Optique

Sylvain Nascimbene

L3 - Formation interuniversitaire de physique - École Normale Supérieure

Ces notes accompagnent le cours d'optique de L3 de la formation interuniversitaire de physique de l'École Normale Supérieure, donné de 2021 à 2025. Elles reprennent le contenu des notes manuscrites du cours.

Table des matières

1 Introduction **5**
1.1 Présentation du cours . . . 5
1.2 Domaines du spectre électromagnétique . . . 5
1.3 Plan du cours . . . 6

2 Rappels d'optique classique **7**
2.1 Décomposition en ondes planes . . . 7
2.1.1 Équation d'onde et relation de dispersion . . . 7
2.1.2 Champ réel et notation complexe . . . 8
2.2 Polarisation de la lumière . . . 9
2.2.1 Vecteur polarisation . . . 9
2.2.2 Caractérisation d'une polarisation linéaire . . . 10
2.2.3 Caractérisation d'une polarisation circulaire . . . 11
2.2.4 Polarisation elliptique : axes propres . . . 11
2.2.5 Conventions . . . 12
2.2.6 Éléments optiques agissant sur la polarisation . . . 14
2.3 Modulation du champ électromagnétique . . . 16
2.3.1 Modulation de phase . . . 16
2.3.2 Modulation d'amplitude . . . 17

3 Introduction au traitement quantique du champ lumineux **18**
3.1 Quantification du champ électromagnétique . . . 20
3.2 Manifestations physiques des fluctuations quantiques du vide . . . 21
3.2.1 Effet Casimir . . . 21
3.2.2 Oscillation de Rabi du vide . . . 24
3.2.3 Émission spontanée . . . 28
3.3 États cohérents semi-classiques . . . 30

4 Interférométrie **33**
4.1 Interféromètres à deux ondes . . . 33
4.1.1 Modélisation d'une lame séparatrice . . . 34
4.1.2 Interféromètre de Mach-Zehnder . . . 35
4.1.3 Applications . . . 35
4.1.4 Interféromètre de Michelson . . . 37
4.2 Interféromètre de Fabry-Perot . . . 39
4.2.1 Interférence des réflexions successives . . . 39
4.2.2 Matrices de diffusion et de transfert . . . 41
4.2.3 Transmission, intervalle spectral libre et finesse . . . 42
4.2.4 Champ dans la cavité . . . 43
4.2.5 Différentes réalisations de cavités résonantes . . . 44
4.2.6 Comportement non linéaire d'un Fabry-Perot . . . 45
4.3 Mesures interférométriques . . . 46
4.3.1 Limite quantique de précision . . . 46
4.3.2 Contraintes sur les différents paramètres . . . 48
4.3.3 Bande passante d'un interféromètre de Fabry-Perot . . . 48
4.3.4 Caractérisation du champ par détection homodyne . . . 50

5 Propagation et diffraction lumineuse **51**
5.1 Propagation dans l'approximation paraxiale . . . 52
5.1.1 Ordres de grandeur . . . 52
5.1.2 Équation de l'enveloppe lentement variable . . . 53
5.1.3 Résolution formelle de l'équation de propagation . . . 54
5.2 Diffraction de Fraunhofer . . . 55
5.2.1 Exemples typiques . . . 56
5.3 Formation des images . . . 57
5.3.1 Conjugaison . . . 57
5.3.2 Résolution d'une image . . . 59
5.3.3 Correction des images à travers un milieu complexe . . . 60
5.4 Modes optiques gaussiens . . . 60
5.4.1 Équations pour l'amplitude et la phase . . . 61
5.4.2 Modes de Hermite-Gauss . . . 61
5.4.3 Taille du faisceau et rayon de courbure . . . 63
5.4.4 Phase de Gouy . . . 64
5.4.5 Propagation d'un faisceau gaussien : matrices ABCD . . . 65
5.4.6 Modes gaussiens dans une cavité optique . . . 67

6 Interaction atome-lumière **72**
6.1 Couplage entre un atome et une onde électromagnétique : équations de Bloch optiques . . . 73
6.1.1 Hamiltonien d'un atome à deux niveaux éclairé par un laser . . . 73
6.1.2 Passage dans le référentiel tournant et approximation de l'onde tournante . . . 73
6.1.3 Oscillation de Rabi . . . 74
6.1.4 Prise en compte de l'émission spontanée : matrice densité . . . 75
6.1.5 Équations de Bloch optiques . . . 77

6.1.6 Limite de forte relaxation transverse : équations de taux 78
6.1.7 Polarisabilité : lien avec le modèle de l'électron élastiquement lié 79
6.2 Effets mécaniques de la lumière sur les atomes 79
6.2.1 Force dipolaire 80
6.2.2 Application : pince optique 81
6.2.3 Pression de radiation 81
6.3 Interaction avec un milieu atomique 83
6.3.1 Susceptibilité d'un milieu atomique 83
6.3.2 Propagation d'une onde dans le milieu 84
6.3.3 Saturation de la susceptibilité 85

7 Théorie semi-classique du laser **85**
7.1 Condition d'oscillation d'un laser 86
7.2 Milieu amplificateur 87
7.2.1 Système à deux niveaux ? 87
7.2.2 Système à trois niveaux 87
7.2.3 Système à quatre niveaux 88
7.2.4 Zoologie des lasers 89
7.3 Modèle de laser continu 90
7.3.1 Équations d'évolution 90
7.3.2 États stationnaires 92
7.3.3 Stabilité des solutions 92
7.3.4 Interprétation : saturation du gain 93
7.3.5 Largeur spectrale d'un laser 94
7.3.6 Limite « fondamentale » : largeur de Schawlow-Townes 95
7.4 Compétition entre modes 97
7.4.1 Modèle de deux modes en compétition 97
7.4.2 Stabilité de la solution multimode 99
7.5 Injection optique 100
7.5.1 Comment favoriser le fonctionnement monomode ? 101
7.6 Lasers à impulsions 102
7.6.1 Principe d'un laser à impulsions : synchronisation des modes . . 103
7.6.2 Réalisation d'un laser à impulsions 104
7.6.3 Impulsions de puissance 106
7.6.4 Applications des lasers à impulsions 106

8 Optique non linéaire **107**
8.1 Milieux non linéaires 107
8.2 Propagation lumineuse dans un milieu non linéaire 108
8.3 Effets non linéaires du second ordre 108
8.3.1 Doublage de fréquence 109
8.3.2 Comment réaliser l'accord de phase ? 110
8.3.3 Au-delà de l'approximation de faible déplétion de la pompe . . . 111
8.3.4 Oscillateur paramétrique optique 113
8.4 Effet Kerr optique 114
8.4.1 Autofocalisation 114
8.4.2 Équation de Schrödinger non linéaire 115

8.4.3 Évolution de la taille du faisceau 115
8.4.4 Soliton de Townes 116

1 Introduction

Ce chapitre présente le cours et fixe son cadre. Nous situons d'abord le domaine de l'optique au sein du spectre électromagnétique, en donnant les ordres de grandeur de longueur d'onde, de fréquence et d'énergie de photon qui serviront tout au long du cours. Nous donnons ensuite le plan des chapitres suivants, en indiquant pour chacun quelques exemples de phénomènes ou d'applications qui l'illustrent.

1.1 Présentation du cours

Ce cours d'optique de niveau L3 a été donné dans le cadre de la formation interuniversitaire de physique de l'École normale supérieure. Il était accompagné de séances de travaux dirigés (assurées par Arnaud Raoux), dont les sujets, comme les notes de cours, étaient disponibles sur les pages web des enseignants.

L'objectif du cours est double. Il s'agit d'abord de consolider les bases de l'optique ondulatoire classique (ondes planes, polarisation, interférences, diffraction), en insistant sur les outils qui sont d'usage courant dans un laboratoire d'optique moderne. Il s'agit ensuite d'introduire les notions qui permettent de comprendre les sources de lumière cohérente et l'interaction de la lumière avec la matière : quantification du champ électromagnétique, interaction atome-lumière, fonctionnement des lasers et optique non linéaire.

1.2 Domaines du spectre électromagnétique

L'optique est l'étude du champ électromagnétique dans un domaine particulier de longueurs d'onde. Pour une onde de longueur d'onde λ dans le vide, la fréquence ν, la pulsation ω et l'énergie $h\nu$ d'un photon sont reliées par

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \qquad \omega = 2\pi\nu, \qquad h\nu = \frac{hc}{\lambda} \simeq \frac{1240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{\lambda}. \tag{1.1}$$

Le spectre électromagnétique s'étend sur un grand nombre d'ordres de grandeur (figure 1). On le découpe conventionnellement en domaines, dont les frontières ne sont qu'indicatives :

- les ondes radio ($\lambda \gtrsim 1\,\mathrm{m}$) et les micro-ondes ($1\,\mathrm{mm} \lesssim \lambda \lesssim 1\,\mathrm{m}$), émises et détectées par des antennes et des circuits électroniques ;
- l'infrarouge ($700\,\mathrm{nm} \lesssim \lambda \lesssim 1\,\mathrm{mm}$), le visible ($400\,\mathrm{nm} \lesssim \lambda \lesssim 700\,\mathrm{nm}$) et l'ultraviolet ($10\,\mathrm{nm} \lesssim \lambda \lesssim 400\,\mathrm{nm}$) ;
- les rayons X ($10\,\mathrm{pm} \lesssim \lambda \lesssim 10\,\mathrm{nm}$) et les rayons γ ($\lambda \lesssim 10\,\mathrm{pm}$).

Le domaine visible correspond à des fréquences $\nu \simeq 430$–$750\,\mathrm{THz}$ et à des énergies de photon $h\nu \simeq 1{,}8$–$3{,}1\,\mathrm{eV}$.

Dans ce cours, le terme « optique » désigne le domaine qui s'étend de l'infrarouge (jusqu'à une dizaine de micromètres) à l'ultraviolet proche (quelques centaines de nanomètres), où l'on manipule la lumière avec des lentilles, des miroirs et des fibres, et où l'on dispose de sources laser. Les énergies de photon y sont de l'ordre de l'électron-volt, c'est-à-dire de l'ordre des énergies des transitions électroniques des atomes et des molécules : c'est ce qui rend l'interaction entre la lumière et la matière si riche dans ce domaine. Quelques longueurs d'onde de référence sont celles du laser hélium-néon

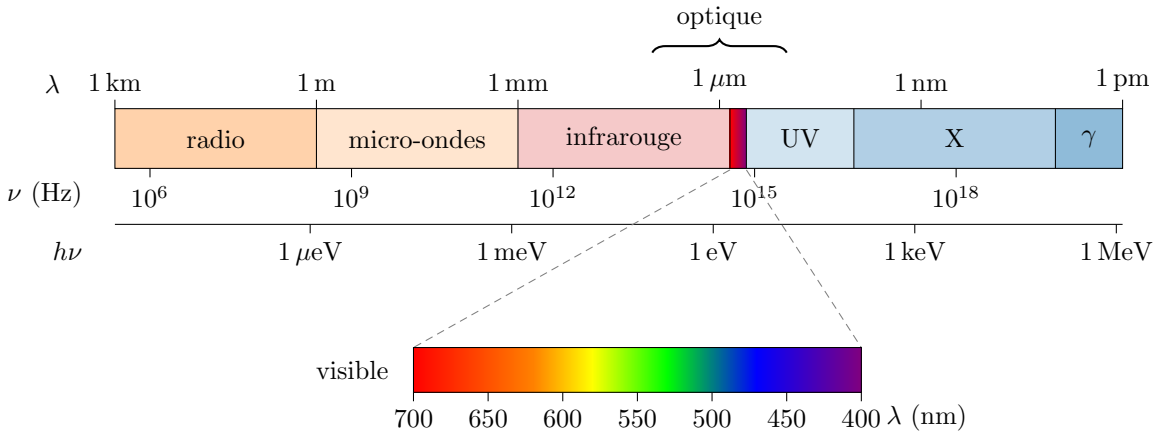


Figure 1 – Domaines du spectre électromagnétique, repérés par la longueur d'onde λ dans le vide (échelle logarithmique, en haut), la fréquence $\nu = c/\lambda$ et l'énergie de photon $h\nu$ (en bas). Les frontières entre domaines sont indicatives. L'optique couvre l'infrarouge, le visible (agrandi en bas, de 700 à 400 nm) et l'ultraviolet proche ; les énergies de photon y sont de l'ordre de l'électron-volt.

(633 nm), du laser Nd:YAG (1064 nm), des télécommunications par fibre optique (1,55 μm) et du laser à CO_2 (10,6 μm).

Les fréquences optiques, de l'ordre de 10^{14}–10^{15} Hz, sont beaucoup trop élevées pour que l'on puisse suivre l'oscillation du champ électrique au cours du temps avec un détecteur électronique. Les détecteurs optiques (photodiodes, caméras, œil) mesurent une intensité lumineuse, moyennée sur un grand nombre de périodes optiques. Nous verrons au chapitre 2 que cette propriété a une conséquence importante : la phase absolue d'une onde lumineuse n'est pas mesurable, seule la phase relative entre deux ondes l'est, par interférence.

1.3 Plan du cours

Le cours est organisé en sept chapitres, après cette introduction.

Rappels d'optique classique. Le chapitre 2 rappelle la décomposition d'un champ électromagnétique quelconque en ondes planes, puis décrit la polarisation de la lumière (caractérisation des polarisations linéaires, circulaires et elliptiques, conventions, éléments optiques agissant sur la polarisation). Il se termine par la modulation du champ électromagnétique, qui permet de transporter de l'information sur une porteuse optique.

Introduction à l'optique quantique. Le chapitre 3 présente la quantification du champ électromagnétique, puis plusieurs manifestations physiques des fluctuations quantiques du vide : l'effet Casimir, force attractive entre deux miroirs parallèles due à la modification des modes du vide entre eux, et l'émission spontanée d'un atome excité, qui se désexcite sous l'effet du couplage aux fluctuations du vide quantique. Il introduit enfin les états cohérents, états quantiques du champ qui se rapprochent le plus d'un champ classique.

Interférométrie. Le chapitre 4 traite des interféromètres à deux ondes, puis de l'interféromètre de Fabry-Pérot, à ondes multiples. Il décrit enfin quelques mesures interférométriques, comme le gyromètre à fibre optique, qui mesure une vitesse de rotation par effet Sagnac, ou la détection des ondes gravitationnelles par les interféromètres kilométriques de type LIGO.

Propagation et diffraction lumineuse. Le chapitre 5 décrit la propagation d'une onde lumineuse dans l'approximation paraxiale, puis la diffraction de Fraunhofer. Il en déduit les limites de résolution d'un système d'imagerie (la tache image d'une étoile par le télescope spatial James Webb est limitée par la diffraction), et présente les modes gaussiens, qui décrivent par exemple le faisceau émis par une cavité optique.

Interaction atome-lumière. Le chapitre 6 présente le modèle de l'électron élastiquement lié, l'émission spontanée et le modèle d'Einstein, puis les équations de Bloch optiques. Il décrit enfin les effets mécaniques de la lumière sur un atome ou une particule, à l'origine des pinces optiques (utilisées par exemple pour étirer des molécules d'ADN) et de la pression de radiation.

Physique des lasers. Le chapitre 7 présente les milieux amplificateurs et les différents types de lasers (lasers à fibre, diodes laser, lasers femtoseconde...), le fonctionnement d'un laser en régime stationnaire et la compétition entre modes, puis les lasers à impulsions.

Optique non linéaire. Le chapitre 8 introduit les milieux optiques non linéaires, puis deux effets importants : le doublage de fréquence, qui permet par exemple d'obtenir un laser vert à partir d'un laser infrarouge, et l'effet Kerr optique, à l'origine de la synchronisation des modes par lentille de Kerr dans les lasers femtoseconde.

2 Rappels d'optique classique

Ce chapitre rappelle les notions d'optique ondulatoire classique sur lesquelles s'appuie la suite du cours. Nous montrons d'abord qu'un champ électromagnétique quelconque dans le vide se décompose en ondes planes, dont les vecteurs d'onde, pulsations et polarisations sont reliés par les équations de Maxwell. Nous étudions ensuite en détail la polarisation de la lumière : comment reconnaître simplement une polarisation linéaire, circulaire ou elliptique, quelles conventions sont utilisées, et comment agir sur la polarisation avec des éléments optiques. Nous décrivons enfin la modulation du champ électromagnétique, qui permet de transporter de l'information sur une onde lumineuse.

2.1 Décomposition en ondes planes

2.1.1 Équation d'onde et relation de dispersion

On considère un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ quelconque. On le décompose en transformée de Fourier, selon

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{k}\, \mathrm{d}\omega \sum_{\boldsymbol{\epsilon}} A(\mathbf{k}, \omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}\, \boldsymbol{\epsilon}, \tag{2.1}$$

écrite en notation complexe. Chaque composante de Fourier est une onde plane de vecteur d'onde $\mathbf{k}$, de pulsation ω et de polarisation $\boldsymbol{\epsilon}$, d'amplitude complexe $A(\mathbf{k},\omega)$ (qui dépend aussi de $\boldsymbol{\epsilon}$, ce que nous omettons dans la notation pour l'alléger). La somme porte sur deux vecteurs de polarisation, que nous préciserons plus bas. Nous cherchons ici les contraintes qui relient les vecteurs d'onde $\mathbf{k}$, les pulsations ω et les polarisations $\boldsymbol{\epsilon}$.

Dans le vide, en l'absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$), le champ électromagnétique obéit aux équations de Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0\partial_t\mathbf{E}\right) = \mu_0\varepsilon_0\,\partial_t\mathbf{E}. \tag{2.3}$$

On en déduit l'équation d'onde en prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E},$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) = -\partial_t\,\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = -\mu_0\varepsilon_0\,\partial_t^2\mathbf{E},$$

où l'on a utilisé $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0$ dans la première ligne, et les équations de Maxwell-Faraday puis de Maxwell-Ampère dans la seconde. On obtient

$$\frac{1}{c^2}\,\partial_t^2\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} = \mathbf{0}, \qquad \text{avec} \qquad \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}. \tag{2.4}$$

Appliquée à une composante de Fourier de l'éq. (2.1), pour laquelle $\partial_t \to -\mathrm{i}\omega$ et $\boldsymbol{\nabla} \to \mathrm{i}\mathbf{k}$, l'équation d'onde donne $(k^2 - \omega^2/c^2)A(\mathbf{k},\omega) = 0$. Seules les composantes vérifiant la relation de dispersion

$$\omega = c\,\|\mathbf{k}\| \tag{2.5}$$

ont donc une amplitude non nulle (on se restreint aux pulsations positives, le champ physique étant la partie réelle du champ complexe, voir plus bas).

