Mathématiques pour physiciens : TD n°2

Probabilités - II

Amir KASHANI-POOR & Sylvain NASCIMBENE

1 Formule de Bayes

En théorie des probabilités, la probabilité conditionnelle d'un événement A, sachant qu'un événement B de probabilité $P(B)$ s'est réalisé, est notée $P(A|B)$ définie par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1}$$

1. p est la probabilité d'obtenir pile lors du tirage biaisé d'une pièce de monnaie. On lance la pièce une infinité de fois. Trouver la probabilité que k piles soient observés après n tirages mais pas avant.
2. Soit $\mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ une partition de l'espace Ω, montrer que
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i). \tag{2}$$
3. Montrer le théorème de Bayes
$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\, P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)\, P(B_j)}. \tag{3}$$
4. On considère m pièces de monnaie. Chacune est caractérisée par une probabilité p_i de faire pile. On lance n fois une pièce prise au hasard et on obtient k résultats pile. Quelle est la probabilité qu'on ait affaire à la pièce i ?
5. On cherche à représenter la fonction $\varphi(p) = p^k(1-p)^{n-k}$. Chercher son maximum ainsi que la dérivée seconde prise au maximum. En déduire la largeur du pic lorsque $k = n/2$ (on suppose n grand).
6. On considère le cas de deux pièces ($m = 2$) dont les p_i sont proches de $1/2$ avec $\Delta p = p_2 - p_1 \ll 1$. Donner un ordre de grandeur du nombre de réalisations nécessaires si l'on veut distinguer les deux pièces.

On s'intéresse maintenant à la version continue du théorème de Bayes.

7. Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $\mathbb{R}$, $F(x)$ est la fonction de répartition, $f(x)$ la densité correspondante. Montrer que
$$P(A|x_1 < X \leq x_2) = \frac{P(x_1 < X \leq x_2|A)}{P(x_1 < X \leq x_2)}\, P(A),$$
en déduire le résultat
$$f(x|A) = \frac{P(A|X = x)\, f(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx P(A|X = x) f(x)}, \tag{4}$$
l'équivalent de l'Eq.(3) pour une variable continue. $f(x|A)$ est la densité de probabilité *a posteriori*. Vérifier sa normalisation.
8. La probabilité d'obtenir pile est maintenant une variable aléatoire P de densité $f(p)$ (décidée une fois pour toute avant la série de tirages). On effectue n tirages pour lesquels on obtient k résultats pile. Déterminer la probabilité de $\{P = p\}$.
9. On suppose maintenant que $f(p)$ est uniforme. Calculer la probabilité déterminée à la question précédente. En déduire que la probabilité d'obtenir pile au prochain tirage $(n+1)$ est donnée par $(k+1)/(n+2)$.

2 Distribution de Cantor

On revient au jeu du pile ou face. La variable aléatoire

$$Y \equiv 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} X_n, \tag{5}$$

où $X_n = \{0, 1\}$, définit le gain total d'un joueur recevant la somme $2/3^n$ si pile est le résultat du n-ième tirage. Soit la répartition de probabilité $P(x) \equiv P[Y \leq x]$

1. Montrer que Y est compris entre 0 et 1. En déduire que $P(0) = 0$ et $P(1) = 1$.
2. On introduit le gain intermédiaire $Y_m \equiv 2 \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{3^n} X_n$ et la répartition correspondante $P_m(x) \equiv P[Y_m \leq x]$. Tracer les courbes $P_1(x)$ et $P_2(x)$.
3. En isolant le premier terme dans l'expression (5) de Y, démontrer les propriétés suivantes :
   - $P(x)$ est constante, égale à $1/2$ sur l'intervalle $[1/3, 2/3]$.
   - le graphe de $P(x)$ sur l'intervalle $[0, 1/3]$ (resp. $[2/3, 1]$) se déduit du graphe complet de $P(x)$ suivant la similitude $P(x) = \frac{1}{2} P(3x)$ (resp. $P(x) = \frac{1}{2} P(3x - 2)$).
4. Déduire des similitudes précédentes que l'ensemble des domaines sur lesquels $P(x)$ est constante est de mesure 1.

On introduit les fonctions génératrices $\phi(t) \equiv \mathbf{E}(e^{itY})$ et $\phi_m(t) \equiv \mathbf{E}(e^{itY_m})$.

5. Montrer que
$$\phi_m(t) = \phi_{m-1}(t) \left(1 + e^{\frac{2it}{3^m}}\right).$$
En déduire que la fonction génératrice de Y est donnée par
$$\phi(t) = e^{it/2} \prod_n \cos\left(\frac{t}{3^n}\right).$$