

Mécanique quantique – L2

TD 2

Adrien Mahé – Sylvain Nascimbène

http://www.phys.ens.fr/~nascimbene/td/td_index.html

1 Fonctions d'opérateurs

Soit $\hat{A}$ une observable dont on note λ_α les valeurs propres et $|\psi_{\alpha,i}\rangle$ les vecteurs propres. Soit de plus f une fonction du plan complexe dans lui-même. On définit l'application linéaire $f(\hat{A})$ par

$$f(\hat{A})|\psi_{\alpha,i}\rangle = f(\lambda_\alpha)|\psi_{\alpha,i}\rangle$$

1. À quelle condition $f(\hat{A})$ est-elle une observable ?
2. Soit $\hat{P}_\alpha$ le projecteur sur le sous-espace propre associé à λ_α . Montrer que

$$f(\hat{A}) = \sum_{\alpha} f(\lambda_\alpha) \hat{P}_\alpha$$

3. Montrer que

$$\hat{P}_\alpha = \prod_{\beta \neq \alpha} \frac{\hat{A} - \lambda_\beta}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}$$

4. *Application*

Soit $\hat{R}$ la matrice définie par

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver les valeurs propres de $\hat{R}$. En déduire la matrice de $f(\hat{R}) = \exp(i\theta\hat{R})$. Cet opérateur est-il une observable ?

5. A partir de maintenant on suppose que f est développable en série entière, de la forme

$$f(z) = \sum_n a_n z^n$$

Montrer que

$$f(\hat{A}) = \sum_n a_n \hat{A}^n$$

6. *Changement de base*

Soit $\hat{U}$ un opérateur unitaire, qui représente un changement de base de vecteurs orthogonaux.

Montrer que

$$\hat{U}^\dagger f(\hat{A}) \hat{U} = f(\hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U})$$

7. Soient $\hat{A}$ et $\hat{B}$ deux observables commutant avec $[\hat{A}, \hat{B}]$.

Montrer que

$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = [\hat{A}, \hat{B}] f'(\hat{B}).$$

Indication : on pourra montrer que pour n entier, on a $[\hat{A}, \hat{B}^n] = n\hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}]$.

Application au cas où $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar$.

2 Notion d'opérateur d'évolution

On considère un système quantique évoluant selon un hamiltonien $\hat{H}(t)$.

1. Écrire l'équation de Schrödinger satisfaite par un ket $|\psi(t)\rangle$.
2. Soit $|\psi(t_0)\rangle$ l'état du système à un instant t_0 . En utilisant la linéarité de l'équation de Schrödinger, montrer qu'à un instant t quelconque on a une relation du type :

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle,$$

où $\hat{U}$ est un opérateur linéaire satisfaisant l'équation différentielle :

$$\begin{cases} i\hbar \partial_t \hat{U} &= \hat{H} \hat{U} \\ \hat{U}(t_0, t_0) &= \text{Id.} \end{cases}$$

$\hat{U}$ est baptisé opérateur d'évolution du système.

3. Soit $\hat{T} = \hat{U}^\dagger \hat{U}$. Montrer que

$$\partial_t \hat{T} = 0.$$

En déduire que $\hat{U}$ est unitaire. À quelle propriété physique ceci est-il rattaché ?

4. Soit $\hat{U}'(t, t_0) = \hat{U}(t, t_1) \hat{U}(t_1, t_0)$. Quelle équation différentielle $\hat{U}'$ satisfait-elle ? En déduire que :

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_1) \hat{U}(t_1, t_0),$$

puis que :

$$\hat{U}(t_1, t_0)^{-1} = \hat{U}(t_0, t_1).$$

5. Dans le cas où $\hat{H}$ est indépendant du temps montrer que :

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i(t-t_0)\hat{H}/\hbar}.$$

3 L'effet Zénon quantique

On considère dans cette partie un système préparé à $t = 0$ dans un état $|\psi_0\rangle$ et évoluant selon un hamiltonien $\widehat{H}_0$ indépendant du temps.

1. Montrer que pour un temps δt suffisamment court, on a :

$$|\psi(\delta t)\rangle = \left(1 - i\delta t \frac{\widehat{H}_0}{\hbar} - \delta t^2 \frac{\widehat{H}_0^2}{2\hbar^2} + O(\delta t^3)\right) |\psi_0\rangle.$$

2. En déduire que la probabilité de trouver le système dans l'état $|\psi_0\rangle$ à l'instant δt s'écrit :

$$P_0(\delta t) = 1 - \frac{\Delta H_0^2}{\hbar^2} \delta t^2 + O(\delta t^3),$$

avec $\Delta H_0^2 = \langle \psi_0 | \widehat{H}_0^2 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | \widehat{H}_0 | \psi_0 \rangle^2$.

3. On réalise des mesures sur le système aux instant $t_1, t_2, \dots, t_N$, avec $t_{i+1} - t_i = \delta t$. Calculer la probabilité $P_0(N, \delta t)$ de trouver à toutes les mesures le système dans l'état $|\psi_0\rangle$. On se placera dans la limite $\delta t \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, avec $N\delta t = T$ fixé.
4. Que trouve-t-on dans le cas d'une observation continue du système ? En déduire qu'une casserole quantique ne bout pas si on l'observe.

Bibliographie

W. M. Itano, D. J. Heinsén, J. J. Bokkinger, D. J. Wineland, « Quantum Zeno effect », Phys. Rev. A **41** 2295 (1990)