Par ailleurs, l'équation $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0$ donne, pour chaque composante de Fourier, $\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon} = 0$: les ondes planes sont transverses,

$$\boldsymbol{\epsilon} \perp \mathbf{k}. \tag{2.6}$$

Pour chaque vecteur d'onde, il y a donc deux polarisations indépendantes, orthogonales à $\mathbf{k}$. La décomposition générale s'écrit finalement

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{k} \sum_{\boldsymbol{\epsilon}\perp\mathbf{k}} A(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\boldsymbol{\epsilon}, \qquad \omega = c\|\mathbf{k}\|, \tag{2.7}$$

où l'amplitude ne dépend plus que de $\mathbf{k}$ (et de $\boldsymbol{\epsilon}$), la pulsation étant fixée par la relation de dispersion. Le champ magnétique associé à chaque onde plane se déduit de l'équation de Maxwell-Faraday, $\mathrm{i}\mathbf{k}\times\mathbf{E} = \mathrm{i}\omega\mathbf{B}$, soit $\mathbf{B} = \mathbf{k}\times\mathbf{E}/\omega$: il est lui aussi transverse, orthogonal à $\mathbf{E}$, et d'amplitude $\|\mathbf{E}\|/c$.

2.1.2 Champ réel et notation complexe

Pour être complet, rappelons que le champ électrique physique est réel. Pour une onde plane de polarisation $\boldsymbol{\epsilon}$ réelle, le champ complexe et le champ réel se correspondent selon

$$A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\boldsymbol{\epsilon} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Re}\left[A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right]\boldsymbol{\epsilon} = E_0\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t - \varphi)\,\boldsymbol{\epsilon}, \tag{2.8}$$

où l'on a écrit $A = E_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$, avec $E_0 > 0$ l'amplitude du champ électrique et φ sa phase. L'amplitude E_0, qui s'exprime a priori en V/m, est plutôt caractérisée en pratique par l'intensité lumineuse, en W/m^2. L'intensité d'une onde plane, moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ (qui vaut $\|\mathbf{E}\|^2/(\mu_0 c) = \varepsilon_0 c\|\mathbf{E}\|^2$ pour les champs réels, puisque $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ et $\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{E}\|/c$), vaut, avec $\langle\cos^2\rangle = 1/2$,

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2. \tag{2.9}$$

Par exemple, une intensité de $1\,\mathrm{W/cm^2}$ correspond à $E_0 \simeq 2{,}7\,\mathrm{kV/m}$.

Phase absolue et phase relative. La phase absolue φ d'une onde lumineuse n'est pas mesurable : la fréquence optique, $\omega/2\pi \sim 10^{14}$–$10^{15}\,\mathrm{Hz}$, est beaucoup trop élevée pour que l'on puisse suivre l'oscillation du champ, et les détecteurs ne sont sensibles qu'à l'intensité. En revanche, la phase relative entre deux ondes est mesurable : elle intervient dans leur interférence, que nous étudierons au chapitre 4.

Validité de la description en ondes planes. Une onde plane a une extension spatiale infinie, ce qui ne décrit jamais exactement un faisceau lumineux réel. La notion d'onde plane est cependant pertinente pour décrire un faisceau

— bien collimaté, c'est-à-dire se propageant selon une direction bien définie ;

— d'extension radiale σ telle que

$$\lambda \ll \sigma \ll R, \tag{2.10}$$

où R est la taille des éléments optiques rencontrés (miroirs, lentilles).

Nous verrons au chapitre 5 comment tenir compte de l'extension radiale finie d'un faisceau.

2.2 Polarisation de la lumière

Nous considérons dans cette partie une onde plane de vecteur d'onde fixé, et nous nous intéressons à sa polarisation. Après avoir paramétré le vecteur polarisation, nous établissons des critères algébriques simples permettant de reconnaître une polarisation linéaire ou circulaire, et de trouver les axes de l'ellipse décrite par le champ dans le cas général. Nous présentons ensuite les conventions usuelles, puis les éléments optiques qui permettent d'agir sur la polarisation.

2.2.1 Vecteur polarisation

On considère une onde plane se propageant selon $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_z$. La polarisation $\boldsymbol{\epsilon} \perp \mathbf{e}_z$ constitue un degré de liberté de dimension 2. On l'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_x}\,\mathbf{e}_x + \epsilon_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_y}\,\mathbf{e}_y, \tag{2.11}$$

avec ϵ_x et ϵ_y réels positifs ou nuls. Le vecteur $\boldsymbol{\epsilon}$ est un vecteur complexe unitaire :

$$\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 = 1. \tag{2.12}$$

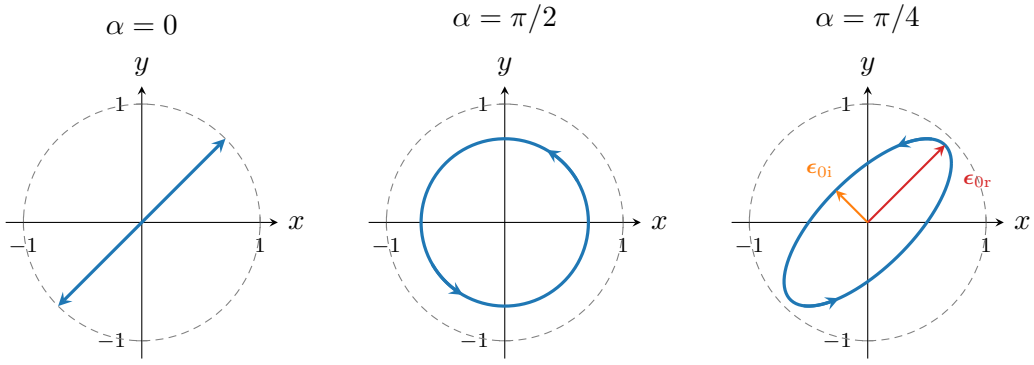


Figure 2 – Courbe décrite par l'extrémité du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{0}, t)/E_0$ au cours d'une période optique, pour la polarisation $\boldsymbol{\epsilon} = (1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})/\sqrt{2}$ de l'éq. (2.14) : polarisation linéaire ($\alpha = 0$), circulaire ($\alpha = \pi/2$) et elliptique ($\alpha = \pi/4$). Les flèches indiquent le sens de parcours. Pour $\alpha = \pi/4$, les vecteurs $\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}}$ et $\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{i}}$, construits dans le texte, donnent le grand axe et le petit axe de l'ellipse. Le cercle en pointillés a un rayon unité.

Le champ électrique réel en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ s'écrit

$$\mathbf{E}(\mathbf{0}, t) = E_0 \,\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]. \tag{2.13}$$

Au cours d'une période optique, l'extrémité du champ électrique décrit en général une ellipse dans le plan xy.

Exemple. On considère la famille de polarisations

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \text{soit} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{0}, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \cos(\omega t - \alpha) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Pour $\alpha = 0$, le champ oscille selon la première bissectrice : la polarisation est linéaire. Pour $\alpha = \pi/2$, $\mathbf{E}(\mathbf{0}, t) = (E_0/\sqrt{2})(\cos \omega t, \sin \omega t)$ décrit un cercle, parcouru dans le sens trigonométrique : la polarisation est circulaire. Pour $\alpha = \pi/4$, on obtient une ellipse (figure 2). Se pose alors la question de trouver les axes de cette ellipse de manière simple et algébrique.

2.2.2 Caractérisation d'une polarisation linéaire

On décompose le vecteur polarisation en parties réelle et imaginaire, $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{r}} + \mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{i}}$, où $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{r}}$ et $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{i}}$ sont des vecteurs réels. On a alors

$$\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right] = \cos(\omega t)\, \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{r}} + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{i}}. \tag{2.15}$$

La polarisation est linéaire si le champ garde une direction fixe, c'est-à-dire si $\mathrm{Re}[\boldsymbol{\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}] \parallel \mathrm{Re}[\boldsymbol{\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}]$ pour tous t, t'. D'après l'éq. (2.15), c'est le cas si et seulement si $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{r}} \parallel \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{i}}$. Or

$$\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\epsilon}^* = (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{r}} + \mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{i}}) \times (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{r}} - \mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{i}}) = -2\mathrm{i}\, \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{i}}. \tag{2.16}$$

On obtient donc le critère

$$\text{polarisation linéaire} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\epsilon}^* = \mathbf{0}, \tag{2.17}$$

autrement dit $\boldsymbol{\epsilon} \parallel \boldsymbol{\epsilon}^*$: le vecteur polarisation est réel, à une phase globale près. On peut aussi le voir en remarquant que, pour $t' = -t$, $\mathrm{Re}[\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] = \mathrm{Re}[(\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})^*] = \mathrm{Re}[\boldsymbol{\epsilon}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}]$: le champ créé par $\boldsymbol{\epsilon}^*$ à l'instant t est celui créé par $\boldsymbol{\epsilon}$ à l'instant $-t$, et doit donc lui être parallèle.

2.2.3 Caractérisation d'une polarisation circulaire

La polarisation est circulaire si la norme du champ, $\|\,\mathrm{Re}[\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}]\|$, est constante. D'après l'éq. (2.15),

$$\left\|\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]\right\|^2 = \cos^2(\omega t)\,\|\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{r}\|^2 + \sin^2(\omega t)\,\|\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{i}\|^2 + 2\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{r}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{i}, \tag{2.18}$$

qui est constant si et seulement si $\|\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{r}\| = \|\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{i}\|$ et $\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{r}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{i} = 0$. Ces deux conditions se résument simplement, en remarquant que

$$\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon} = (\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{r} + \mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{i})\cdot(\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{r} + \mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{i}) = \|\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{r}\|^2 - \|\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{i}\|^2 + 2\mathrm{i}\,\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{r}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_\mathrm{i}. \tag{2.19}$$

On obtient le critère

$$\text{polarisation circulaire} \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon} = 0. \tag{2.20}$$

Notons qu'il s'agit du produit scalaire de $\boldsymbol{\epsilon}$ avec lui-même, sans conjugaison complexe (on a toujours $\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{\epsilon} = 1$). Pour l'exemple de l'éq. (2.14), $\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{\epsilon}^* = -\mathrm{i}\sin\alpha\,\mathbf{e}_z$ et $\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon} = (1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})/2$: on retrouve que la polarisation est linéaire pour $\alpha = 0$ (modulo π) et circulaire pour $\alpha = \pi/2$ (modulo π).

2.2.4 Polarisation elliptique : axes propres

Dans le cas général, on cherche les axes de l'ellipse. Pour cela, on multiplie la polarisation $\boldsymbol{\epsilon}$ par une phase globale bien choisie, en définissant $\boldsymbol{\epsilon}_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\boldsymbol{\epsilon}$ tel que $\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{i}} = 0$. On prend pour cela

$$\psi = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}}}\right) = -\frac{1}{2}\arg(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}). \tag{2.21}$$

Avec ce choix, $\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\psi}\,\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon} = |\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}|$ est réel positif. Comme $\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0 = \|\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}}\|^2 - \|\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{i}}\|^2 + 2\mathrm{i}\,\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{i}}$, on a bien $\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{i}} = 0$, et de plus $\|\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}}\| \geq \|\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{i}}\|$.

On a alors

$$\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\epsilon}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\psi)}\right] = \boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}}\cos(\omega t+\psi) + \boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{i}}\sin(\omega t+\psi), \tag{2.22}$$

d'où, puisque $\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}} \perp \boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{i}}$,

$$\left\|\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]\right\|^2 = \|\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}}\|^2\cos^2(\omega t+\psi) + \|\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{i}}\|^2\sin^2(\omega t+\psi). \tag{2.23}$$

Comme $\|\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}}\| \geq \|\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{i}}\|$, la norme du champ est maximale lorsque $\cos^2(\omega t+\psi) = 1$ et $\sin^2(\omega t+\psi) = 0$; le champ est alors orienté selon $\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}}$. Les vecteurs orthogonaux $\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}}$ et $\boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{i}}$ donnent donc respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse (en unités de E_0). Pour une polarisation circulaire, $\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon} = 0$, la phase ψ n'est pas définie et tous les axes sont équivalents.

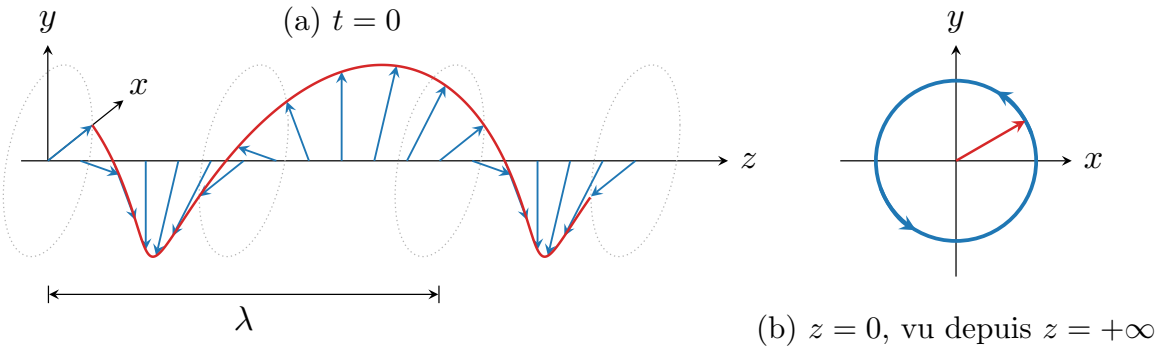


Figure 3 – Polarisation circulaire $\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{e}_x + \mathrm{i}\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$, pour une onde se propageant selon $+z$. (a) Champ électrique (flèches bleues) le long de l'axe z à l'instant $t = 0$; son extrémité décrit une hélice (rouge) de pas λ. Les ellipses grises en pointillés représentent le cylindre sur lequel s'enroule l'hélice. (b) En $z = 0$, vu depuis $z = +\infty$, le champ tourne dans le sens trigonométrique.

Application. Pour l'exemple de l'éq. (2.14) avec $\alpha = \pi/4$, on a $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = (1 + \mathrm{i})/2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}/\sqrt{2}$, d'où $\psi = -\pi/8$ et

$$\boldsymbol{\epsilon}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{r}} = \cos\frac{\pi}{8}\,\frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_{0\mathrm{i}} = \sin\frac{\pi}{8}\,\frac{-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}. \tag{2.24}$$

Le grand axe de l'ellipse est selon la première bissectrice, de demi-longueur $E_0 \cos(\pi/8) \simeq 0{,}92\, E_0$, et le petit axe selon la seconde bissectrice, de demi-longueur $E_0 \sin(\pi/8) \simeq 0{,}38\, E_0$ (figure 2).

2.2.5 Conventions

Polarisations circulaires. On considère la polarisation circulaire

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\mathbf{e}_x + \mathrm{i}\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}, \qquad \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\epsilon}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos(kz - \omega t)\,\mathbf{e}_x - \sin(kz - \omega t)\,\mathbf{e}_y\Big). \tag{2.25}$$

En $z = 0$, le champ $(\cos\omega t, \sin\omega t)/\sqrt{2}$ tourne dans le sens trigonométrique lorsqu'on le regarde depuis $z = +\infty$, c'est-à-dire en faisant face à l'onde qui arrive ; il tourne dans le sens opposé vu depuis $z = -\infty$, c'est-à-dire depuis la source. À un instant donné, par exemple $t = 0$, l'extrémité du champ décrit dans l'espace une hélice, $\mathbf{E} \propto (\cos kz, -\sin kz)$ (figure 3). Au cours du temps, cette hélice se translate en bloc vers les z croissants, à la vitesse c, ce qui revient à la faire tourner autour de l'axe z.

Le sens de rotation du champ et la direction de propagation sont ici reliés par la règle de la main droite : le champ tourne dans le sens positif autour de $\mathbf{e}_z$. On appelle cette polarisation « circulaire droite ». Elle correspond à une hélicité positive : un photon de cette polarisation porte un moment cinétique $+\hbar$ selon sa direction de propagation. Il faut cependant prendre garde au fait que la dénomination droite/gauche varie selon les ouvrages : elle est inversée si l'on décrit l'évolution temporelle du champ vue par un observateur qui fait face à la source, convention fréquente en optique.

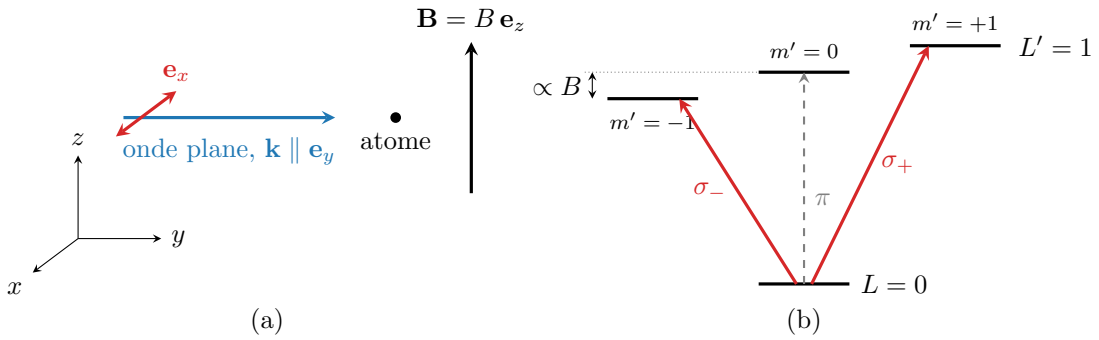


Figure 4 – (a) Onde plane polarisée linéairement selon $\mathbf{e}_x$, se propageant selon $\mathbf{e}_y$, perpendiculairement au champ magnétique $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e}_z$ qui définit l'axe de quantification de l'atome. (b) Transition $L = 0 \to L' = 1$: les sous-niveaux $m' = -1, 0, +1$ du niveau excité sont séparés par effet Zeeman. La polarisation $\mathbf{e}_x = (\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-)/\sqrt{2}$ induit les transitions σ_+ ($m' = +1$) et σ_- ($m' = -1$), mais pas la transition π ($m' = 0$, en pointillés).

Polarisations $\sigma_\pm$ et π en physique atomique. En physique atomique, on impose un axe de quantification, défini par exemple par la direction d'un champ magnétique $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e}_z$ appliqué aux atomes. Cet axe n'a pas de raison d'être aligné avec la direction de propagation de la lumière. Considérons par exemple une onde plane polarisée linéairement selon $\mathbf{e}_x$, qui se propage perpendiculairement à $\mathbf{B}$ (figure 4a), et une transition atomique entre un niveau fondamental de moment cinétique $L = 0$ et un niveau excité de moment cinétique $L' = 1$. Le niveau excité comporte trois sous-niveaux $m' = -1, 0, +1$, dont les énergies sont séparées par effet Zeeman d'une quantité proportionnelle à B (figure 4b).

