

Mathématiques pour physiciens : TD n°3

Probabilités - III

Amir KASHANI-POOR & Sylvain NASCIMBENE

1 Composition de variables aléatoires

1. Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires positives de densité $\alpha e^{-\alpha x}$ et $\beta e^{-\beta x}$ respectivement, calculer les densités de probabilité de X^2 , $X + Y$, X^3 et Y/X .

2 Étude de deux variables aléatoires

Soit deux variables aléatoires continues X et Y prenant chacune leurs valeurs x et y dans l'intervalle $[-1, 1]$. La densité de probabilité conjointe de ces deux variables est $p(x, y)$:

$$p(x, y) = \begin{cases} C[1 + xy(x^2 - y^2)] & \text{si } (|x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (1)$$

1. Normaliser la distribution $p(x, y)$.
2. Trouver les distributions marginales $p_X(x)$ et $p_Y(y)$.
3. Que peut-on dire à propos de la dépendance des deux v.a. X et Y ?
4. On désigne par S la somme $X + Y$, et par $F_S(s)$ la fonction de répartition de S .
 - (a) Donner aussi précisément que possible l'allure du graphe de $F_S(s)$ en fonction de s .
 - (b) Écrire l'expression intégrale de $F_S(s)$ en précisant bien le domaine d'intégration ; illustrer par un dessin.
 - (c) En effectuant des changements de variables adéquats dans l'expression précédente, montrer que $F_S(s)$ peut s'écrire, pour $s \leq 0$:

$$F_S(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{s+1} dx \int_{-1}^{s-x} dy [p(x, y) + p(y, x)]. \quad (2)$$

- (d) En déduire l'expression de $F_S(s)$ pour $s \leq 0$.
 - (e) Sans calcul supplémentaire, écrire l'expression de $F_S(s)$ pour $s \geq 0$.
 - (f) Quelle est la distribution $p_S(s)$ de la v.a. S ? En tracer le graphe.
5. Trouver les fonctions caractéristiques $\phi_X(t)$ et $\phi_Y(t)$ des v.a. X et Y .
 6. Quelle est la fonction caractéristique $\phi_S(t)$?
 7. Commenter ce résultat.

3 Processus de Poisson, paradoxe du temps d'attente

On suppose que le temps d'attente entre deux bus à un arrêt suit une loi poissonnienne, l'attente moyenne étant α^{-1} . J'arrive au temps t indépendamment de la statistique d'arrivée des bus. Quel temps moyen dois-je attendre le prochain bus ? Deux réponses semblent s'offrir à moi :

1. Un processus de Poisson est caractérisé par une absence de mémoire. L'attente est donc une loi poissonnienne et le temps moyen est α^{-1} .
2. Le temps t de mon arrivée est choisi au hasard entre le passage de deux bus. Par symétrie, mon temps d'attente devrait être la moitié du temps d'attente entre deux bus, soit $\alpha^{-1}/2$.

On va chercher à résoudre ce paradoxe en posant plus précisément le problème.

1. Soit X_1, X_2, \dots, X_n un ensemble de variables aléatoires exponentielles (autre nom pour Poisson) indépendantes entre elles. Montrer que la variable aléatoire $S_n \equiv X_1 + X_2 + \dots + X_n$ a pour densité de probabilité

$$g_n(x) = \alpha \frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x},$$

correspondant à la fonction de répartition

$$G_n(x) = 1 - e^{-\alpha x} \left(1 + \frac{\alpha x}{1!} + \dots + \frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!} \right).$$

2. On prend n infini et $t > 0$ fixé. On définit la variable aléatoire L_t comme étant égale à $S_k - S_{k-1}$ avec $S_{k-1} < t \leq S_k$. Montrer que L_t a pour densité de probabilité

$$v_t(x) = \begin{cases} \alpha^2 x e^{-\alpha x} & \text{pour } 0 < x \leq t, \\ \alpha(1 + \alpha t) e^{-\alpha x} & \text{pour } x > t. \end{cases} \quad (3)$$

On pourra calculer dans un premier temps la fonction de répartition associée.

3. Quelle est l'espérance correspondante ? Que vaut la distribution pour $t \rightarrow +\infty$?
4. Que peut-on conclure pour notre paradoxe ?