Ordres de grandeur et méthodes perturbatives

TD n°7 : Développement raccordé – Couches limites

Sylvain Nascimbène

1 Un exemple de développement raccordé

On s'intéresse à la solution de l'équation suivante :

$$\epsilon \ddot{y} + \dot{y} = 2x \tag{1}$$

avec les conditions aux limites $y(0) = \alpha$ et $y(1) = \beta$.

1. Qualitativement, que devient cette solution lorsque ϵ tend vers 0 ?
2. Dans cette limite, calculer une solution approchée de cette équation à l'aide d'un développement raccordé.

2 Couche limite et hydrodynamique

Nous nous intéressons à l'équation de Navier-Stokes pour un fluide visqueux en régime stationnaire dans un milieu bidimensionnel et nous allons chercher à étudier divers aspects de la couche limite lorsque l'écoulement se fait à grand nombre de Reynolds $R_e \gg 1$, tout en supposant que ce nombre n'est pas trop grand afin de rester dans le cas laminaire.

1. Écrire l'équation de Navier-Stokes dans cette situation (et avec un champ de pression) et justifier l'existence éventuelle d'une couche limite. On supposera le fluide incompressible.

On se place dans la géométrie suivante : le fluide se déplace dans le demi-plan supérieur et le demi-plan inférieur pour $x > 0$ est occupé par un solide. On force une vitesse $\mathbf{U} = U\mathbf{e_x}$ à grande échelle dans le demi-plan supérieur. La vitesse au bord du solide étant nulle, il y a donc apparition d'une couche limite nécessaire pour raccorder les deux conditions aux limites. Ici, si on suppose que le solide commence en $x = 0$, la couche limite se développe quand on suit le fluide et a une épaisseur $\delta(x_0)$ au point x_0.

2. Donner la dépendance de $\delta(x_0)$ en fonction de x_0. Quel est alors l'ordre de grandeur de $\delta(x_0)/x_0$? Quelles sont les échelles de longueur naturelles selon x et y ?

On notera dans la suite $\mathbf{v} = u\mathbf{e_x} + v\mathbf{e_y}$.

3. Déduire de l'équation $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ l'ordre de grandeur de la composante v.
4. Montrer que l'équation de Navier-Stokes peut se simplifier sous la forme :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3}$$

5. Quel est l'ordre de grandeur de la pression du fluide ? Montrer qu'à l'ordre minimal la pression est uniforme.

6. On cherche une solution autosemblable à l'équation (2), sous la forme

$$u(x,y) = U f(y/\delta(x)).$$

   Comment s'exprime alors la composante $v(x,y)$?

7. Obtenir l'équation de Blasius sur $f(\theta)$:

$$f''(\theta) = -\frac{1}{2} f'(\theta) \int_0^\theta f(\xi) d\xi \tag{4}$$

Pour information, on donne ci-dessous la solution de l'équation de Blasius vérifiant $f(\theta = +\infty) = 1$.