Pour savoir quelles transitions se produisent, on décompose la polarisation de la lumière sur la base

$$\sigma_+ : \ \mathbf{e}_+ = \frac{\mathbf{e}_x + \mathrm{i}\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}, \qquad \pi : \ \mathbf{e}_z, \qquad \sigma_- : \ \mathbf{e}_- = \frac{\mathbf{e}_x - \mathrm{i}\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}, \tag{2.26}$$

définie par rapport à l'axe de quantification. Une composante de polarisation $\mathbf{e}_+$ (respectivement $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_-$) induit les transitions $m \to m' = m + 1$ (respectivement $m' = m$, $m' = m - 1$). En effet, le couplage atome-lumière fait intervenir l'élément de matrice $\langle m'|\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}|m\rangle$ du dipôle électrique $\mathbf{d}$ de l'atome (chapitre 6), et $\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_+ = (d_x + \mathrm{i}d_y)/\sqrt{2}$ augmente la projection du moment cinétique d'une unité, comme l'opérateur $\hat{L}_+ = \hat{L}_x + \mathrm{i}\hat{L}_y$. Pour l'onde polarisée selon $\mathbf{e}_x$, on a

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-}{\sqrt{2}}, \tag{2.27}$$

si bien que la lumière se couple aux deux sous-niveaux $m' = \pm 1$, et pas au sous-niveau $m' = 0$. Lorsque la lumière se propage selon l'axe de quantification, $\mathbf{e}_\pm$ sont les polarisations circulaires d'hélicité ± 1 ; dans le cas général, en revanche, une polarisation $\sigma_\pm$ n'est pas une polarisation circulaire. Notons enfin que la base usuelle des composantes sphériques, $\mp(\mathbf{e}_x \pm \mathrm{i}\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$, diffère de l'éq. (2.26) par un signe, ce qui ne change pas les règles de sélection.

Polarisations s et p. Une dernière convention concerne la réflexion ou la réfraction de la lumière sur un dioptre. Le plan d'incidence est défini par la normale $\mathbf{n}$ au dioptre et le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ de l'onde incidente. On appelle polarisation p (de l'allemand *parallel*) une polarisation linéaire dans le plan d'incidence, et polarisation s (de l'allemand *senkrecht*, perpendiculaire) une polarisation linéaire perpendiculaire au plan d'incidence (figure 5a). Ces deux polarisations ne sont pas mélangées par la réflexion ou la réfraction, et ont des coefficients de réflexion et de transmission différents.

2.2.6 Éléments optiques agissant sur la polarisation

Cube séparateur de polarisation. Un cube séparateur de polarisation (souvent noté PBS, pour *polarizing beam splitter*) transmet la polarisation p et réfléchit la polarisation s (figure 5b). Il utilise la différence entre les coefficients de réflexion et de transmission des polarisations s et p (on peut penser à l'incidence de Brewster, pour laquelle la polarisation p n'est pas réfléchie). Pour réaliser un PBS, on dépose entre les deux prismes qui forment le cube un traitement diélectrique multicouche bien choisi, qui rend la séparation très efficace.

Lames d'onde. Les lames d'onde utilisent des matériaux biréfringents, dont l'indice de réfraction dépend de la direction de la polarisation. Une lame d'onde possède deux axes propres orthogonaux $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_{\theta\perp}$, et introduit un retard de phase φ sur l'axe $\mathbf{e}_\theta$ par rapport à l'axe $\mathbf{e}_{\theta\perp}$ (figure 5c). On utilise principalement les lames quart d'onde (notées $\lambda/4$, $\varphi = \pi/2$) et demi-onde (notées $\lambda/2$, $\varphi = \pi$). En décomposant la polarisation incidente sur les axes de la lame, on obtient la polarisation en sortie (à une phase globale près ; avec la convention $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$, un retard de phase φ, dû à un chemin optique supplémentaire, se traduit par un facteur $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi}$)

$$\boldsymbol{\epsilon} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\epsilon}' = (\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{e}_\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathbf{e}_\theta + (\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{e}_{\theta\perp})\,\mathbf{e}_{\theta\perp}. \tag{2.28}$$

Pour une polarisation incidente linéaire $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{e}_x$, avec $\mathbf{e}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\mathbf{e}_{\theta\perp} = (-\sin\theta, \cos\theta)$, on obtient

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} - \sin\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

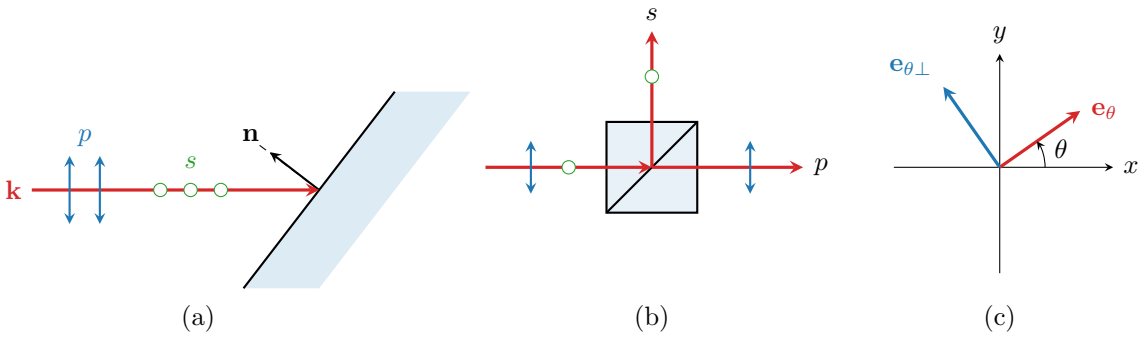
Lame demi-onde. Pour $\varphi = \pi$,

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \begin{pmatrix}-\cos^2\theta + \sin^2\theta\\ -2\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\cos 2\theta\\ \sin 2\theta\end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

On obtient à nouveau une polarisation linéaire, tournée d'un angle 2θ : une lame demi-onde permet de faire tourner une polarisation linéaire d'un angle quelconque.

Lame quart d'onde. Pour $\varphi = \pi/2$,

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \begin{pmatrix}\sin^2\theta + \mathrm{i}\cos^2\theta\\ -\sin\theta\cos\theta + \mathrm{i}\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}. \tag{2.31}$$



(a) (b) (c)

Figure 5 – (a) Réflexion sur un dioptre de normale $\mathbf{n}$: le plan d'incidence, contenant $\mathbf{k}$ et $\mathbf{n}$, est le plan de la figure. La polarisation p (flèches) est dans ce plan, la polarisation s (points) lui est perpendiculaire. (b) Cube séparateur de polarisation : la polarisation p est transmise et la polarisation s est réfléchie. (c) Axes propres $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_{\theta\perp}$ d'une lame d'onde, qui introduit un retard de phase φ sur l'axe $\mathbf{e}_\theta$ par rapport à l'axe $\mathbf{e}_{\theta\perp}$.

Utilisons les critères établis plus haut. La polarisation $\boldsymbol{\epsilon}'$ est linéaire si $\boldsymbol{\epsilon}' \times \boldsymbol{\epsilon}'^* = \mathbf{0}$. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\epsilon}' \times \boldsymbol{\epsilon}'^*) \cdot \mathbf{e}_z &= \epsilon'_x \epsilon'^*_y - \epsilon'_y \epsilon'^*_x \\ &= [\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta - \mathrm{i}\sin\theta\cos\theta] - [\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta + \mathrm{i}\sin\theta\cos\theta] \\ &= -\mathrm{i}\sin 2\theta, \end{aligned} \tag{2.32}$$

qui s'annule pour $\theta = n\pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$: la polarisation reste linéaire si et seulement si la polarisation incidente est alignée selon l'un des axes propres de la lame. La polarisation $\boldsymbol{\epsilon}'$ est circulaire si $\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \boldsymbol{\epsilon}' = 0$. On calcule

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \boldsymbol{\epsilon}' &= \left(\sin^2\theta + \mathrm{i}\cos^2\theta\right)^2 + \sin^2\theta\cos^2\theta\,(-1+\mathrm{i})^2 \\ &= \sin^4\theta - \cos^4\theta + 2\mathrm{i}\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\mathrm{i}\sin^2\theta\cos^2\theta \\ &= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -\cos 2\theta, \end{aligned} \tag{2.33}$$

qui s'annule pour $\theta = \pi/4 + n\pi/2$. Par exemple, pour $\theta = \pi/4$, $\boldsymbol{\epsilon}' = \frac{1+\mathrm{i}}{2}(\mathbf{e}_x + \mathrm{i}\mathbf{e}_y)$: une lame quart d'onde dont les axes sont à 45° d'une polarisation linéaire la transforme en polarisation circulaire. Pour les autres valeurs de θ, la polarisation obtenue est elliptique.

Remarques.

— L'association d'une lame demi-onde et d'un cube séparateur de polarisation permet d'ajuster la puissance d'un faisceau polarisé linéairement. Si le faisceau incident est polarisé selon l'axe $\mathbf{e}_x$ transmis par le cube, la lame demi-onde tourne la polarisation de 2θ, d'après l'éq. (2.30), et la puissance transmise par le cube vaut $P\cos^2(2\theta)$, le reste, $P\sin^2(2\theta)$, étant réfléchi.

— Les lames d'onde introduisent un retard

$$\varphi = \frac{2\pi\,\Delta n\,d}{\lambda}, \tag{2.34}$$

où Δn est la différence entre les indices de réfraction des deux axes et d l'épaisseur de la lame. La biréfringence Δn varie faiblement avec λ, si bien que $\varphi \propto 1/\lambda$:

une lame d'onde n'est adaptée qu'à une longueur d'onde donnée ! La sensibilité à la longueur d'onde, $\delta\varphi \simeq -\varphi\,\delta\lambda/\lambda$, est proportionnelle au retard total φ. Elle est donc la plus faible pour les lames dites « d'ordre 0 », pour lesquelles $\Delta n\, d = \lambda/4$ ou $\lambda/2$, plutôt qu'un multiple de λ augmenté de $\lambda/4$ ou $\lambda/2$.

2.3 Modulation du champ électromagnétique

Un laser monofréquence, dont le champ $E_0 \cos(\omega_0 t)$ oscille indéfiniment avec une amplitude et une phase fixées, ne transporte pas d'information. Pour véhiculer de l'information, on module le champ à des fréquences $\Omega \ll \omega_0$. L'intérêt est que le signal contenu dans la modulation à Ω est physiquement transporté par de la lumière à des fréquences proches de ω_0 :

— on peut ainsi le propager dans une fibre optique, sur de grandes distances et avec de faibles pertes ;

— on peut faire du multiplexage, c'est-à-dire transporter simultanément sur la même porteuse beaucoup de signaux de fréquences Ω_n différentes, leur nombre étant limité par ω_0, qui est très élevée.

On distingue deux types de modulations (figure 6) :

— la modulation de phase, $f(t) = \cos(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t)$;

— la modulation d'amplitude, $f(t) = (1 + \beta \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$.

Dans les deux cas, β est appelé paramètre (ou indice) de modulation. Pour la modulation de phase, la pulsation instantanée, dérivée de la phase par rapport au temps, vaut $\omega_0 + \beta\Omega \cos \Omega t$: elle oscille autour de ω_0 avec une amplitude $\beta\Omega$.

2.3.1 Modulation de phase

En notation complexe, le champ modulé en phase s'écrit

$$E(t) = E_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t)} = E_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\, g(t), \qquad g(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta \sin \Omega t}. \tag{2.35}$$

Le signal de modulation $g(t)$ est périodique, de période $T = 2\pi/\Omega$. Il se décompose en série de Fourier,

$$g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Omega t}, \tag{2.36}$$

avec, en posant $\theta = \Omega t$,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta \sin \Omega t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta \sin \theta - n\theta)}\, \mathrm{d}\theta = J_n(\beta), \tag{2.37}$$

où J_n est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n. On obtient donc

$$g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(\beta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Omega t}, \qquad \text{soit} \qquad E(t) = E_0 \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(\beta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 + n\Omega)t}. \tag{2.38}$$

Le spectre du champ modulé en phase est un peigne de fréquences $\omega_0 + n\Omega$, appelées bandes latérales, d'amplitudes $J_n(\beta)$. Les fonctions de Bessel vérifient $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$; elles sont représentées sur la figure 7. Comme $|g(t)| = 1$, l'égalité de Parseval donne $\sum_n J_n(\beta)^2 = 1$: la modulation de phase redistribue la puissance de la porteuse dans les bandes latérales. Pour $\beta \ll 1$, on a

$$J_0(\beta) \simeq 1 - \frac{\beta^2}{4}, \qquad J_1(\beta) \simeq \frac{\beta}{2}, \qquad J_2(\beta) \simeq \frac{\beta^2}{8}. \tag{2.39}$$

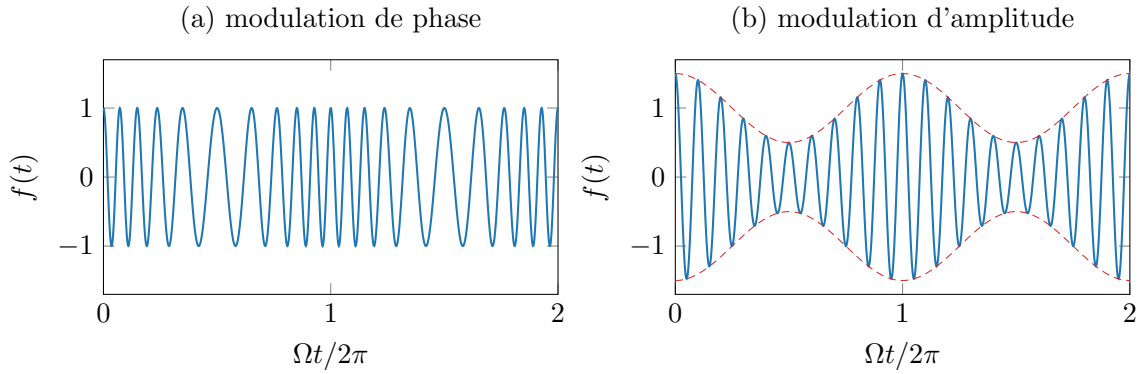


Figure 6 – (a) Signal modulé en phase, $f(t) = \cos(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t)$: l'amplitude est constante, mais les oscillations sont alternativement resserrées et étirées. (b) Signal modulé en amplitude, $f(t) = (1 + \beta \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, avec son enveloppe (pointillés). Pour la lisibilité, on a pris $\omega_0 = 10\,\Omega$, ainsi que $\beta = 4$ en (a) et $\beta = 0{,}5$ en (b).

Au premier ordre en β, on ne garde que la porteuse et les deux premières bandes latérales,

$$E(t) \simeq E_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \left[1 + \frac{\beta}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\right)\right], \tag{2.40}$$

qui correspondent aux pulsations $\omega_0 + \Omega$ et $\omega_0 - \Omega$, avec des amplitudes opposées.

Représentation de Fresnel. Il est instructif de suivre l'évolution au cours du temps des trois composantes de fréquence de l'éq. (2.40), dans le plan complexe et dans le référentiel tournant à la pulsation ω_0 de la porteuse, c'est-à-dire en considérant $E(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ (figure 8a). La porteuse est alors fixe. La bande latérale $\omega_0 + \Omega$, d'amplitude $\beta/2$, tourne à la pulsation Ω dans un sens, et la bande latérale $\omega_0 - \Omega$, d'amplitude $-\beta/2$, tourne à la même pulsation dans le sens opposé. À $t = 0$, les deux bandes latérales se compensent ; à $t = \pi/(2\Omega)$, elles s'ajoutent, perpendiculairement à la porteuse. Le champ total vaut

$$E(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \simeq E_0\,(1 - \mathrm{i}\beta \sin \Omega t)\,: \tag{2.41}$$

la somme des deux bandes latérales, $-\mathrm{i}\beta E_0 \sin \Omega t$, reste toujours perpendiculaire à la porteuse. On a donc toujours $|E| = E_0$ au premier ordre en β, tandis que la phase $-\beta \sin \Omega t$ oscille : il s'agit bien d'une modulation de phase.

2.3.2 Modulation d'amplitude

Le champ modulé en amplitude s'écrit

$$E(t) = E_0\,(1 + \beta \cos \Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} = E_0 \left[1 + \frac{\beta}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\right)\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}. \tag{2.42}$$

Son spectre ne comporte, quelle que soit la valeur de β, que la porteuse et deux bandes latérales aux pulsations $\omega_0 \pm \Omega$, cette fois de même amplitude $\beta/2$. Dans la représentation de Fresnel (figure 8b), les deux bandes latérales tournent en sens opposés, et leur somme $\beta \cos \Omega t$ est toujours parallèle à la porteuse : maximale à $t = 0$, nulle à $t = \pi/(2\Omega)$,

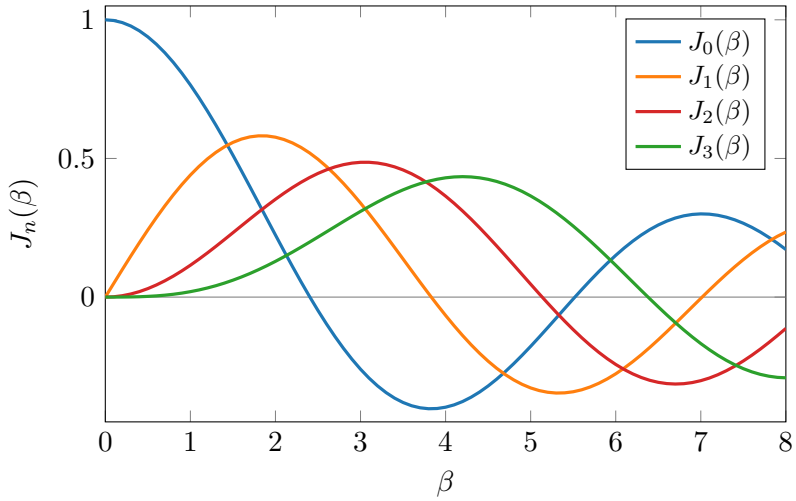


Figure 7 – Fonctions de Bessel $J_n(\beta)$ pour $n = 0$ à 3, qui donnent l'amplitude de la porteuse ($n = 0$) et des bandes latérales $\omega_0 \pm n\Omega$ d'un champ modulé en phase, en fonction de l'indice de modulation β. Pour $\beta \ll 1$, $J_n(\beta) \propto \beta^n$.

opposée à la porteuse à $t = \pi/\Omega$. On a donc toujours $\arg E = -\omega_0 t$ (pour $\beta < 1$), et seul le module du champ est modulé.

La différence entre les deux types de modulation tient donc uniquement à la phase relative des bandes latérales par rapport à la porteuse : en phase pour la modulation d'amplitude, en quadrature pour la modulation de phase.

3 Introduction au traitement quantique du champ lumineux

Dans les chapitres précédents, la lumière a été décrite comme un champ électromagnétique classique. Cette description suffit pour rendre compte de la plupart des phénomènes optiques : elle est pertinente pour les sources thermiques (incohérentes), mais aussi pour un laser, dont les modes électromagnétiques sont très peuplés. Il existe cependant des situations où la nature quantique du champ joue un rôle essentiel. C'est le cas des expériences d'optique quantique réalisées avec des sources laser très atténuées, ou avec des sources de photons uniques ; ces expériences requièrent également des détecteurs capables de compter les photons un par un, avec une grande efficacité.

