

## Mathématiques : TD n° 9

### Développements asymptotiques d'intégrales

Amir KASHANI-POOR & Sylvain NASCIBENE

Dans ce TD, nous nous proposons d'étudier le comportement de fonctions définies par des intégrales à paramètre du type  $I(t) = \int_{b_1}^{b_2} f(x)e^{tg(x)} dx$  lorsque le paramètre  $t$  tend vers  $+\infty$ . L'intervalle  $]b_1, b_2[$  pourra être non borné.

#### Définitions – Notations

- On dit que la fonction  $f$  est de l'ordre de la fonction  $g$  au voisinage de  $t_0 \in [-\infty, +\infty]$ , si le rapport  $\left| \frac{f(t)}{g(t)} \right|$  est borné au voisinage de  $t_0$ , ce que l'on note  $f(t) = \mathcal{O}_{t \rightarrow t_0}(g(t))$ .
- On dit que la fonction  $f$  est négligeable devant la fonction  $g$  au voisinage de  $t_0 \in [-\infty, +\infty]$ , si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$ , ce que l'on note  $f(t) = o_{t \rightarrow t_0}(g(t))$ .
- On dit que les fonctions  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $t_0 \in [-\infty, +\infty]$ , si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$ , ce que l'on note  $f(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} g(t)$ .
- La fonction Gamma d'Euler se définit pour des réels  $t \in ]0, +\infty[$  sous la forme d'une intégrale comme

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx. \quad (1)$$

On rappelle que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

## 1 Intégration par parties

En faisant des intégrations par parties, calculer les premiers termes du développement asymptotique, lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , des intégrales suivantes :

$$I_1(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x} dx; \quad (2)$$

$$I_2(t) = \int_0^1 \frac{e^{itx}}{1+x} dx. \quad (3)$$

Lorsque l'on ne peut pas se ramener à des intégrations par parties, trois méthodes générales existent selon les valeurs de la fonction  $g(x)$  :

- la méthode de Laplace ( $g$  est réelle);
- la méthode de la phase stationnaire ( $g$  est imaginaire pure);
- la méthode du col ( $g$  est à valeur complexe).

## 2 Méthode de Laplace

Dans cette section, on supposera que les intégrales à paramètre sont absolument convergentes.

## 2.1 Résultat préliminaire

Soient  $\alpha, \beta, a, c$  des réels tels que  $\alpha > -1$ ,  $\beta > 0$ ,  $c > 0$  et  $0 < b \leq +\infty$ . Alors on a l'équivalent

$$J(t) = \int_0^b x^\alpha e^{t(a-cx^\beta)} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\beta}\right) e^{at} (ct)^{-\frac{1+\alpha}{\beta}}. \quad (4)$$

Montrer ce résultat et remarquer que le résultat reste le même que  $b$  soit fini ou infini.

## 2.2 Cas général (admis)

La méthode de Laplace s'applique aux intégrales de la forme

$$I(t) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{tg(x)} dx \quad (5)$$

où  $g$  prend son maximum (supposé fini) en  $x = 0$  et que l'on a les développements asymptotiques au voisinage de 0

$$f(x) \sim Ax^\alpha \quad g(x) = a - cx^\beta + o(x^\beta) \quad (6)$$

où  $A \neq 0$  et  $c, \alpha, \beta$  vérifient les conditions du 2.1. On peut alors montrer que les contributions essentielles au développement asymptotique de  $I(t)$ , lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , sont dues au voisinage de zéro, ce qui revient à remplacer  $I(t)$  par  $J(t)$  et l'on a alors

$$I(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{\beta} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\beta}\right) e^{at} (ct)^{-\frac{1+\alpha}{\beta}}. \quad (7)$$

## 2.3 Cas usuel

Supposons que dans l'intervalle  $]b_1, b_2[$  (borné ou non) les fonctions  $f$  et  $g$  soient de classe  $\mathcal{C}^2$  et que  $g'$  ne change de signe qu'en un unique point  $b_0$  tel que  $b_1 < b_0 < b_2$  où de plus  $g$  atteint un maximum. On suppose  $f(b_0) \neq 0$  et  $g''(b_0) < 0$ . Alors on a

$$I(t) = \int_{b_1}^{b_2} f(x) e^{tg(x)} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} f(b_0) e^{tg(b_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-tg''(b_0)}}. \quad (8)$$

En admettant le cas général, montrer ce résultat.

