Ordres de grandeur et méthodes perturbatives

TD n°8 : Méthode du groupe de renormalisation

Sylvain Nascimbène

1 Équation de Rayleigh

Nous souhaitons étudier par la méthode du groupe de renormalisation l'équation de Rayleigh

$$y'' + y' = \epsilon \left(y' - \frac{y'^3}{3} \right)$$

qui décrit un oscillateur harmonique d'amortissement non linéaire.

1. On développe la solution $y(t)$ en puissances de ϵ, comme

$$y(t) = y_0(t) + \epsilon\, y_1(t) + O(\epsilon^2).$$

   Écrire l'expression générale de la solution $y_0(t)$ à l'ordre 0.
   Écrire l'équation différentielle pour le terme suivant $y_1(t)$.

2. Résoudre de la manière naïve l'équation différentielle sur $y_1(t)$ et identifier le terme séculaire.
3. Séparer dans le terme séculaire le facteur t en $t - \tau$ et τ. Renormaliser l'amplitude du terme d'ordre 0 de façon à annuler la contribution du facteur en τ.
4. Dériver la solution $y(t)$ par rapport à τ et obtenir l'équation différentielle de renormalisation de l'amplitude.
5. Résoudre l'équation de renormalisation, et écrire le résultat final pour $y(t)$. On choisira les conditions initiales suivantes : $y(0) = a$, $y'(0) = 0$. Quel est le comportement asymptotique de $y(t)$ pour $t \to \infty$?

2 Structure de bandes d'un réseau optique

On considère le mouvement quantique unidimensionnel d'un atome soumis à une onde stationnaire laser de vecteur d'onde k non résonante. Selon le principe de la pince optique, le faisceau laser crée un potentiel proportionnel à son intensité $V(x) = V_0 \cos^2(kx)$. On cherche à déterminer le spectre du Hamiltonien décrivant le mouvement de l'atome dans la limite de profondeur faible.

1. Écrire l'équation de Schrödinger de manière adimensionnée en introduisant notamment l'échelle d'énergie $E_r = \hbar^2 k^2/2m$. Donner une interprétation physique de cette échelle d'énergie. On écrira dans la suite $V_0 = \epsilon E_r$, avec $\epsilon \ll 1$.
2. D'après la théorie de Bloch du mouvement quantique dans un potentiel périodique, autour de quelles valeurs d'énergie E_n ($n \in \mathbb{N}$) s'attend-t-on à l'ouverture d'un gap ?
3. On cherche à déterminer l'amplitude du gap de plus basse énergie en fonction de ϵ. On cherche donc un développement

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \epsilon\, \psi_1(x) + O(\epsilon^2)$$

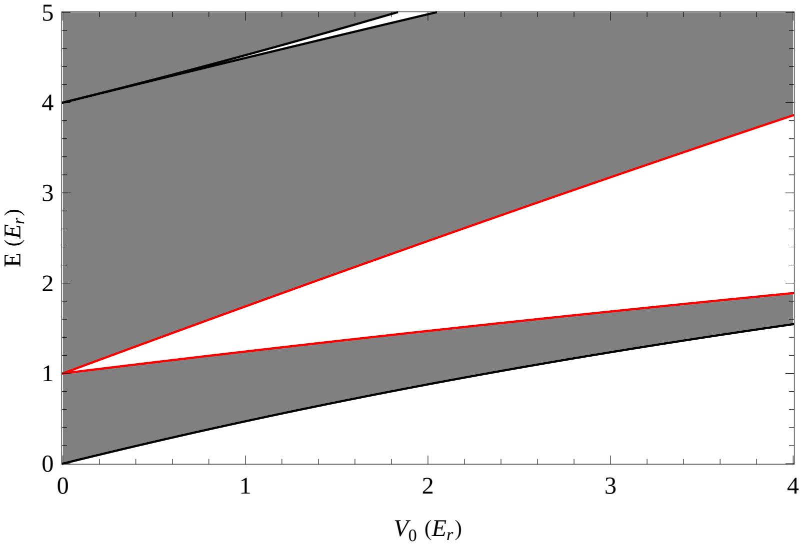

FIGURE 1: Spectre énergétique d'un atome dans un réseau optique calculé numériquement. On s'intéresse à la détermination des frontières délimitant le premier gap (en rouge), dans la limite de faible profondeur.

des fonctions d'ondes propres pour une énergie

$$E = E_0 + \epsilon\, a + O(\epsilon^2),$$

et on cherche une condition sur a pour que $\psi_1(x)$ soit une solution instable.
Montrer que la solution d'ordre 0 peut s'écrire sous la forme

$$\psi_0(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix},$$

4. Écrire l'équation différentielle sur $\psi_1(x)$. La résoudre et exhiber les termes séculaires.
5. Introduire une position intermédiaire $\xi \in [0, x]$, et renormaliser les amplitudes A et B comme

$$\begin{cases} A &= A_R(\xi)(1 + \epsilon Y_1(\xi)) \\ B &= B_R(\xi)(1 + \epsilon Z_1(\xi)) \end{cases}$$

de façon à annuler les termes séculaires en $\xi e^{\pm ix}$.

6. En déduire les équations de renormalisation

$$\begin{cases} \mathrm{d}A_R/\mathrm{d}x &= -\left[(1/2 - a)\, A_R + B_R/4\right]/2i \\ \mathrm{d}B_R/\mathrm{d}x &= \left[(1/2 - a)\, B_R + A_R/4\right]/2i. \end{cases}$$

7. Déterminer l'intervalle $a \in [a_1, a_2]$ pour lequel la solution des équations de renormalisation est instable, et comparer au calcul numérique de la figure 1.