Dans ce chapitre, nous introduisons la quantification du champ électromagnétique dans sa version la plus simple, en associant à chaque mode du champ un oscillateur harmonique quantique. Nous verrons que le champ électrique possède alors des fluctuations même dans son état fondamental, le vide. Nous décrirons trois manifestations physiques de ces fluctuations du vide : l'effet Casimir, l'oscillation de Rabi du vide et l'émission spontanée. Nous introduirons enfin les états cohérents, qui sont les états quantiques du champ les plus proches d'une onde classique, et qui décrivent en particulier la lumière émise par un laser.

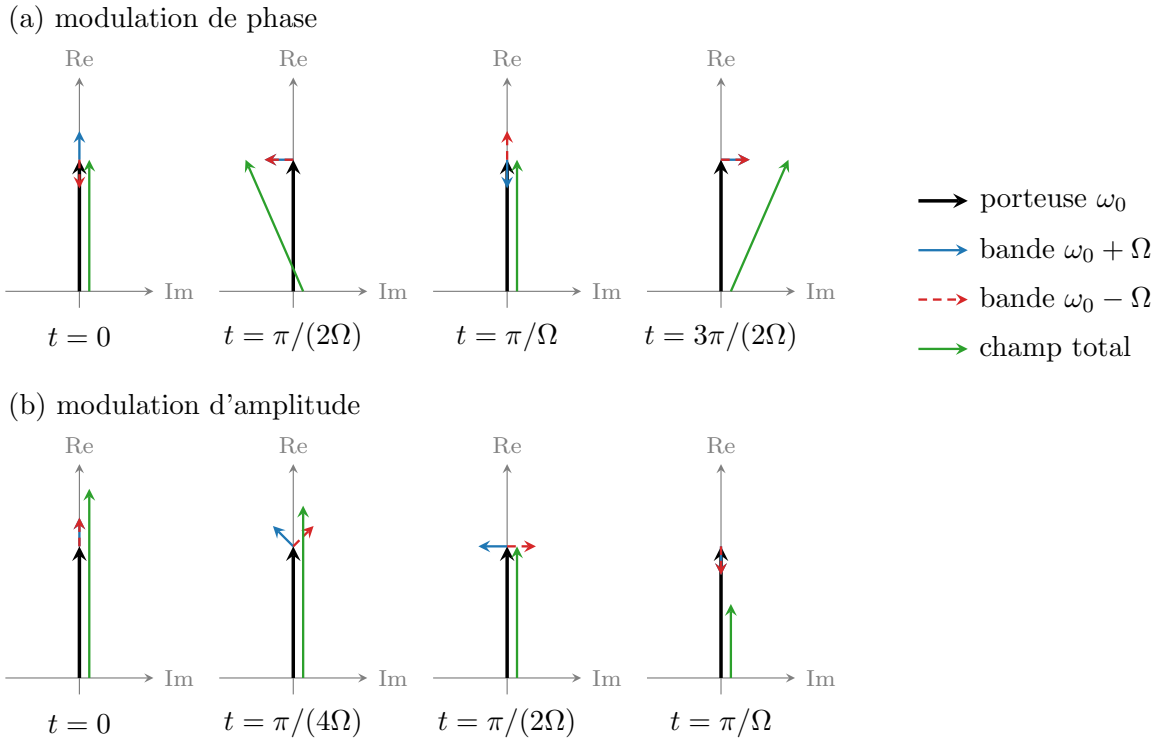


Figure 8 – Représentation de Fresnel du champ modulé, dans le référentiel tournant à la pulsation ω_0 de la porteuse (axe vertical : partie réelle, axe horizontal : partie imaginaire de $E\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$), à différents instants. (a) Modulation de phase pour $\beta \ll 1$: les bandes latérales $\omega_0 \pm \Omega$, d'amplitudes opposées, ont une somme toujours perpendiculaire à la porteuse, si bien que le module du champ total est constant au premier ordre en β. (b) Modulation d'amplitude : la somme des bandes latérales est toujours parallèle à la porteuse, et seul le module du champ varie. L'indice β est exagéré pour la lisibilité.

3.1 Quantification du champ électromagnétique

On ne discute pas ici de la polarisation du champ, que l'on traite comme un champ scalaire. L'énergie du champ électromagnétique contenu dans un volume V s'écrit

$$H = \int \mathrm{d}^3 r \, \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right). \tag{3.1}$$

Dans le vide, le champ se décompose sur des modes indépendants, caractérisés par un vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et une pulsation $\omega = c|\mathbf{k}|$: les équations de Maxwell étant linéaires, ces différents modes contribuent de manière indépendante à l'énergie (3.1).

Pour un mode de pulsation ω, on souhaite reconnaître dans E et B deux observables conjuguées, analogues à la position et à l'impulsion d'un oscillateur harmonique. Pour un mode stationnaire, par exemple, les champs électrique et magnétique oscillent en quadrature, comme x et p, et l'énergie du mode a la même structure que celle d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2. \tag{3.2}$$

On rappelle que, pour l'oscillateur harmonique, la position s'exprime à l'aide des opérateurs d'annihilation $\hat{a}$ et de création $\hat{a}^\dagger$ sous la forme

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \, \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \tag{3.3}$$

et que le hamiltonien s'écrit $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)$. Par analogie, on pose pour le champ électrique du mode

$$\hat{E} = E_0 \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \right), \tag{3.4}$$

où E_0 est une constante, homogène à un champ électrique, qui représente la valeur typique du champ dans le vide quantique. Les états propres du hamiltonien du mode sont les états de Fock $|n\rangle$, qui contiennent n photons, d'énergie $\hbar\omega(n + 1/2)$.

On détermine E_0 en écrivant que, dans le vide quantique $|0\rangle$, l'énergie du mode vaut $\hbar\omega/2$. On suppose pour simplifier que l'intensité du mode est uniforme dans le volume V qu'il occupe (c'est le cas d'une onde progressive dans une boîte de volume V). Dans l'état $|0\rangle$, on a $\langle 0|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2|0\rangle = \langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = 1$, et les énergies électrique et magnétique moyennes sont égales, comme pour l'énergie potentielle et l'énergie cinétique de l'oscillateur harmonique. On doit donc avoir

$$\frac{\hbar\omega}{2} = \int \mathrm{d}^3 r \, \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{\langle B^2 \rangle}{\mu_0} \right) = \int \mathrm{d}^3 r \, \varepsilon_0 E_0^2 = V \varepsilon_0 E_0^2, \tag{3.5}$$

d'où

$$E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}. \tag{3.6}$$

Dans le vide, la valeur moyenne du champ électrique est nulle, $\langle 0|\hat{E}|0\rangle = 0$, mais ses fluctuations ne le sont pas : $\Delta E = E_0$. Ce champ du vide est d'autant plus grand que le volume du mode est petit. Les parties suivantes montrent que ces fluctuations quantiques du vide ont des conséquences physiques observables.

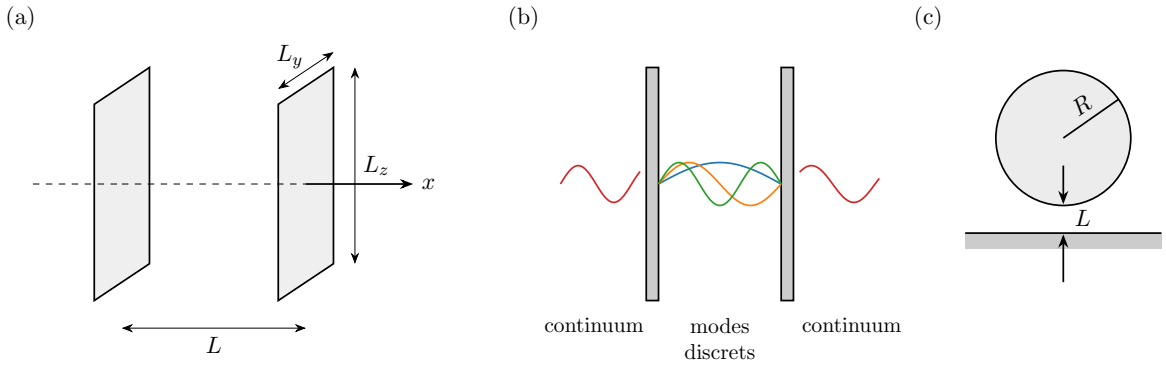


Figure 9 – (a) Géométrie de l'effet Casimir : deux plaques métalliques parallèles de dimensions $L_y \times L_z$, séparées d'une distance $L \ll L_y, L_z$. (b) Entre les plaques, seuls des modes discrets sont permis, alors qu'à l'extérieur les modes forment un continuum. (c) Géométrie sphère-plan utilisée dans les mesures de précision : une sphère de rayon R est placée à une distance $L \ll R$ d'un plan.

3.2 Manifestations physiques des fluctuations quantiques du vide

Nous décrivons dans cette partie trois phénomènes qui trouvent leur origine dans les fluctuations quantiques du champ électromagnétique dans le vide : la force de Casimir entre deux miroirs, l'oscillation de Rabi d'un atome couplé à un mode de cavité vide, et l'émission spontanée d'un atome excité.

3.2.1 Effet Casimir

On considère deux plaques métalliques parallèles, de dimensions $L_y \times L_z$, séparées d'une distance $L \ll L_y, L_z$ (figure 9a). Entre les plaques, les conditions aux limites imposées par les miroirs ne permettent qu'un ensemble discret de modes électromagnétiques, alors qu'à l'extérieur, les modes forment un continuum (figure 9b). Les fluctuations quantiques des modes électromagnétiques induisent une pression de radiation sur les miroirs. La différence entre les pressions dues aux modes discrets, à l'intérieur, et au continuum, à l'extérieur, conduit à une force totale non nulle, *attractive*, entre les miroirs [1].

Calcul de la force de Casimir. Les modes électromagnétiques permis entre les deux plaques ont des pulsations

$$\omega = c\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + k_\perp^2}, \tag{3.7}$$

où n est un entier positif ou nul, et $\mathbf{k}_\perp$ le vecteur d'onde dans le plan des plaques. Pour chaque mode $n \neq 0$, deux polarisations sont possibles ; il n'existe qu'une seule polarisation pour $n = 0$, perpendiculaire aux plaques. À température nulle, chaque mode est dans son état fondamental, et l'énergie électromagnétique dans la cavité vaut

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{\text{modes } (n,\mathbf{k}_\perp)} \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{3.8}$$

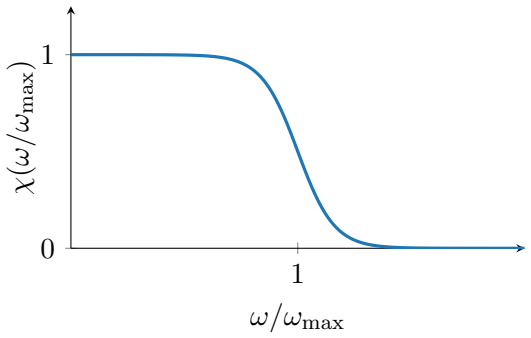


Figure 10 – Fonction de coupure $\chi(\omega/\omega_{\max})$ modélisant la transparence des miroirs métalliques au-delà de la pulsation $\omega_{\max}$. Le résultat final pour la force de Casimir ne dépend pas de la forme précise de cette fonction.

(on la note $\mathcal{E}_0$ pour ne pas la confondre avec l'amplitude E_0 du champ du vide). Le nombre de modes étant infini, on obtient a priori un résultat infini. En pratique, les miroirs deviennent transparents au-delà d'une pulsation de coupure $\omega_{\max}$ (de l'ordre de la pulsation plasma du métal) : les modes de pulsation supérieure ne sont pas affectés par les miroirs et ne contribuent pas à la force. On introduit donc une fonction de coupure $\chi(\omega/\omega_{\max})$, qui vaut 1 pour $\omega \ll \omega_{\max}$ et 0 pour $\omega \gg \omega_{\max}$ (figure 10), et on verra que l'on peut faire tendre $\omega_{\max} \to \infty$ à la fin du calcul.

Dans la limite $L_y, L_z \to \infty$, on remplace la somme sur $\mathbf{k}_\perp$ par une intégrale :

$$\mathcal{E}_0 = \frac{L_y L_z}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n \int \mathrm{d}^2\mathbf{k}_\perp \, \frac{1}{2}\hbar c \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + k_\perp^2} \, \chi\Big(\frac{\omega}{\omega_{\max}}\Big), \tag{3.9}$$

où g_n est la dégénérescence de polarisation : $g_0 = 1$ et $g_n = 2$ pour $n \geq 1$. On pose $\omega_n = \pi c n/L$, de sorte que

$$\omega^2 = \omega_n^2 + c^2 k_\perp^2, \qquad \text{soit} \qquad 2\omega \, \mathrm{d}\omega = 2c^2 k_\perp \mathrm{d}k_\perp. \tag{3.10}$$

L'élément d'intégration s'écrit alors $\mathrm{d}^2\mathbf{k}_\perp = 2\pi k_\perp \mathrm{d}k_\perp = 2\pi\omega \, \mathrm{d}\omega/c^2$, et l'on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \frac{L_y L_z}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n \, \frac{\hbar}{2} \, \frac{2\pi}{c^2} \int_{\omega_n}^{+\infty} \omega^2 \mathrm{d}\omega \; \chi\Big(\frac{\omega}{\omega_{\max}}\Big) \\ &= L_y L_z \, \frac{\hbar}{4\pi c^2} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n \int_{\omega_n}^{+\infty} \omega^2 \mathrm{d}\omega \; \chi\Big(\frac{\omega}{\omega_{\max}}\Big), \qquad \omega_n = \frac{\pi c n}{L}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

La force exercée sur la plaque de droite, comptée positivement dans le sens des x croissants, vaut $F_0 = -\partial\mathcal{E}_0/\partial L$. Seule la borne inférieure ω_n des intégrales dépend de L, avec $\partial\omega_n/\partial L = -\pi c n/L^2$, d'où

$$\begin{aligned} F_0 &= -L_y L_z \, \frac{\hbar}{4\pi c^2} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n \, \omega_n^2 \, \chi\Big(\frac{\omega_n}{\omega_{\max}}\Big) \, \frac{\pi c n}{L^2} \\ &= -L_y L_z \, \frac{\pi^2 \hbar c}{2L^4} \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 \, \chi\Big(\frac{\pi c}{L\omega_{\max}} \, n\Big). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dans la deuxième ligne, on a remplacé g_n par 2 : c'est légitime, car le terme $n = 0$ est nul.

On doit ajouter à cette force la contribution du continuum de modes situé à l'extérieur de la cavité, qui pousse la plaque en sens opposé. Elle correspond au même calcul pour une distance $L \to \infty$ entre miroirs, ce qui revient à remplacer la somme sur n par une intégrale. La force totale s'écrit donc

$$F_0 - F_0^\infty = -L_y L_z \, \frac{\pi^2 \hbar c}{2L^4} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 \chi\Big(\frac{\pi c}{L\omega_{\max}} n\Big) - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}n \; n^3 \chi\Big(\frac{\pi c}{L\omega_{\max}} n\Big) \right). \quad (3.13)$$

Chacun des deux termes diverge lorsque $\omega_{\max} \to \infty$, mais pas leur différence. On utilise pour la calculer la formule d'Euler-Maclaurin,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} g(n) - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}n \; g(n) = \frac{1}{2} g(0) - \frac{1}{12} g'(0) + \frac{1}{6!} g'''(0) + \dots, \quad (3.14)$$

avec ici $g(n) = n^3 \chi\left(\pi c n / L\omega_{\max}\right)$. On a $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ et, dans la limite $\omega_{\max} \to \infty$ où les dérivées de χ ne contribuent plus, $g'''(0) = 6$; les termes d'ordre supérieur de la formule s'annulent aussi dans cette limite. D'où

$$\sum_n g(n) - \int \mathrm{d}n \; g(n) = \frac{6}{6!} = \frac{1}{120}. \quad (3.15)$$

On en déduit la force de Casimir

$$F_0 - F_0^\infty = -L_y L_z \, \frac{\pi^2}{240} \, \frac{\hbar c}{L^4}. \quad (3.16)$$

Le signe négatif indique que la force est attractive. Le résultat ne dépend ni de la pulsation de coupure, ni de la forme de la fonction χ. La dépendance en $\hbar c / L^4$ pouvait être trouvée par analyse dimensionnelle : c'est la seule combinaison des grandeurs $\hbar$, c et L homogène à une pression. La pression de Casimir vaut donc

$$P = \frac{\pi^2}{240} \, \frac{\hbar c}{L^4}. \quad (3.17)$$

Elle atteint 1 atm ($10^5\,\mathrm{N/m^2}$) pour $L \approx 10\,\mathrm{nm}$, mais elle décroît très rapidement avec la distance : pour $L = 1\,\mu\mathrm{m}$, elle n'est plus que de $1{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{N/m^2}$.

Mise en évidence expérimentale. La première tentative de mesure est due à Sparnaay en 1958 [2], qui conclut prudemment que « the observed attractions do not contradict Casimir's theoretical prediction », avec une incertitude de l'ordre de 100 %. La mesure entre deux plaques planes pour des distances de l'ordre du micromètre est en effet difficile, car il faut maintenir les deux plaques parallèles avec une grande précision.

On préfère aujourd'hui une géométrie sphère-plan (figure 9c), qui évite le problème de l'alignement. Pour une sphère de rayon R placée à une distance $L \ll R$ d'un plan, la force de Casimir devient

$$F = -\frac{\pi^3}{360} \, R \, \frac{\hbar c}{L^3}. \quad (3.18)$$

On peut retrouver ce résultat en découpant les surfaces en éléments quasi plans, chacun interagissant avec le plan en vis-à-vis via l'énergie de Casimir par unité de surface

$-\pi^2\hbar c/720L^3$ associée à la pression (3.17) (approximation de proximité), ce qui donne $F = 2\pi R \times \pi^2\hbar c/(720L^3)$ en module.

Mohideen et Roy ont ainsi mesuré la force de Casimir pour des distances comprises entre 0,1 et 0,9 μm [3]. Une sphère de polystyrène de diamètre 196 μm, recouverte d'aluminium, est fixée sur le levier (*cantilever*) d'un microscope à force atomique. La déflexion du levier, mesurée par la réflexion d'un faisceau laser sur des photodiodes, donne la force exercée sur la sphère, tandis que le plan est approché de la sphère par une cale piézoélectrique. La force mesurée atteint environ 10^{-10} N à 100 nm de distance. L'accord avec la théorie est de l'ordre de 1 %, une fois prises en compte les corrections dues à la température finie, à la rugosité des surfaces ($\sigma \approx 35$ nm) et à la conductivité finie du revêtement métallique.

Importance de la compréhension de l'effet Casimir. L'effet Casimir est important à plusieurs titres :

- Il illustre la renormalisation des fluctuations quantiques du vide (avec leur divergence ultraviolette) à l'échelle macroscopique : seule la différence entre deux énergies infinies a un sens physique.
- Il se généralise à d'autres champs quantiques, par exemple aux champs de quarks et de gluons en physique des particules.
- Les mesures de l'effet Casimir donnent également accès à d'éventuelles nouvelles interactions à longue portée. La loi de la gravitation, en particulier, n'est pas testée avec précision en dessous de l'échelle submillimétrique.