## 2.4 Applications

1. Retrouver la formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (9)$$

en utilisant le fait que  $\Gamma(n+1) = n!$  et en effectuant un changement de variable tel que le maximum  $b_0$  de la méthode de Laplace soit indépendant de  $n$ .

2. Donner un équivalent lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  de

$$I_3(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t \sin^2 x} dx. \quad (10)$$

## 3 Méthode de la phase stationnaire

Dans cette section, nous supposons que les intégrales à paramètres existent au sens des intégrales généralisées, sans être pour autant absolument convergentes.

Étudions maintenant lorsque le paramètre  $t$  tend vers  $+\infty$  le comportement asymptotique d'intégrales du type

$$I(t) = \int_{b_1}^{b_2} f(x) e^{it\Phi(x)} dx \quad (11)$$

où  $f$  et  $\Phi$  sont des fonctions réelles que nous supposons de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

On se place dans le cas  $-\infty < b_1 < b_2 < +\infty$  et dans l'hypothèse où  $\Phi'$  ne s'annule jamais, montrer que  $I(t) = \mathcal{O}(1/t)$ . Sous les mêmes hypothèses sur  $\Phi$ , qu'en est-il si  $]b_1, b_2[ = ]-\infty, +\infty[$  et que la fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact ?

### 3.1 Résultat préliminaire

Soient  $\alpha, \beta, a, c$  des réels tels que  $c \neq 0, 0 < \alpha + 1 < \beta$ . Alors, pour tout  $b$  tel que  $0 < b \leq +\infty$ , on a l'équivalent

$$\int_0^b x^\alpha e^{it(a+cx^\beta)} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} A \frac{e^{iat}}{\beta(|c|t)^{\frac{1+\alpha}{\beta}}} \quad (12)$$

avec

$$A = \begin{cases} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{\frac{i\pi}{2} \frac{\alpha+1}{\beta}} & \text{si } c > 0 \\ \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{-\frac{i\pi}{2} \frac{\alpha+1}{\beta}} & \text{si } c < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Montrer ce résultat (on établira pour cela que  $\int_0^{+\infty} u^{\lambda-1} e^{\pm iu} du = \Gamma(\lambda) e^{\pm \frac{1}{2}i\pi\lambda}$ ) et remarquer que  $b$  peut être fini ou infini.

### 3.2 Cas général (admis)

On suppose que les fonctions  $f$  et  $\Phi$  vérifient dans l'intervalle  $]0, b[$  les conditions suivantes :

- (i)  $f$  et  $\Phi$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  et que  $\Phi'$  ne s'annule pas ;
- (ii) dans un voisinage de 0, on a

$$f(x) = Cx^\alpha(1 + \theta(x)) \quad \Phi(x) = a + cx^\beta(1 + g(x)) \quad (14)$$

où  $\alpha, \beta, a, c$  sont des constantes réelles telles que  $0 < \alpha + 1 < \beta$  et les fonctions  $\theta$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dans  $[0, b[$  telles  $\theta(0) = g(0) = 0$ . Dans ces conditions, comme pour la méthode de Laplace, on peut montrer qu'on peut remplacer  $f$  et  $\Phi$  par les premiers termes de leur développement asymptotique (c'est-à-dire  $f(x) \simeq Cx^\alpha$  et  $\Phi(x) \simeq a + cx^\beta$ ) ce qui entraîne que

$$I(t) = \int_0^b f(x) e^{it\Phi(x)} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} AC \frac{e^{iat}}{\beta(|c|t)^{\frac{1+\alpha}{\beta}}} \quad (15)$$

où  $A$  est donné par (13).

