

Mécanique quantique – L2

TD de soutien 6

Etats liés d'une particule dans un puits - Paire de Cooper

Adrien Mahé – Sylvain Nascimbène

http://www.phys.ens.fr/~nascimbene/td/td_index.html

On s'intéresse à l'existence d'un état lié d'une particule dans un potentiel attractif. Ce problème concerne non seulement les particules dans des potentiels de piégeage imposés de l'extérieur, mais aussi les systèmes de deux particules isolées en interaction, via la séparation du mouvement relatif du mouvement du centre de masse.

On considère une particule de masse m , évoluant dans un potentiel $V(\mathbf{r})$ isotrope, tendant vers 0 à l'infini. Les conditions d'existence d'un état stationnaire lié, c'est-à-dire d'énergie $E < 0$, dépendant fortement de la dimension de l'espace, on considère que la dimension d de l'espace est quelconque.

1. Montrer que l'équation de Schrödinger pour un état stationnaire $|\psi\rangle$ d'énergie E , en représentation $|\mathbf{p}\rangle$, s'écrit sous la forme

$$\left(\frac{p^2}{2m} - E\right)\phi(\mathbf{p}) + \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^d \int d^d q V(\mathbf{q} - \mathbf{p})\phi(\mathbf{q}) = 0,$$

$$\text{où } \phi(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \psi \rangle \quad \text{et} \quad V(p) = \frac{1}{L^d} \int d^d r \exp\left(\frac{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right) V(r).$$

Comment $\phi(\mathbf{p})$ est-il relié à la fonction d'onde dans l'espace des positions $\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle$?

2. On se restreint à un potentiel attractif de portée R simplifié :

$$V(p) = \begin{cases} V_0 < 0 & \text{pour } p \leq 1/R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et on approxime $\int d^d q V(\mathbf{q} - \mathbf{p})\phi(\mathbf{q})$ par $V_0 \int_{q < 1/R} d^d q \phi(\mathbf{q})$. Montrer que

$$\frac{1}{|V_0|} = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^d \int_0^{1/R} \frac{d^d p}{p^2/2m + |E|}, \quad \text{soit encore} \quad \frac{1}{|V_0|} = \int_0^{E_R} d\epsilon \frac{\rho_d(\epsilon)}{\epsilon + |E|},$$

où $E_R = \hbar^2/2mR^2$ et $\rho_d(\epsilon)$ est la densité énergétique d'états stationnaires du problème libre à d dimensions.

A quelle condition sur la densité d'états existe-t-il toujours un état lié, quelle que soit la valeur de V_0 ?

3. Dimension 1

Montrer que la densité d'états à une dimension vaut

$$\rho_1(\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2mL^2}{\hbar^2}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}.$$

En déduire qu'il existe toujours un état lié, d'énergie

$$|E| \propto \frac{|V_0|^2}{\hbar^2/2mL^2}.$$

4. Dimension 2

Montrer que la densité d'états à deux dimensions vaut

$$\rho_2(\epsilon) = \frac{1}{4\pi} \frac{2mL^2}{\hbar^2}.$$

En déduire qu'il existe toujours un état lié, d'énergie exponentiellement petite

$$|E| = E_R \exp\left(-\frac{1}{\rho_2|V_0|}\right).$$

5. Dimension 3

Montrer que la densité d'états à trois dimensions vaut

$$\rho_3(\epsilon) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2mL^2}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}.$$

En déduire qu'il existe un état lié uniquement pour

$$|V_0| > 2\pi^2 \frac{1}{\sqrt{E_R}} \left(\frac{\hbar^2}{2mL^2}\right)^{3/2}.$$

6. Paires de Cooper

Dans un solide le gaz d'électrons peut être considéré comme un gaz formé de particules interagissant faiblement par l'intermédiaire des vibrations du réseau d'ions. Si on considère deux de ces électrons, on peut appliquer la formule précédente, modifiée par la présence des autres électrons de la manière suivante : les électrons étant des fermions, ils obéissent au principe de Pauli et remplissent les états de plus basse énergie, jusqu'à l'énergie dite de Fermi E_F ; ces états ne sont alors plus accessibles et l'intégrale sur l'énergie doit donc être prise de E_F à $E_F + E_R$. Montrer que

$$E_F = \left(6\pi^2\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3}, \quad \text{où } n \text{ est la densité volumique en électrons.}$$

En pratique $E_R \ll E_F$; montrer que les électrons s'apparient (en paires de Cooper), avec une énergie de liaison

$$E - E_F = -E_R \exp \left(-\frac{1}{\rho_3(E_F)|V_0|} \right).$$

Ces paires, stabilisées par la mer de Fermi, sont responsables du phénomène de supraconductivité. Leur faible énergie de liaison explique la nécessité de très basses températures pour observer ce phénomène.

Bibliographie

- L. Cooper, *Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas*, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956)
- J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957)