Une correction possible à la loi de Newton est une loi de type Yukawa,

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}\left(1 + \alpha\,\mathrm{e}^{-r/\lambda}\right), \tag{3.19}$$

où α est l'amplitude de la correction et λ sa portée. Observer cet effet requiert de mesurer des forces à courte distance, où l'effet Casimir joue un rôle prépondérant et doit donc être connu avec précision. La comparaison des mesures de force de Casimir avec la théorie permet d'exclure une large région du plan (λ, α) [4] : la contrainte va de $\alpha \lesssim 10^{18}$ pour $\lambda \sim 10$ nm à $\alpha \lesssim 1$ pour $\lambda \sim 100\,\mu$m, où l'on rejoint les tests de la gravitation par des pendules de torsion.

3.2.2 Oscillation de Rabi du vide

Les états propres atomiques, par exemple les états $|n, l, m, s\rangle$ de l'atome d'hydrogène, sont calculés en considérant le noyau et les électrons en interaction. On obtient des états propres liés, a priori de durée de vie infinie. On sait pourtant que les états excités ont une durée de vie finie : ils peuvent se désexciter par émission spontanée d'un photon. Il existe donc des possibilités de transition entre ces états propres, par l'intermédiaire du champ électromagnétique.

En présence d'un champ électrique classique $\mathbf{E}$, les éléments de matrice $\langle n, l, m, s|\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}|n', l', m', s'\rangle$ du couplage dipolaire électrique permettent des transitions entre états, avec les règles de sélection $\Delta s = 0$, $\Delta l = \pm 1$ (la parité de l'état doit changer, et la conservation du moment cinétique interdit $|\Delta l| > 1$ pour l'absorption d'un seul photon). Cependant, les états excités gardent une durée de vie finie même en l'absence de tout champ $\mathbf{E}$ appliqué : c'est un effet des fluctuations quantiques de l'opérateur champ $\hat{\mathbf{E}}$!

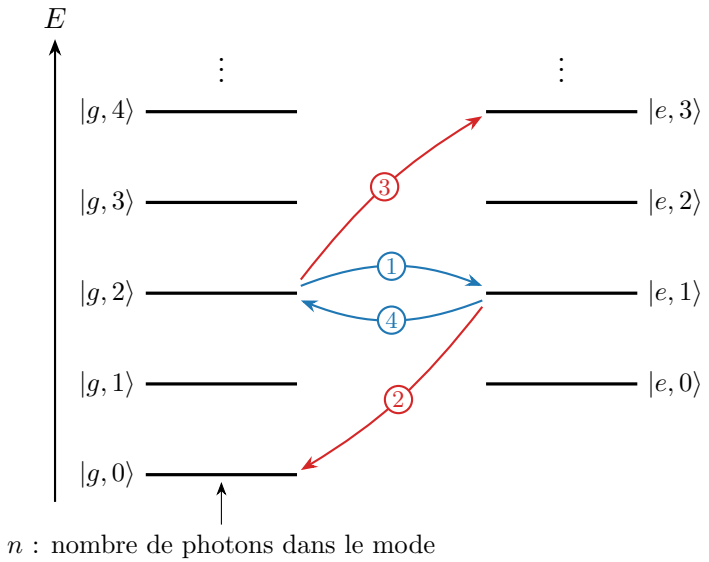


Figure 11 – Niveaux d'énergie d'un atome à deux niveaux et d'un mode du champ résonnant ($\omega = \omega_{\text{at}}$), en l'absence de couplage. Les états $|e, n\rangle$ et $|g, n+1\rangle$ sont dégénérés. Les flèches représentent les quatre processus contenus dans le couplage dipolaire (3.23), à partir de $|g, 2\rangle$ et de $|e, 1\rangle$: les processus 1 et 4 (en bleu) sont résonnants, les processus 2 et 3 (en rouge) changent l'énergie de $\pm 2\hbar\omega$.

Atome à deux niveaux couplé à un mode. On considère dans un premier temps l'interaction entre un atome à deux niveaux, $|g\rangle$ et $|e\rangle$, et un seul mode du champ électromagnétique, de pulsation ω égale à la pulsation ω_{at} de la transition atomique. Ce mode peut être celui d'une cavité de petit volume, comme nous le verrons ci-dessous. En l'absence de couplage, les états propres du système sont les états $|g, n\rangle$ et $|e, n\rangle$, où n est le nombre de photons dans le mode. Comme $\omega = \omega_{\text{at}}$, les états $|e, n\rangle$ et $|g, n+1\rangle$ sont dégénérés (figure 11).

Le hamiltonien de couplage est celui de l'interaction dipolaire électrique,

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \simeq -\hat{d}\,\hat{E}, \tag{3.20}$$

où l'on oublie la polarisation pour simplifier. Dans la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, l'opérateur dipôle n'a que des éléments non diagonaux, que l'on peut choisir réels :

$$\hat{d} = d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = d\,\sigma_x = d\,(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)\,, \tag{3.21}$$

où l'on a introduit les opérateurs

$$\hat{\sigma}_+ = \frac{\sigma_x + \mathrm{i}\sigma_y}{2} = |e\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_- = \frac{\sigma_x - \mathrm{i}\sigma_y}{2} = |g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Avec le champ quantique $\hat{E} = E_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$, on obtient

$$\hat{H}_{\text{int}} = -dE_0\Big(\underbrace{\hat{a}\hat{\sigma}_+}_{1} + \underbrace{\hat{a}\hat{\sigma}_-}_{2} + \underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+}_{3} + \underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-}_{4}\Big). \tag{3.23}$$

Seuls les processus 1 (absorption d'un photon et excitation de l'atome) et 4 (émission d'un photon et désexcitation de l'atome) sont résonnants. Les deux autres processus changent l'énergie du système de $\pm 2\hbar\omega$; ils sont complètement hors de résonance dès que le couplage dE_0 est très petit devant $\hbar\omega$, ce qui est toujours le cas pour des fréquences optiques, et on les néglige (approximation de l'onde tournante). On obtient alors le hamiltonien de Jaynes-Cummings,

$$\hat{H}_{\mathrm{JC}} = -dE_0 \left(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- \right), \tag{3.24}$$

auquel s'ajoute le hamiltonien libre de l'atome et du champ, qui est simplement une constante dans chacun des sous-espaces $\{|e,n\rangle, |g,n+1\rangle\}$ considérés ci-dessous.

Oscillation de Rabi. On initialise le système dans l'état $|e,n\rangle$. Le hamiltonien (3.24) le couple à un seul autre état, $|g,n+1\rangle$, avec l'élément de matrice

$$\langle g,n+1|\hat{H}_{\mathrm{JC}}|e,n\rangle = -dE_0 \langle n+1|\hat{a}^\dagger|n\rangle = -dE_0\sqrt{n+1}. \tag{3.25}$$

Ces deux états sont découplés du reste de l'espace de Hilbert. On définit la pulsation de Rabi du vide Ω par

$$\hbar\Omega = 2dE_0, \tag{3.26}$$

de sorte que, dans la base $\{|e,n\rangle, |g,n+1\rangle\}$,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar\Omega}{2}\sqrt{n+1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Les états propres et les énergies propres correspondantes sont

$$|\pm, n\rangle = \frac{|e,n\rangle \pm |g,n+1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad E_\pm = \mp\frac{\hbar\Omega}{2}\sqrt{n+1}. \tag{3.28}$$

On décompose l'état initial sur ces états propres, $|\psi(0)\rangle = |e,n\rangle = \left(|+,n\rangle + |-,n\rangle\right)/\sqrt{2}$, et on en déduit son évolution :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\Omega}{2}\sqrt{n+1}\,t}|+,n\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Omega}{2}\sqrt{n+1}\,t}|-,n\rangle \right) \\ &= \cos\left(\frac{\Omega}{2}\sqrt{n+1}\,t\right)|e,n\rangle + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\Omega}{2}\sqrt{n+1}\,t\right)|g,n+1\rangle. \end{aligned} \tag{3.29}$$

La probabilité de trouver l'atome dans l'état excité vaut donc

$$P_e(t) = \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\sqrt{n+1}\,t\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\Omega\sqrt{n+1}\,t\right)\right]. \tag{3.30}$$

C'est une oscillation de Rabi, de pulsation $\Omega\sqrt{n+1}$: l'atome échange de façon réversible une excitation avec le mode du champ. On a une oscillation même si $n = 0$, c'est-à-dire si le mode est initialement vide : c'est l'*oscillation de Rabi du vide* (figure 12). Elle est induite par les fluctuations quantiques du champ dans l'état vide, dont l'amplitude est E_0.

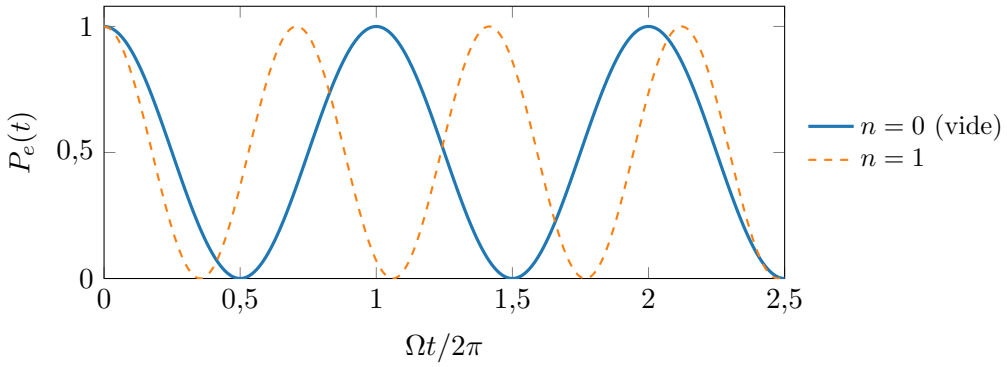


Figure 12 – Probabilité $P_e(t)$ de trouver l'atome dans l'état excité, pour un atome initialement excité couplé à un mode résonnant contenant initialement $n = 0$ photon (oscillation de Rabi du vide) ou $n = 1$ photon, d'après l'éq. (3.30). La pulsation de l'oscillation, $\Omega\sqrt{n+1}$, dépend du nombre de photons.

Conditions d'observation. Pour observer l'oscillation de Rabi du vide, il faut que le couplage soit plus rapide que la désexcitation de l'atome par émission spontanée dans les autres modes : $\Omega \gg \Gamma$, où $\Gamma = 1/\tau$ et τ est la durée de vie de l'état excité. Pour une transition optique, $\tau \sim 10\,\text{ns}$. On rappelle que

$$\hbar\Omega = 2dE_0, \qquad d \sim ea_0, \qquad E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 L^3}}, \tag{3.31}$$

où a_0 est le rayon de Bohr et où l'on a pris pour le mode un volume L^3. Pour $L = 10\,\text{cm}$ et $\omega = 2\pi \times 10^{14}\,\text{Hz}$, on trouve $E_0 \approx 2 \times 10^{-3}\,\text{V/m}$ et seulement $\Omega \approx 2\pi \times 50\,\text{Hz}$. Il faut donc une cavité de faible volume. Pour une cavité de longueur $L = 1\,\text{mm}$, dont le mode a une taille transverse $w \sim 10\,\mu\text{m}$, le volume du mode vaut $V \sim Lw^2 = 10^{-13}\,\text{m}^3$, et l'on obtient $\Omega \approx 2\pi \times 5\,\text{MHz}$, soit $\Omega \approx 3 \times 10^7\,\text{s}^{-1}$. C'est du même ordre que le taux $\Gamma \sim 10^8\,\text{s}^{-1}$ d'une transition optique typique dans le visible : on est à la limite de l'observabilité. (Ces estimations ne sont que des ordres de grandeur : nous verrons à l'éq. (3.41) que $\Gamma \propto d^2\omega^3$ dépend fortement de la fréquence et du dipôle de la transition.)

Une autre contrainte est que la durée de vie des photons dans la cavité soit suffisamment grande : leur taux de perte κ doit vérifier $\kappa \ll \Omega$. Pour une cavité de finesse $\mathcal{F}$, un photon effectue environ $\mathcal{F}/2\pi$ allers-retours, de durée $2L/c$ chacun, avant d'être perdu, d'où

$$\kappa \simeq \frac{\pi c}{\mathcal{F}L}, \tag{3.32}$$

avec ici $c/L = 3 \times 10^{11}\,\text{s}^{-1}$. Il faut donc une finesse $\mathcal{F} > 10^5$ environ.

Expérience avec des atomes de Rydberg. Les conditions sont plus favorables en utilisant des états de Rydberg, de nombre quantique principal $n \gg 1$. Le dipôle de la transition entre deux états de Rydberg voisins est en effet augmenté d'un facteur n^2 par rapport à celui d'une transition optique, et leur durée de vie est beaucoup plus longue (voir le paragraphe suivant). L'oscillation de Rabi du vide a ainsi été observée par le groupe de S. Haroche au Laboratoire Kastler Brossel (ENS) [5]. Les atomes de rubidium sont préparés dans des états de Rydberg *circulaires* ($n \gg 1$, $l = |m| = n - 1$),

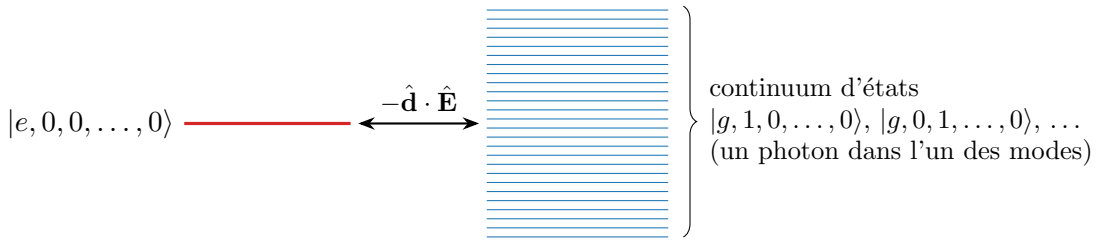


Figure 13 – En l'absence de cavité, l'état $|e,0,\ldots,0\rangle$ (atome excité, tous les modes vides) est couplé par l'interaction dipolaire à un continuum d'états $|g,\ldots,1,\ldots\rangle$, dans lesquels un photon a été émis dans l'un des modes. Ce couplage conduit à la désexcitation irréversible de l'atome.

de nombres quantiques principaux $n = 50$ pour l'état $|g\rangle$ et $n = 51$ pour l'état $|e\rangle$ (ici, n ne désigne pas le nombre de photons). L'atome, préparé dans l'état $|e\rangle$, traverse une cavité supraconductrice résonnante avec la transition $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, de fréquence $\nu = 51\,\mathrm{GHz}$, de taille de mode $w = 6\,\mathrm{mm}$ et de facteur de qualité $Q = 7\times10^7$. L'ensemble est maintenu à température cryogénique pour assurer l'absence de photons thermiques dans la cavité. L'état de l'atome est ensuite mesuré par ionisation sélective, et l'on mesure la probabilité P_e en fonction du temps d'interaction. On observe une oscillation de Rabi du vide de pulsation $\Omega \approx 2\pi\times 47\,\mathrm{kHz}$, légèrement amortie, conforme à l'éq. (3.30) avec $n = 0$. On a bien dans ce cas $\kappa = 2\pi\nu/Q \approx 5\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ et $\Gamma \sim 30\,\mathrm{s}^{-1}$, très petits devant $\Omega \approx 3\times10^5\,\mathrm{s}^{-1}$. Cette valeur de Ω est cohérente avec l'éq. (3.26) : pour une distance de 2,7 cm entre les miroirs, le volume du mode vaut environ $0{,}8\,\mathrm{cm}^3$, d'où $E_0 \approx 1{,}6\,\mathrm{mV/m}$, et $\Omega \approx 2\pi\times47\,\mathrm{kHz}$ correspond à un dipôle $d \approx 1200\,ea_0$, bien de l'ordre de n^2ea_0.

3.2.3 Émission spontanée

Le couplage d'un atome à une cavité permet de ne considérer l'effet que d'un mode unique, à condition que l'amplitude du couplage Ω soit grande devant Γ et κ. En l'absence d'une telle cavité, l'atome est couplé à un continuum de modes. L'état $|e,0,0,\ldots,0\rangle$, où l'atome est excité et tous les modes électromagnétiques sont vides, est couplé aux états

$$|g,1,0,0,\ldots,0\rangle,\quad |g,0,1,0,\ldots,0\rangle,\quad \ldots,\quad |g,0,0,0,\ldots,1\rangle, \tag{3.33}$$

dans lesquels l'atome est dans l'état fondamental et un photon a été émis dans l'un des modes. Ces états forment un continuum (figure 13). L'atome quitte alors l'état excité de manière *irréversible* : contrairement au cas d'un mode unique, les amplitudes de retour vers l'état $|e,0,\ldots,0\rangle$ depuis les différents états du continuum interfèrent destructivement.

Calcul du taux d'émission spontanée. Le taux de désexcitation est donné par la règle d'or de Fermi,

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle g,0,\ldots,1,\ldots,0| - \hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{E}}|e,0,\ldots,0\rangle\right|^2 \rho_E(E=\hbar\omega_{\mathrm{at}}), \tag{3.34}$$

où ρ_E est la densité finale en énergie des états couplés (on suppose ici les éléments de matrice égaux pour tous ces états ; on généralise ci-dessous en sommant sur les directions

et les polarisations). On quantifie le champ dans une boîte de volume L^3. Pour un mode de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et de polarisation $\boldsymbol{\epsilon}$, le champ s'écrit $\hat{\mathbf{E}} = E_0\boldsymbol{\epsilon}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ à la position de l'atome, et l'élément de matrice vaut

$$\begin{aligned}\langle g,1| - \hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{E}}|e,0\rangle &= -\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\rm at}}{2\varepsilon_0 L^3}}\ \underbrace{\langle 1|\hat{a}^\dagger|0\rangle}_{=1}\ \langle g|\hat{\mathbf{d}}\cdot\boldsymbol{\epsilon}|e\rangle \\ &= -\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\rm at}}{2\varepsilon_0 L^3}}\ d\,\boldsymbol{\epsilon}\cdot\hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

si l'on choisit par exemple l'état $|e\rangle$ excité initialement par un photon polarisé selon z, de sorte que $\langle g|\hat{\mathbf{d}}|e\rangle = d\,\hat{\mathbf{z}}$.