### 3.3 Cas usuel

On suppose dans  $]b_1, b_2[$  que les fonctions réelles  $f$  et  $\Phi$  sont de  $\mathcal{C}^\infty$ , que  $\Phi'$  ne s'annule qu'en un seul point  $b_0$  tel que  $b_1 < b_0 < b_2$  et que l'on a  $f(b_0) \neq 0, \Phi''(b_0) \neq 0$ . Alors on a l'équivalent

$$I(t) = \int_{b_1}^{b_2} f(x) e^{it\Phi(x)} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \left(\frac{2\pi}{t\Phi''(b_0)}\right)^{1/2} f(b_0) e^{it\Phi(b_0) + i\frac{\pi}{4}} & \text{si } \Phi''(b_0) > 0 \\ \left(\frac{2\pi}{-t\Phi''(b_0)}\right)^{1/2} f(b_0) e^{it\Phi(b_0) - i\frac{\pi}{4}} & \text{si } \Phi''(b_0) < 0 \end{cases} \quad (16)$$

Montrer ce résultat en s'appuyant sur le cas général.

### 3.4 Applications

1. Pour  $n$  entier, donner un équivalent de  $J_n(n)$ , où  $J_n$  désigne la fonction de Bessel ayant pour représentation intégrale

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin x - nx) dx. \quad (17)$$

2. Donner un équivalent, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , de  $J_0(t)$ .
3. Donner un équivalent, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , des intégrales

$$I_4(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it \cos x} dx \quad \text{et} \quad I_5(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx^2 - x) dx. \quad (18)$$

## 4 Méthode du col

### 4.1 Principe de la méthode

La méthode du col (appelée aussi en anglais, *method of steepest descents*) est une méthode pour déterminer un développement asymptotique lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  d'intégrales le long d'un contour  $\gamma$  s'écrivant sous la forme

$$I(t) = \int_{\gamma} f(z)e^{tg(z)} dz \quad (19)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions analytiques sur un domaine  $\Omega$  que l'on supposera simplement connexe.

On suppose que  $g$  possède un point col, c'est-à-dire qu'il existe  $z_0$  tel que  $g'(z_0) = 0$  et nous n'étudierons que le cas « standard » où  $g''(z_0) \neq 0$ . Rappeler l'allure de la surface  $\text{Re}(g(z))$  au voisinage du point col.

Montrer alors que l'on peut déformer le chemin  $\gamma$  en gardant ses extrémités fixes de façon à ce que l'équivalent recherché puisse s'exprimer en appliquant la méthode de Laplace. Si l'on avait voulu se ramener à la méthode de la phase stationnaire, quel chemin aurait-on choisi ?

Expliquer alors pourquoi en choisissant le chemin *ad hoc* on a

$$I(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \pm \sqrt{\frac{2\pi}{t|g''(z_0)|}} e^{i(\frac{\pi-\alpha}{2})} f(z_0) e^{tg(z_0)} \quad (20)$$

où l'on a posé  $g''(z_0) = |g''(z_0)|e^{i\alpha}$ , le signe  $\pm$  dépendant du sens de parcours du chemin déformé.

### 4.2 Applications

#### 4.2.1 Formule de Stirling

Soit  $\gamma$  un lacet simple fermé entourant 0. Que vaut l'intégrale

$$I_n = \int_{\gamma} \frac{e^{(n+1)z}}{z^{n+1}} dz ? \quad (21)$$

En utilisant la méthode du col, retrouver à nouveau la formule de Stirling.

#### 4.2.2 Fonction d'Airy

On cherche l'équivalent, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , de la fonction d'Airy définie sous forme intégrale comme

$$\text{Ai}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{3}s^3 + ts\right) ds. \quad (22)$$

1. Par un changement de variable, mettre cette fonction sous la forme

$$\text{Ai}(t) = \frac{t^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^{3/2}(\frac{1}{3}z^3 + z)} dz. \quad (23)$$

2. En déduire l'équivalent

$$\text{Ai}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}t^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}. \quad (24)$$

On indiquera quels sont les points cols et les lignes de plus grande pente associées.