) = Cze^{-\frac{z^2}{4}}$ satisfait cette équation, et déterminer la valeur de la constante C.
4. Identifier les valeurs β/α et γ/α.

2 Développement asymptotique des fonctions de Bessel

1. L'équation de Bessel du n-ème ordre s'écrit

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) f(r) = 0.$$

   Montrer que la fonction $J_n(r)$ définie par la fonction génératrice

$$e^{ir\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(r)$$

   satisfait l'équation différentielle précédente. On utilisera la relation à démontrer $(\Delta + 1)e^{ir\sin\theta} = 0$, où (r,θ) sont les coordonnées polaires 2D.

2. En utilisant l'idée du développement WKB, montrer que la solution de cette équation qui tend vers 0 pour $r \to \infty$ se comporte pour $r \to \infty$ comme

$$f(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \cos(r + A). \tag{1}$$

Quel est le petit paramètre du problème ?
On pourra utiliser le développement $f(r) = e^{\phi(r)}$, et $\phi(r) = a_1 r + \tilde{a}_0 \ln r + a_0 + a_{-1} r^{-1} + \dots$

3. Montrer que $J_n(r)$ peut s'écrire à l'aide de la représentation intégrale

$$J_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta + ir\sin\theta} d\theta.$$

En appliquant la méthode du col à cette représentation, déterminer la constante A dans l'équation (1).