Dans une boîte de taille L^3, la densité de modes dans l'espace des vecteurs d'onde vaut

$$\rho_k(\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{k} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 k^2 \mathrm{d}k\,\mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}}, \tag{3.36}$$

où $\mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}}$ est l'angle solide élémentaire autour de la direction de $\mathbf{k}$. Avec $E = \hbar c k$, on en déduit la densité d'états en énergie, par unité d'angle solide,

$$\rho_E(E)\,\mathrm{d}E = \frac{1}{\hbar c}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\left(\frac{E}{\hbar c}\right)^2 \mathrm{d}E\,\mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}}. \tag{3.37}$$

Le taux d'émission spontanée s'obtient en sommant sur les directions d'émission du photon et sur les deux polarisations $\boldsymbol{\epsilon}_1$, $\boldsymbol{\epsilon}_2$ perpendiculaires à $\mathbf{k}$:

$$\Gamma = \int \mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}} \sum_{\boldsymbol{\epsilon}=\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2} \frac{2\pi}{\hbar}\,\frac{\hbar\omega_{\rm at}}{2\varepsilon_0 L^3}\,d^2\,|\boldsymbol{\epsilon}\cdot\hat{\mathbf{z}}|^2\,\frac{(\hbar\omega_{\rm at})^2}{\hbar^3c^3}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3. \tag{3.38}$$

Le volume L^3 de la boîte disparaît du résultat, comme il se doit. Les vecteurs $\boldsymbol{\epsilon}_1$, $\boldsymbol{\epsilon}_2$ et $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ formant une base orthonormée, on a

$$|\boldsymbol{\epsilon}_1\cdot\hat{\mathbf{z}}|^2 + |\boldsymbol{\epsilon}_2\cdot\hat{\mathbf{z}}|^2 = 1 - \left|\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{z}}\right|^2 = \sin^2\theta, \tag{3.39}$$

où θ est l'angle entre la direction d'émission et l'axe z. Le photon n'est pas émis dans la direction du dipôle. L'intégrale angulaire vaut $\int \mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}}\sin^2\theta = 2\pi\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = 8\pi/3$, d'où

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}\,\frac{\hbar\omega_{\rm at}}{2\varepsilon_0 L^3}\,d^2\,\frac{\hbar^2\omega_{\rm at}^2}{\hbar^3c^3}\,\frac{L^3}{8\pi^3}\,\frac{8\pi}{3}, \tag{3.40}$$

soit finalement

$$\Gamma = \frac{d^2\omega_{\rm at}^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar c^3}. \tag{3.41}$$

Cas des états de Rydberg circulaires. Pour les transitions entre états de Rydberg circulaires voisins ($n \gg 1$, $l = |m| = n-1$), l'énergie des niveaux varie comme $E_n \propto -1/n^2$, d'où une pulsation de transition $\omega_{\rm at} = (E_{n+1} - E_n)/\hbar \propto 1/n^3$. Le dipôle, proportionnel à la taille de l'orbite, varie comme $d \propto n^2$. On en déduit

$$\Gamma \propto \frac{(n^2)^2}{(n^3)^3} = \frac{1}{n^5}. \tag{3.42}$$

On atteint ainsi des durées de vie supérieures à 10 ms ; pour les états $n \approx 50$ utilisés dans l'expérience décrite plus haut, $1/\Gamma \sim 30$ ms.

Contrôle de l'émission spontanée : inhibition. L'éq. (3.34) montre que le taux d'émission spontanée n'est pas une propriété intrinsèque de l'atome : il dépend, via la densité d'états ρ_E, de l'environnement électromagnétique. En plaçant l'atome entre deux plaques métalliques parallèles, on discrétise les modes, ce qui peut diminuer la densité d'états à la fréquence $\omega_{\rm at}$. Si la distance entre les plaques est inférieure à $\lambda/2$, seul subsiste à cette fréquence le mode $n = 0$ de l'éq. (3.7), dont le champ électrique est perpendiculaire aux plaques : un dipôle parallèle aux plaques ne peut plus émettre.

La première observation de cette inhibition est due à Hulet *et al.* en 1985, avec un atome de Rydberg [6]. Une observation plus spectaculaire, dans le domaine optique, a été réalisée par Jhe *et al.* en 1987 [7] : des atomes excités traversent l'espace entre deux plaques, et l'on mesure le nombre d'atomes qui sont encore excités à la sortie, en fonction de l'angle θ entre un champ magnétique $\mathbf{B}$, qui fixe l'axe de quantification, et la normale aux plaques. Lorsque $\mathbf{B}$ est perpendiculaire aux plaques ($\theta = 0$ ou 180°), le dipôle de la transition étudiée, qui tourne dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$, est parallèle aux plaques : l'émission est inhibée, et un grand nombre d'atomes survivent dans l'état excité. Pour $\theta = 90°$, l'émission spontanée est permise et les atomes se désexcitent avant la sortie.

Contrôle de l'émission spontanée : effet Purcell dans une cavité. À l'inverse, une cavité résonnante peut augmenter le taux d'émission spontanée. On remplace la densité d'états par unité de volume de l'espace libre par une densité effective

$$\rho_E^{\rm effectif} \approx \frac{1}{V\Delta E}, \tag{3.43}$$

où $V \simeq Lw^2$ est le volume du mode de la cavité, de longueur L et de taille de faisceau w, et $\Delta E = E_{\rm at}/Q$ est la largeur en énergie de la résonance de la cavité, de facteur de qualité Q. Le taux d'émission spontanée est alors multiplié par le facteur de Purcell

$$F_{\rm Purcell} = \frac{3}{4\pi^2}\,\frac{\lambda^3}{V}\,Q, \tag{3.44}$$

où $\lambda = 2\pi c/\omega_{\rm at}$. Ce facteur s'obtient en appliquant la règle d'or de Fermi (3.34) avec un seul mode, de champ $E_0 = \sqrt{\hbar\omega_{\rm at}/2\varepsilon_0 V}$ aligné avec le dipôle, et une densité d'états lorentzienne de largeur ΔE, qui vaut $2/(\pi\Delta E)$ à résonance. On obtient $\Gamma_{\rm cav} = 2d^2Q/(\varepsilon_0\hbar V)$, dont le rapport avec l'éq. (3.41) donne l'éq. (3.44). L'estimation $\rho_E^{\rm effectif} \approx 1/(V\Delta E)$ ne diffère de ce calcul que par un facteur numérique.

L'effet Purcell a été observé pour la première fois par le groupe de S. Haroche en 1983, avec des atomes de Rydberg dans une cavité micro-onde [8], puis dans le domaine optique par Heinzen *et al.* en 1987, avec des atomes dans un résonateur confocal [9].

3.3 États cohérents semi-classiques

Les états de Fock $|n\rangle$ ne représentent pas du tout l'état classique décrit par une valeur du champ électrique $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$, puisque

$$\langle n|\hat{E}|n\rangle = 0. \tag{3.45}$$

Dans cette partie, nous introduisons les états cohérents $|\alpha\rangle$, qui correspondent à un déplacement $D(\alpha)$ de l'état vide $|0\rangle$ dans l'espace des phases (X, P). Nous verrons que ce sont les états quantiques les plus proches d'une onde classique.

Opérateurs de translation. On considère le hamiltonien adimensionné d'un oscillateur harmonique,

$$\hat{H} = \frac{\hat{X}^2}{2} + \frac{\hat{P}^2}{2} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}, \qquad \text{avec} \qquad [\hat{X}, \hat{P}] = \mathrm{i}, \tag{3.46}$$

où $\hat{X} = (\hat{a}+\hat{a}^\dagger)/\sqrt{2}$ et $\hat{P} = (\hat{a}-\hat{a}^\dagger)/(\mathrm{i}\sqrt{2})$. Pour un mode du champ, $\hat{X}$ est proportionnel au champ électrique $\hat{E}$ et $\hat{P}$ au champ magnétique. L'état fondamental $|n=0\rangle$ est notre point de départ : il correspond à l'état tel que $\langle \hat{X} \rangle = \langle \hat{P} \rangle = 0$, avec le moins de fluctuations quantiques possible,

$$\Delta X = \Delta P = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.47}$$

On introduit les opérateurs de translation en position et en impulsion,

$$T(x_0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_0 \hat{P}} \quad \text{(translation de } x_0\text{)}, \qquad K(p_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_0 \hat{X}} \quad \text{(« kick » de } p_0\text{)}. \tag{3.48}$$

Lorsqu'on combine ces deux translations, on obtient

$$K(p_0)\, T(x_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0 \hat{X} - x_0 \hat{P})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_0 p_0/2}, \tag{3.49}$$

où l'on a utilisé la formule de Glauber

$$\mathrm{e}^{\hat{A}} \mathrm{e}^{\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}, \tag{3.50}$$

valable si $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent avec $[\hat{A}, \hat{B}]$. C'est le cas ici, avec $[\mathrm{i}p_0\hat{X}, -\mathrm{i}x_0\hat{P}] = p_0 x_0 [\hat{X}, \hat{P}] = \mathrm{i}x_0 p_0$.

Opérateur déplacement et états cohérents. On exprime l'argument de l'exponentielle à l'aide de $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(p_0 \hat{X} - x_0 \hat{P}) &= \mathrm{i}p_0 \frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}x_0 \frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}} \\ &= \frac{x_0 + \mathrm{i}p_0}{\sqrt{2}}\, \hat{a}^\dagger - \frac{x_0 - \mathrm{i}p_0}{\sqrt{2}}\, \hat{a}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

On pose

$$\alpha = \frac{x_0 + \mathrm{i}p_0}{\sqrt{2}}, \tag{3.52}$$

et on obtient

$$K(p_0)\, T(x_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_0 p_0/2}\, D(\alpha), \qquad D(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}, \tag{3.53}$$

où $D(\alpha)$ est l'opérateur déplacement. Le facteur de phase $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_0 p_0/2}$ serait inversé pour le produit $T(x_0)K(p_0)$; il ne joue pas de rôle physique. On définit l'état cohérent $|\alpha\rangle$ par

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \tag{3.54}$$

C'est l'état vide translaté de $x_0 = \sqrt{2}\ \mathrm{Re}\,\alpha$ en position et de $p_0 = \sqrt{2}\ \mathrm{Im}\,\alpha$ en impulsion : on a $\langle \hat{X} \rangle = x_0$, $\langle \hat{P} \rangle = p_0$, et les fluctuations $\Delta X = \Delta P = 1/\sqrt{2}$ sont celles du vide.

Décomposition sur les états de Fock. On utilise à nouveau la formule de Glauber (3.50), avec $[\alpha\hat{a}^\dagger, -\alpha^*\hat{a}] = |\alpha|^2$:

$$\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\,\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}. \tag{3.55}$$

Comme $\hat{a}|0\rangle = 0$, on a $\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$, d'où

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle &= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{n!}\,\underbrace{(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle}_{\sqrt{n!}\,|n\rangle} \\ &= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \end{aligned}\tag{3.56}$$

On retrouve bien l'expression connue de l'état cohérent $|\alpha\rangle$, défini comme l'état propre de l'opérateur d'annihilation : $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. On le vérifie directement à partir de l'éq. (3.56), en utilisant $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$.

Statistique du nombre de photons. Le nombre moyen de photons vaut $\langle\hat{N}\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2$. Pour calculer ses fluctuations, on utilise $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$:

$$\langle\hat{N}^2\rangle = \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\rangle + \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \langle\hat{N}\rangle^2 + \langle\hat{N}\rangle, \tag{3.57}$$

d'où

$$\Delta N^2 = \langle\hat{N}\rangle. \tag{3.58}$$

Les fluctuations du nombre de photons sont poissoniennes : d'après l'éq. (3.56), la probabilité de trouver n photons, $\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n}/n!$, est une loi de Poisson de moyenne $|\alpha|^2$.

Évolution temporelle. Si, à $t = 0$, $|\psi(t=0)\rangle = |\alpha\rangle$, alors, chaque état de Fock évoluant avec la phase $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)t}$,

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+\frac{1}{2})t}|n\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2}\,|\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\rangle. \tag{3.59}$$

En unités dimensionnées, t devient ωt. Un état cohérent reste donc un état cohérent au cours du temps : son amplitude $\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ tourne dans l'espace des phases, dans le sens horaire, à la pulsation ω de l'oscillateur, comme pour un oscillateur classique. La valeur moyenne $\langle\hat{X}\rangle(t) = \sqrt{2}\,|\alpha|\cos(\omega t - \varphi)$, où $\varphi = \arg\alpha$, oscille comme le champ d'une onde classique, tandis que les fluctuations quantiques, représentées par un disque de rayon $1/\sqrt{2}$ dans l'espace des phases, gardent une largeur fixe (figure 14).

Les fluctuations sont négligeables devant les valeurs moyennes pour $|\alpha|^2 \gg 1$: les fluctuations relatives du nombre de photons, $\Delta N/\langle N\rangle = 1/|\alpha|$, sont alors faibles, et l'état cohérent se comporte comme une onde classique.

Combien de photons dans une diode laser ? On considère une diode laser de puissance $P = 1\,\mathrm{mW}$, émettant à la longueur d'onde $\lambda = 800\,\mathrm{nm}$, soit une fréquence $\omega/2\pi = c/\lambda = 3{,}75\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$. La cavité a une longueur $L = 1\,\mathrm{mm}$, et ses miroirs sont peu réfléchissants : un photon y effectue environ $\mathcal{N} \approx 10$ passages avant d'en sortir, soit un temps de séjour $\mathcal{N}L/c$. La diode émet un flux de photons

$$\dot{N} = \frac{P}{\hbar\omega} \approx 4\times10^{15}\,\mathrm{photons/s}. \tag{3.60}$$

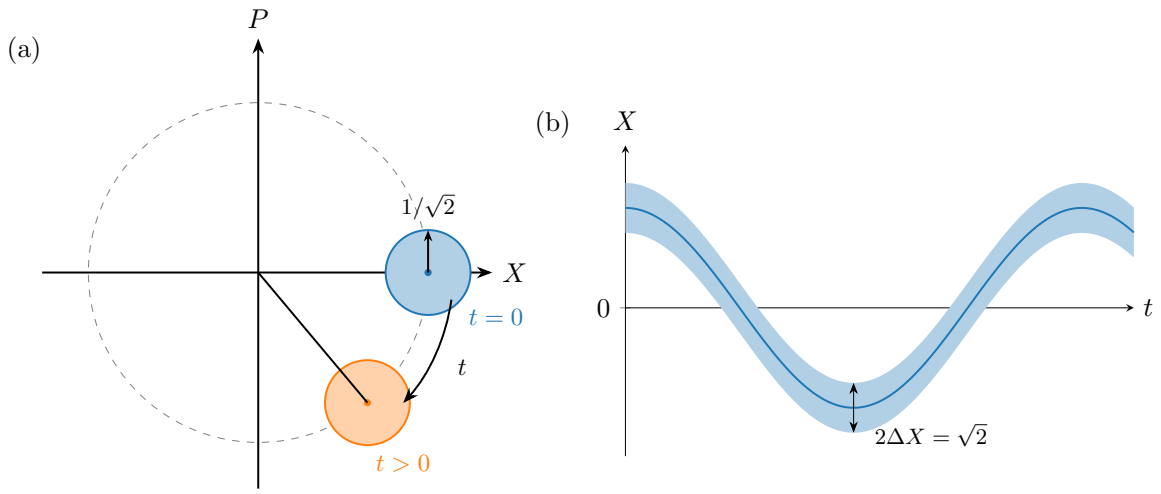


Figure 14 – (a) Représentation d'un état cohérent dans l'espace des phases (X, P) : la valeur moyenne $(\langle X\rangle, \langle P\rangle) = \sqrt{2}\,(\mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Im}\,\alpha)$ tourne dans le sens horaire à la vitesse angulaire ω (ici 1 en unités adimensionnées), et les fluctuations quantiques sont représentées par un disque de rayon $1/\sqrt{2}$, identique à celui du vide. (b) Évolution correspondante de $X(t)$: l'oscillation sinusoïdale de la valeur moyenne est accompagnée d'une bande de fluctuations de largeur fixe.

Le nombre moyen de photons présents dans la cavité vaut donc

$$N_{\text{cavité}} \approx \dot{N} \times \frac{\mathcal{N} L}{c} \approx 10^5. \tag{3.61}$$

Les fluctuations relatives du nombre de photons, de l'ordre de $1/\sqrt{N_{\text{cavité}}} \approx 3 \times 10^{-3}$, sont faibles : le champ est bien décrit par un état cohérent avec de faibles fluctuations, c'est-à-dire par un champ classique.

4 Interférométrie

L'interférométrie consiste à mesurer une grandeur physique à partir de l'interférence entre deux (ou plusieurs) ondes. Dans ce chapitre, nous étudions d'abord les interféromètres à deux ondes, en nous restreignant aux interféromètres à division d'amplitude (Mach-Zehnder, Sagnac, Michelson), que nous décrivons à l'aide de la matrice de diffusion d'une lame séparatrice. Nous étudions ensuite l'interféromètre de Fabry-Perot, qui fait interférer une infinité d'ondes, et son comportement en présence d'effets non linéaires. Nous discutons enfin les limites fondamentales de précision des mesures interférométriques, imposées par la nature quantique de la lumière, ainsi que la bande passante d'un Fabry-Perot, et terminons par la détection homodyne, qui permet de mesurer une quadrature du champ électromagnétique.

4.1 Interféromètres à deux ondes

On se restreint dans ce paragraphe aux interféromètres à division d'amplitude : une onde incidente est séparée en deux ondes par une lame semi-réfléchissante, ces deux

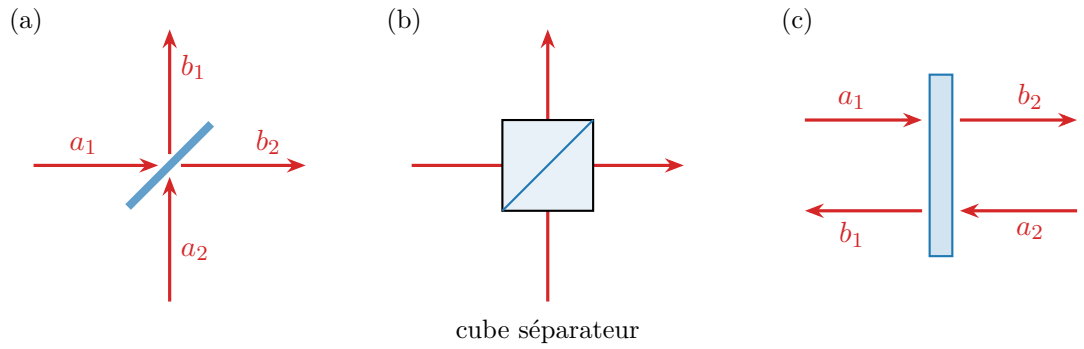


Figure 15 – (a) Lame séparatrice, avec ses deux voies d'entrée a_1, a_2 et ses deux voies de sortie b_1, b_2. (b) En pratique, on utilise souvent un cube séparateur. (c) Représentation équivalente, utile pour d'autres types d'interféromètres comme le Fabry-Perot, où les ondes entrantes et sortantes sont de part et d'autre de la lame.

ondes suivent des chemins différents, puis sont recombinées sur une seconde lame (ou sur la même). L'intensité en sortie dépend de la différence de phase accumulée entre les deux chemins, que l'on cherche à mesurer.

