

1 Calculs d'intégrales à l'aide du théorème de Cauchy

1. En intégrant respectivement la fonction $f(z) = e^{iz}/z$ et $f(z) = e^{iz^2}$ sur un chemin d'intégration approprié, calculer

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx \quad , \quad \int_0^\infty \sin(x^2) dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

2. Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne $\exp(-x^2)$ en utilisant l'intégrale sur le périmètre du rectangle de base $[-R, R] + 0.i$ et de hauteur bien choisie.

2 Lemmes de Jordan

Les lemmes qui suivent sont constamment utilisés pour le calcul d'intégrales par la formule des résidus. Il est recommandé de s'en rappeler les démonstrations afin de les adapter éventuellement.

LEMME 1 (LEMME DE JORDAN N° 1) *Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur le secteur $\mathcal{S} = \{z = re^{i\theta}; r > 0 \text{ et } 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi\}$ telle que*

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow 0 \\ z \in \mathcal{S}}} z f(z) = 0 \quad (\text{resp.} \quad \lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \mathcal{S}}} z f(z) = 0).$$

Si l'on note $\gamma(r) = \{re^{i\theta}; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$, alors

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma(r)} f(z) dz = 0 \quad (\text{resp.} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(r)} f(z) dz = 0).$$

LEMME 2 (LEMME DE JORDAN N° 2) *Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur le secteur $\mathcal{S} = \{z = re^{i\theta}; r > 0 \text{ et } 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi\}$ telle que*

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \mathcal{S}}} f(z) = 0.$$

Alors, en notant $\gamma(r) = \{re^{i\theta}; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$, on a

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(r)} f(z) e^{iz} dz = 0.$$

Le second lemme de Jordan est plus spécifiquement utile au calcul des transformées de Fourier.

On donne enfin un dernier lemme dont on doit aussi connaître la démonstration :

LEMME 3 (LEMME DU DEMI-CERCLE) *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} contenant z_0 . Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$, telle que z_0 soit un pôle simple de f . On note, pour $\epsilon > 0$, $\gamma(\epsilon) = \{z = z_0 + \epsilon e^{i\theta}; 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi\}$. Alors*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\epsilon)} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \text{Res}(f, z_0).$$

où $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$ désigne le résidu de f en z_0 (pôle simple).

3 Calculs d'intégrales à l'aide du théorème des résidus

Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration dans le plan complexe :

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^4 + (1-\pi^2)x^2 - \pi^2)} dx$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \quad (\text{pour } 0 < \alpha < 1)$$

$$I_6 = \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^n} dx \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad n > 1 + \alpha > 0)$$

$$I_7 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \alpha \cos \theta} \quad (\text{pour } -1 < \alpha < +1)$$

4 Calculs de sommes de séries à l'aide du théorème des résidus

En utilisant la fonction $f(z) = \frac{1}{z^4 \sin \pi z}$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = \frac{-7\pi^4}{720}.$$