4.1.1 Modélisation d'une lame séparatrice

Une lame séparatrice possède deux voies d'entrée, d'amplitudes a_1 et a_2, et deux voies de sortie, d'amplitudes b_1 et b_2 (figure 15a). En pratique, on utilise souvent un cube séparateur, formé de deux prismes collés le long de leur diagonale (figure 15b). Dans d'autres types d'interféromètres, comme le Fabry-Perot, il est commode de représenter la lame avec les entrées et les sorties de part et d'autre (figure 15c).

Les amplitudes en sortie sont reliées aux amplitudes en entrée par la matrice S de diffusion (*scattering* en anglais) :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Dans le cas où l'intensité lumineuse totale est conservée (pas de pertes), on a $|b_1|^2+|b_2|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2$ quelles que soient les amplitudes incidentes : la matrice S est unitaire, $S^\dagger S = 1$. Avec les notations de la figure 15a, la sortie b_1 contient l'onde a_1 réfléchie et l'onde a_2 transmise, et inversement pour b_2. Pour une lame semi-réfléchissante symétrique (mêmes coefficients pour ses deux faces), on obtient

$$S = \begin{pmatrix} r & \mathrm{i}t \\ \mathrm{i}t & r \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } r, t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } r^2 + t^2 = 1. \tag{4.2}$$

On vérifie en effet que

$$S^\dagger S = \begin{pmatrix} r & -\mathrm{i}t \\ -\mathrm{i}t & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & \mathrm{i}t \\ \mathrm{i}t & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 + t^2 & \mathrm{i}rt - \mathrm{i}rt \\ \mathrm{i}rt - \mathrm{i}rt & r^2 + t^2 \end{pmatrix} = 1. \tag{4.3}$$

Le facteur i entre l'onde réfléchie et l'onde transmise est imposé par l'unitarité : pour une matrice de la forme $\left(\begin{smallmatrix} r & \tau \\ \tau & r \end{smallmatrix}\right)$ avec r réel, l'orthogonalité des deux colonnes impose

$r(\tau + \tau^*) = 0$, soit $\tau = \pm \mathrm{i}t$ avec t réel. On aurait aussi bien pu choisir

$$S = \begin{pmatrix} r & \mathrm{i}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \\ \mathrm{i}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} & r \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

qui est aussi unitaire et se ramène à la forme précédente moyennant une redéfinition des origines des phases des amplitudes a_i et b_i. Pour une lame 50:50, $r = t = 1/\sqrt{2}$.

4.1.2 Interféromètre de Mach-Zehnder

L'interféromètre de Mach-Zehnder est constitué de deux lames séparatrices 50:50 et de deux miroirs (figure 16a). On envoie une onde d'amplitude a dans une seule voie d'entrée de la première lame. En sortie de celle-ci, on a

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a \\ \mathrm{i}a \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Après propagation dans chacun des bras, les ondes ont accumulé les phases φ_1 et φ_2 :

$$a'_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} b_1, \qquad a'_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} b_2. \tag{4.6}$$

On s'intéresse à l'une des deux sorties de la seconde lame, par exemple

$$b'_1 = \left[S \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} \right]_1 = \frac{a}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} \end{pmatrix} \right]_1 = \frac{a}{2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} \right), \tag{4.7}$$

soit, pour l'intensité en sortie, en notant I l'intensité incidente,

$$I'_1 = I\,\frac{1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}. \tag{4.8}$$

On obtient de même $I'_2 = I\,[1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]/2$ pour l'autre sortie : l'intensité totale est bien conservée. L'intensité mesurée sur l'une des sorties donne donc accès à la différence de phase $\varphi_1 - \varphi_2$ entre les deux bras.

4.1.3 Applications

Mesure d'une épaisseur optique. On place un élément transparent dans l'un des bras de l'interféromètre (figure 16b). Il introduit un déphasage supplémentaire $\Delta\Phi$, par exemple $\Delta\Phi = 2\pi(n-1)e/\lambda$ pour une lame d'épaisseur e et d'indice n, que l'on déduit des intensités de sortie, qui valent (si les deux bras sont par ailleurs identiques) $I(1 - \cos\Delta\Phi)/2$ et $I(1 + \cos\Delta\Phi)/2$.

Interféromètre de Sagnac. Une variante de l'interféromètre à deux ondes permet de mesurer une rotation. Dans l'interféromètre de Sagnac, l'onde issue de la source est séparée en deux ondes qui parcourent la même boucle en sens opposés, avant d'être recombinées sur la même lame et envoyées vers un détecteur (figure 17a). Au repos, les deux ondes parcourent exactement le même chemin. L'une a subi deux réflexions sur la lame, l'autre deux transmissions : d'après l'éq. (4.2), l'amplitude reçue par le détecteur est proportionnelle à $r^2 + (\mathrm{i}t)^2 = r^2 - t^2 = 0$ pour une lame 50:50. Le détecteur est donc

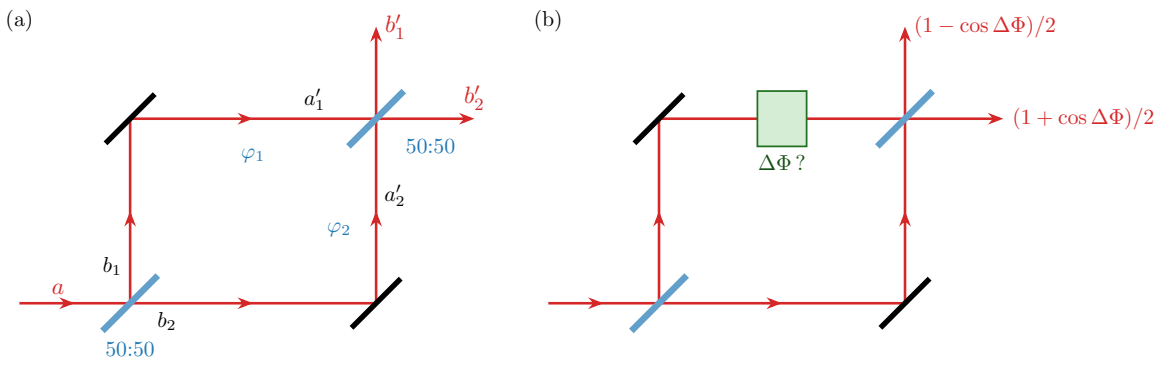


Figure 16 – (a) Interféromètre de Mach-Zehnder, formé de deux lames séparatrices 50:50 (en bleu) et de deux miroirs (en noir). Les ondes accumulent les phases φ_1 et φ_2 dans chacun des bras. (b) Mesure de l'épaisseur optique d'un élément transparent placé dans l'un des bras, qui introduit un déphasage $\Delta\Phi$: pour des bras par ailleurs identiques, les fractions de l'intensité incidente sur les deux sorties valent $(1 \mp \cos\Delta\Phi)/2$.

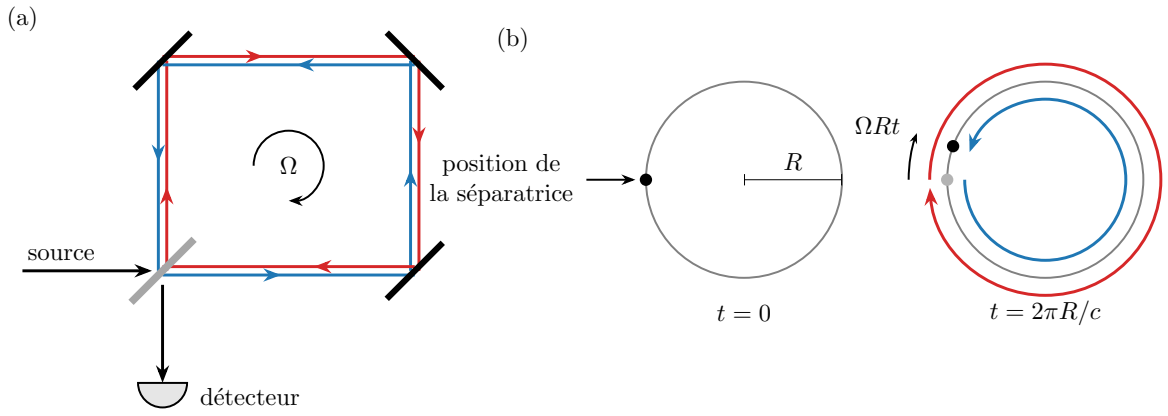


Figure 17 – (a) Interféromètre de Sagnac : les deux ondes issues de la lame séparatrice parcourent la boucle en sens opposés (en rouge et en bleu) avant d'être recombinées. Le dispositif tourne à la vitesse angulaire Ω. (b) Modèle d'un trajet circulaire de rayon R : pendant le temps $t = 2\pi R/c$ d'un tour, la séparatrice s'est déplacée d'une distance ΩRt ; l'onde se propageant dans le sens de la rotation (en rouge) doit encore parcourir cette distance pour la rattraper, tandis que l'onde se propageant en sens inverse (en bleu) l'a déjà atteinte.

dans le noir, et toute la lumière repart vers la source. Si l'interféromètre tourne, les deux ondes acquièrent une différence de phase $\Delta\Phi$, et le détecteur reçoit l'intensité $I_{\text{in}}(1-\cos\Delta\Phi)/2$, comme pour le Mach-Zehnder.

Pour simplifier, considérons un trajet lumineux circulaire de rayon R (par exemple dans une fibre optique), l'ensemble tournant à la vitesse angulaire Ω (figure 17b). Pendant le temps $t = 2\pi R/c$ que met la lumière pour faire un tour, la séparatrice s'est déplacée de la distance ΩRt. L'onde qui se propage en sens inverse de la rotation rejoint donc la séparatrice en parcourant une distance plus courte de ΩRt, tandis que l'autre doit parcourir une distance plus longue de ΩRt. Au premier ordre en $\Omega R/c$, la différence de phase entre les deux ondes vaut

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= 2 \times 2\pi \, \frac{\Omega R t}{\lambda} \\ &= 8\pi \, \frac{\pi R^2 \, \Omega}{c\lambda}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

On fait apparaître l'aire $A = \pi R^2$ délimitée par le trajet lumineux. On peut montrer que le résultat obtenu est général, quelle que soit la forme du trajet :

$$\Delta\Phi = \frac{8\pi A}{\lambda c} \, \Omega. \tag{4.10}$$

Réalisations expérimentales historiques.

- Sagnac (1913) : avec une aire $A \simeq 0{,}1\,\text{m}^2$ et une vitesse de rotation $\Omega = 2\pi \times 2\,\text{rad/s}$ (deux tours par seconde), on obtient pour $\lambda \simeq 0{,}5\,\mu\text{m}$ un déphasage $\Delta\Phi/2\pi = 4A\Omega/(\lambda c) \simeq 3 \times 10^{-2}$, soit quelques pour cent d'interfrange. En inversant le sens de rotation, ce qui double l'effet, Sagnac observa un déplacement des franges d'environ 0,07 interfrange.
- Michelson et Gale (1925) : interféromètre de taille kilométrique (environ 600 m sur 340 m), fixe par rapport au sol, pour mesurer la rotation de la Terre (plus précisément la composante de sa vitesse angulaire normale au plan de l'interféromètre). Ils observèrent un déplacement d'environ 0,23 interfrange, en accord avec la prédiction.

Gyromètre à fibre optique. Pour augmenter l'aire effective de l'interféromètre, on fait parcourir à la lumière une fibre optique enroulée sur un grand nombre de tours : l'aire A dans l'éq. (4.10) est alors multipliée par le nombre de tours. On atteint ainsi une sensibilité de l'ordre du degré par heure, voire bien meilleure (à comparer à la rotation de la Terre, 15° par heure) ! Pour plus de détails sur l'effet Sagnac, on pourra lire la revue de réf. [10].

4.1.4 Interféromètre de Michelson

Dans l'interféromètre de Michelson, une seule lame séparatrice est utilisée : les deux ondes séparées se réfléchissent sur des miroirs situés aux distances L_x et L_y de la lame, puis sont recombinées sur celle-ci (figure 18a). Contrairement au cas du Mach-Zehnder, chacune des deux ondes qui atteignent le détecteur a subi une réflexion et une transmission sur la séparatrice. Avec la matrice de l'éq. (4.2), et en notant $\varphi_{x,y} = 2kL_{x,y}$ les phases accumulées lors de l'aller-retour dans chaque bras, l'amplitude reçue par le détecteur est

proportionnelle à $irt\,(e^{i\varphi_x} + e^{i\varphi_y})$ (la réflexion sur les miroirs de fond ajoute la même phase dans les deux bras). Pour une lame 50:50, l'intensité reçue par le détecteur vaut donc

$$I = I_{\text{in}} \frac{1 + \cos\varphi}{2}, \qquad \text{avec} \qquad \varphi = \varphi_x - \varphi_y = \frac{4\pi}{\lambda}(L_x - L_y), \tag{4.11}$$

le facteur 4π venant de ce que chaque bras est parcouru deux fois. La frange obtenue pour $L_x = L_y$ est ici brillante. Ce point dépend en fait des propriétés de la lame : si ses coefficients de réflexion diffèrent sur ses deux faces (par exemple $S = \left(\begin{smallmatrix} r & t \\ t & -r \end{smallmatrix}\right)$, qui est aussi unitaire), on obtient $I = I_{\text{in}}(1 - \cos\varphi)/2$. Seule importe en pratique la dépendance de I en φ.

Les interféromètres de Michelson et de Mach-Zehnder ne sont pas sensibles aux mêmes effets :

— le Mach-Zehnder n'est pas sensible à une dilatation de l'espace selon x (par exemple au passage d'une onde gravitationnelle), ni à une différence de vitesse de la lumière entre les directions x et y (c'était l'objet de l'expérience historique de Michelson et Morley), puisque chacun de ses deux chemins comporte un segment selon x et un segment selon y de mêmes longueurs ;

— le Michelson n'est pas sensible à la rotation (effet Sagnac), puisque les trajets lumineux n'entourent aucune aire.

Détection des ondes gravitationnelles. Les détecteurs d'ondes gravitationnelles LIGO et Virgo sont des interféromètres de Michelson géants, dont chaque bras mesure quelques kilomètres ($L = 4\,\text{km}$ pour LIGO, 3 km pour Virgo). Chaque bras comprend un interféromètre de Fabry-Perot (voir la sous-section suivante), dans lequel la lumière effectue environ 300 allers-retours (figure 18b) : la longueur effective est de 1 200 km par bras ! Plus précisément, nous verrons que la cavité multiplie le déphasage par un facteur $2\mathcal{F}/\pi \simeq 300$, où $\mathcal{F} \simeq 450$ est sa finesse (éq. (4.41)). Au passage d'une onde gravitationnelle, on s'attend à une variation relative de longueur

$$\frac{\Delta(L_x - L_y)}{L} \sim 10^{-21}, \tag{4.12}$$

soit, pour une longueur d'onde $\lambda = 1{,}064\,\mu\text{m}$, une variation de phase

$$\Delta\varphi \simeq 300 \times \frac{4\pi}{\lambda} L \times \frac{\Delta(L_x - L_y)}{L} \simeq 1{,}4 \times 10^{-8}\,\text{rad}. \tag{4.13}$$

Nous discuterons au paragraphe 4.3 la possibilité de mesurer un déphasage aussi petit.

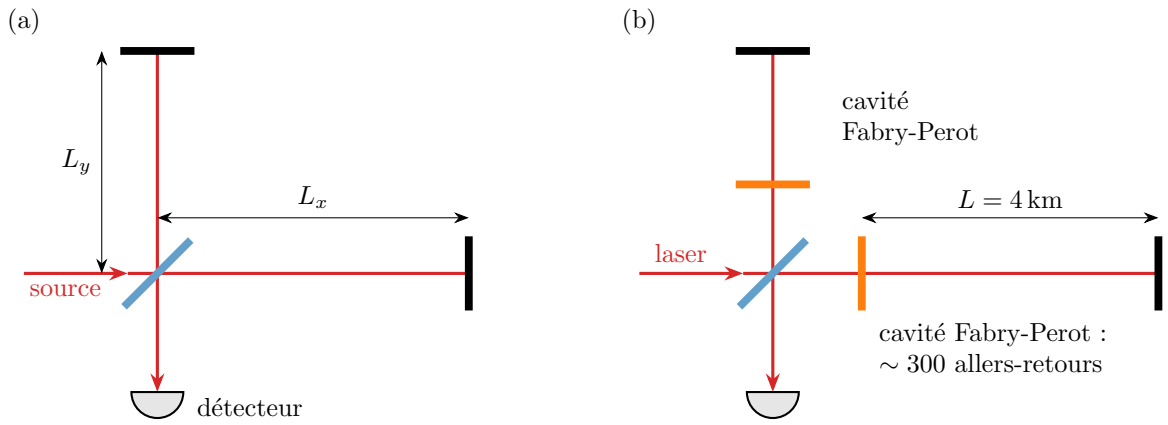


Figure 18 – (a) Interféromètre de Michelson. (b) Principe des détecteurs d'ondes gravitationnelles LIGO et Virgo : chaque bras du Michelson contient une cavité Fabry-Perot, formée d'un miroir d'entrée partiellement transmettant (en orange) et d'un miroir de fond, qui multiplie le déphasage dû au déplacement des miroirs par environ 300.

4.2 Interféromètre de Fabry-Perot

L'interféromètre de Fabry-Perot est constitué de deux miroirs plans parallèles, de coefficients de réflexion et de transmission en amplitude r_1, t_1 et r_2, t_2 (réels, avec $r_i^2 + t_i^2 = 1$), séparés d'une distance L (figure 19a). Une onde d'amplitude a_1 éclaire la cavité par la gauche, et aucune onde n'arrive par la droite ($a_3 = 0$). On note a_4 l'amplitude réfléchie, a_2 l'amplitude transmise, et a_c, a_c' les amplitudes intracavité se propageant vers la droite et vers la gauche au niveau du premier miroir. Pour chaque miroir, on prend un coefficient réel t_i en transmission et $\mathrm{i}r_i$ en réflexion : comme pour la lame séparatrice, l'unitarité impose un déphasage de $\pi/2$ entre réflexion et transmission, mais on choisit ici l'origine des phases de sorte que le coefficient de transmission soit réel. Deux approches sont possibles pour calculer l'amplitude transmise.

4.2.1 Interférence des réflexions successives

On suit l'onde au cours de ses réflexions successives (figure 19b). On note $\varphi = kL$ la phase accumulée lors d'une traversée de la cavité. L'onde $t_1 a_1$ transmise par le premier miroir arrive sur le second miroir avec l'amplitude $t_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} a_1$; une partie $t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} a_1$ est transmise, une partie $\mathrm{i}r_2 t_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} a_1$ est réfléchie. Après réflexion sur le premier miroir, cette dernière revient sur le second miroir avec l'amplitude $(\mathrm{i}r_1)(\mathrm{i}r_2)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}\, t_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} a_1 = (-r_1 r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi})\, t_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} a_1$, et ainsi de suite. Chaque aller-retour multiplie l'amplitude par $-r_1 r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$. Le champ transmis vaut donc

$$a_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-r_1 r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}\right)^n t_1 t_2\, a_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{4.14}$$

soit, en sommant la série géométrique,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{t_1 t_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{1 + r_1 r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}} = \frac{t_1 t_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}}{1 + r_1 r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kL}}. \tag{4.15}$$

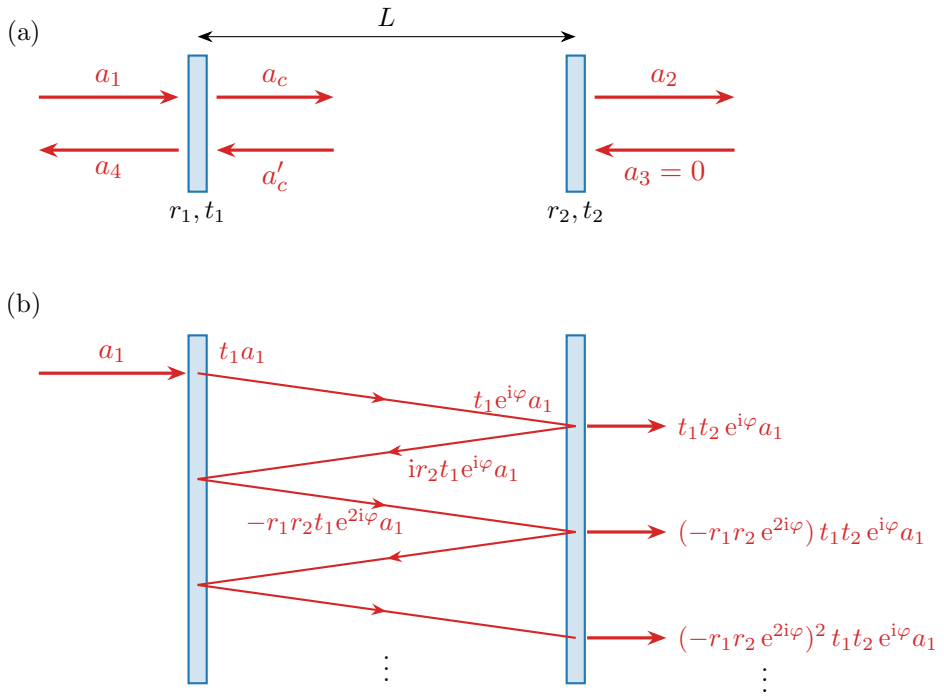


Figure 19 – (a) Notations pour l'interféromètre de Fabry-Perot, formé de deux miroirs de coefficients r_1, t_1 et r_2, t_2 séparés d'une distance L. (b) Interférence des réflexions successives : l'amplitude transmise est la somme d'une infinité d'ondes, chaque aller-retour multipliant l'amplitude par $-r_1 r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$, avec $\varphi = kL$. Les rayons ont été inclinés pour la lisibilité.

Le signe + au dénominateur dépend de la convention de phase choisie pour les réflexions ; un autre choix revient à une redéfinition de L à l'échelle de la longueur d'onde.

4.2.2 Matrices de diffusion et de transfert

Utilisation de la matrice S ? On peut écrire les relations entre les champs au niveau de chacun des miroirs à l'aide de leurs matrices de diffusion :

$$\begin{pmatrix} a_c \\ a_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 & \mathrm{i}r_1 \\ \mathrm{i}r_1 & t_1 \end{pmatrix}}_{S_1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a'_c \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} a_2 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} a'_c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_2 & \mathrm{i}r_2 \\ \mathrm{i}r_2 & t_2 \end{pmatrix}}_{S_2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} a_c \\ a_3 \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

où l'on a tenu compte de la propagation entre les deux miroirs. Cette méthode n'est pas très efficace pour exprimer a_2 en fonction de a_1, car les matrices S_1 et S_2 relient des champs situés de part et d'autre des miroirs : on ne peut pas simplement les multiplier.

Utilisation de la matrice de transfert T. C'est la méthode la plus efficace. On écrit plutôt les champs situés à droite d'un miroir en fonction des champs situés à sa gauche :

$$\begin{pmatrix} a_c \\ a'_c \end{pmatrix} = \mathsf{T}_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Pour trouver T_1, on repart des relations

$$\begin{cases} a_c = t_1 a_1 + \mathrm{i}r_1 a'_c, \\ a_4 = \mathrm{i}r_1 a_1 + t_1 a'_c. \end{cases} \tag{4.18}$$

On obtient d'abord, à partir de la seconde équation,

$$a'_c = -\mathrm{i}\frac{r_1}{t_1}\, a_1 + \frac{1}{t_1}\, a_4, \tag{4.19}$$

puis, en reportant dans la première et en utilisant $r_1^2 + t_1^2 = 1$,

$$a_c = \left(t_1 + \frac{r_1^2}{t_1}\right) a_1 + \mathrm{i}\frac{r_1}{t_1}\, a_4 = \frac{1}{t_1}\, a_1 + \mathrm{i}\frac{r_1}{t_1}\, a_4, \tag{4.20}$$

soit

$$\mathsf{T}_1 = \frac{1}{t_1} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i}r_1 \\ -\mathrm{i}r_1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

La matrice de transfert T_2 du second miroir a la même forme. La propagation libre dans la cavité sur une distance L s'écrit

$$\mathsf{T}_L = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

puisque l'onde se propageant vers la droite accumule la phase φ, tandis que l'onde se propageant vers la gauche, qui arrive au premier miroir avec l'amplitude a'_c, avait l'amplitude $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} a'_c$ au niveau du second miroir. La matrice de transfert de la cavité,

qui relie les champs (a_2, a_3) situés à droite de la cavité aux champs (a_1, a_4) situés à sa gauche, s'exprime alors comme le produit

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathsf{T} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{T} = \mathsf{T}_2\, \mathsf{T}_L\, \mathsf{T}_1. \tag{4.23}$$

Explicitement,

$$\begin{aligned} \mathsf{T} &= \frac{1}{t_1 t_2} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i}r_2 \\ -\mathrm{i}r_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i}r_1 \\ -\mathrm{i}r_1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{t_1 t_2} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i}r_2 \\ -\mathrm{i}r_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & \mathrm{i}r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \\ -\mathrm{i}r_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{t_1 t_2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + r_1 r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} & \mathrm{i}r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{i}r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ -\mathrm{i}r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{i}r_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

On utilise enfin $a_3 = 0$ pour relier a_4 à a_1, soit $a_4 = -(\mathsf{T}_{21}/\mathsf{T}_{22})\, a_1$, puis on en déduit

$$a_2 = \mathsf{T}_{11} a_1 + \mathsf{T}_{12} a_4 = \frac{\det \mathsf{T}}{\mathsf{T}_{22}}\, a_1 = \frac{a_1}{\mathsf{T}_{22}}, \tag{4.25}$$

puisque $\det \mathsf{T} = \det \mathsf{T}_2 \det \mathsf{T}_L \det \mathsf{T}_1 = 1$. On retrouve bien

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{t_1 t_2}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \frac{t_1 t_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}}{1 + r_1 r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kL}}. \tag{4.26}$$

L'intérêt de cette méthode est qu'elle se généralise immédiatement à un empilement quelconque de miroirs et de milieux, par simple produit des matrices de transfert.

4.2.3 Transmission, intervalle spectral libre et finesse

La transmission en intensité de la cavité vaut, en notant $T_i = t_i^2$ les transmissions en intensité des miroirs,

$$\mathcal{T} = \left| \frac{a_2}{a_1} \right|^2 = \frac{T_1 T_2}{\left| 1 + r_1 r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kL} \right|^2}. \tag{4.27}$$

La transmission est maximale pour $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kL} = -1$, soit $2kL = (2n+1)\pi$ avec n entier. Les résonances ont lieu aux fréquences

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{c}{2L} \left(n + \frac{1}{2} \right), \tag{4.28}$$

régulièrement espacées de l'intervalle spectral libre $\nu_{\mathrm{ISL}} = c/2L$ (soit $\omega_{\mathrm{ISL}} = \pi c/L$ en pulsation). On s'attend à des résonances fines pour $r_1 r_2 \simeq 1$, c'est-à-dire pour des miroirs de haute réflectivité.

Forme des résonances. On pose $kL = (n + \frac{1}{2})\pi + \delta$, avec $|\delta| \ll 1$ le désaccord par rapport à la résonance. On a alors $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kL} = -\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta}$, et

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{T_1 T_2}{\left| 1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta} \right|^2} \\ &\simeq \frac{T_1 T_2}{\left| 1 - r_1 r_2 - 2\mathrm{i}\delta\, r_1 r_2 \right|^2} \\ &\simeq \frac{T_1 T_2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4\delta^2}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

où l'on a utilisé $r_1 r_2 \simeq 1$ dans le dernier terme. Pour $r_1, r_2 \simeq 1$, on a $r_i = \sqrt{1-T_i} \simeq 1 - T_i/2$, et donc

$$(1 - r_1 r_2)^2 \simeq \left[1 - \left(1 - \frac{T_1}{2}\right)\left(1 - \frac{T_2}{2}\right)\right]^2 \simeq \left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2. \tag{4.30}$$

On obtient

$$\mathcal{T} \simeq \frac{T_1 T_2}{\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)^2 + 4\delta^2}, \tag{4.31}$$

dont le maximum vaut

$$\mathcal{T}_{\max} = \frac{T_1 T_2}{\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)^2}. \tag{4.32}$$

Pour une cavité symétrique, $T_1 = T_2$, on a $\mathcal{T}_{\max} = 1$: la cavité est parfaitement transparente à résonance, bien que chacun des miroirs soit très réfléchissant !

On écrit enfin la transmission sous la forme d'une lorentzienne,

$$\mathcal{T} \simeq \frac{\mathcal{T}_{\max}}{1 + m\delta^2}, \qquad m = \frac{16}{(T_1 + T_2)^2}, \tag{4.33}$$

de largeur totale à mi-hauteur $\Delta\delta = 2/\sqrt{m}$. Sans approximation, on obtient

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{T}_{\max}}{1 + m \sin^2 \delta}, \qquad \mathcal{T}_{\max} = \frac{T_1 T_2}{(1 - r_1 r_2)^2}, \qquad m = \frac{4 r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2}, \tag{4.34}$$

qui est bien périodique en δ, de période π (figure 20).

Finesse. La finesse $\mathcal{F}$ est le rapport entre l'intervalle spectral libre et la largeur des résonances. Comme $\delta = \omega L/c + \text{cte}$, un intervalle spectral libre correspond à une variation π de δ. Pour $m \gg 1$, la largeur totale à mi-hauteur de la fonction d'Airy vaut $\Delta\delta = 2 \arcsin(1/\sqrt{m}) \simeq 2/\sqrt{m}$, et

$$\mathcal{F} = \frac{\pi}{\Delta\delta} = \frac{\pi\sqrt{m}}{2} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \simeq \frac{2\pi}{T_1 + T_2} = \frac{\pi}{T_1} \quad \text{si } T_1 = T_2. \tag{4.35}$$

Pour une cavité symétrique, on retrouve l'expression usuelle $\mathcal{F} = \pi\sqrt{R}/(1-R)$, où $R = r_1^2 = r_2^2$ est le coefficient de réflexion en intensité des miroirs. La largeur des résonances vaut $\Delta\omega = \omega_{\text{ISL}}/\mathcal{F}$. Avec des miroirs diélectriques de très haute réflectivité, on sait faire des cavités de finesse $\mathcal{F} = 10^5$, 10^6, voire plus.

4.2.4 Champ dans la cavité

À l'intérieur de la cavité, les ondes se propageant dans les deux sens forment une onde stationnaire. Le champ transmis est relié au champ intracavité par $|a_2| = t_2 |a_c|$, avec $t_2 \ll 1$. Pour une cavité symétrique à résonance, $|a_2| = |a_1|$, et donc

$$|a_c|^2 = \frac{|a_1|^2}{T_2} \gg |a_1|^2. \tag{4.36}$$

Le champ dans la cavité est donc beaucoup plus intense que le champ incident : la lumière est piégée dans la cavité, où elle effectue de nombreux allers-retours avant d'en sortir.

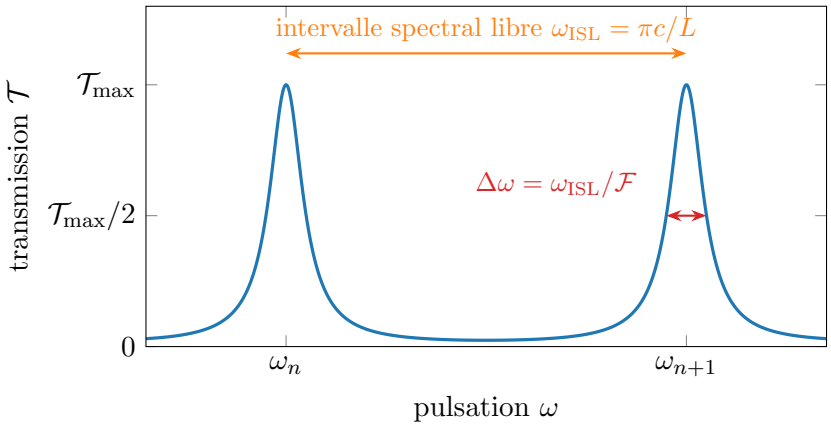


Figure 20 – Transmission d'une cavité Fabry-Perot en fonction de la pulsation ω de l'onde incidente (éq. (4.34)), tracée ici pour une finesse $\mathcal{F} = 10$. Les résonances sont séparées de l'intervalle spectral libre $\omega_{\mathrm{ISL}} = \pi c/L$, et leur largeur à mi-hauteur vaut $\omega_{\mathrm{ISL}}/\mathcal{F}$.

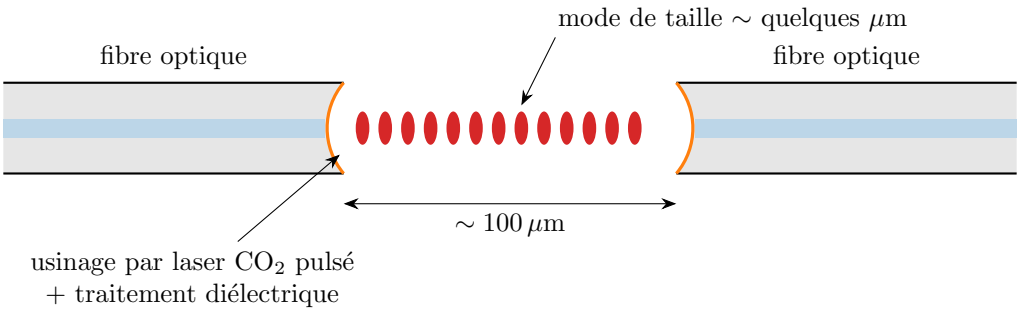


Figure 21 – Cavité Fabry-Perot fibrée : les miroirs concaves (en orange) sont usinés par laser CO_2 sur les extrémités de deux fibres optiques, puis recouverts d'un traitement diélectrique. La cavité, de longueur $\sim 100\,\mu$m, supporte une onde stationnaire de faible volume (en rouge).

4.2.5 Différentes réalisations de cavités résonantes

Cavité fibrée. Une cavité fibrée a été développée à l'ENS par le groupe de J. Reichel [11]. Les miroirs sont réalisés directement sur les faces clivées de deux fibres optiques, creusées par un tir de laser CO_2 pulsé puis recouvertes d'un traitement diélectrique (figure 21). La cavité est très courte (environ $100\,\mu$m), et le mode optique a une taille de quelques micromètres. Le faible volume du mode résonnant conduit à un fort couplage entre un atome placé dans la cavité et le champ (couplage de Rabi du vide élevé).

Microcavités optiques. Diverses microcavités optiques poussent à la limite le petit volume de cavité et la finesse (voir la revue de réf. [12]). Citons par exemple :

— les micropiliers, qui contiennent une boîte quantique fortement couplée à la lumière, et sont à la base de sources de photons uniques ;

— les résonateurs toroïdaux, dans lesquels la lumière circule le long de la périphérie d'un tore ; la lumière incidente, guidée dans une fibre optique, y est couplée par

ondes évanescentes ;
— les cavités dans les cristaux photoniques : la lumière est confinée dans un matériau structuré périodiquement à l'échelle sub-micrométrique, qui joue le rôle de miroir, et la cavité est formée par un défaut ou une déformation locale du motif. Ces cavités permettent l'ingénierie de capteurs optiques miniatures.

4.2.6 Comportement non linéaire d'un Fabry-Perot

L'intensité dans un Fabry-Perot étant très grande devant l'intensité incidente, des effets non linéaires peuvent apparaître :
— déformation des miroirs due à un échauffement ou à la pression de radiation ;
— effet non linéaire induit exprès, par exemple à l'aide d'un cristal non linéaire placé dans la cavité (effet Kerr, voir le chapitre 8).

Nous supposons que le désaccord δ dépend linéairement de l'intensité $I_c = |a_c|^2$ dans la cavité :

$$\delta = \delta_0 + \alpha I_c, \tag{4.37}$$

où $\delta_0 = kL - (n + \frac{1}{2})\pi$ est le désaccord en l'absence d'effet non linéaire, qui dépend de la fréquence du laser. Pour une cavité symétrique dont les miroirs ont la transmission $T = T_1 = T_2$, l'intensité transmise vaut $TI_c = \mathcal{T}\, I_{\text{in}}$, et $\mathcal{T}_{\max} = 1$; on a donc, d'après l'éq. (4.34),

$$\frac{I_c}{I_{\text{in}}} = \frac{1}{T}\,\frac{1}{1 + m\sin^2\delta}. \tag{4.38}$$

On obtient donc une équation implicite pour l'intensité intracavité :

$$\frac{I_c}{I_{\text{in}}} = \frac{1}{T}\,\frac{1}{1 + m\sin^2(\delta_0 + \alpha I_c)}. \tag{4.39}$$

On peut la résoudre graphiquement. Le point de la courbe de résonance d'ordonnée I_c est décalé horizontalement de $-\alpha I_c$ (vers les désaccords négatifs pour $\alpha > 0$), d'autant plus que I_c est grand : la courbe de résonance est inclinée (figure 22a). Si l'effet non linéaire est suffisamment fort, il existe un domaine de désaccord δ_0 pour lequel trois solutions sont possibles ! On peut montrer que la solution intermédiaire est instable. Lorsqu'on balaye le désaccord δ_0 dans un sens puis dans l'autre, l'intensité intracavité suit l'une ou l'autre des branches stables, et saute brutalement d'une branche à l'autre aux extrémités du domaine de bistabilité : c'est un phénomène d'hystérésis (figure 22b). Le Fabry-Perot non linéaire est un système bistable, dont l'état dépend de son histoire.

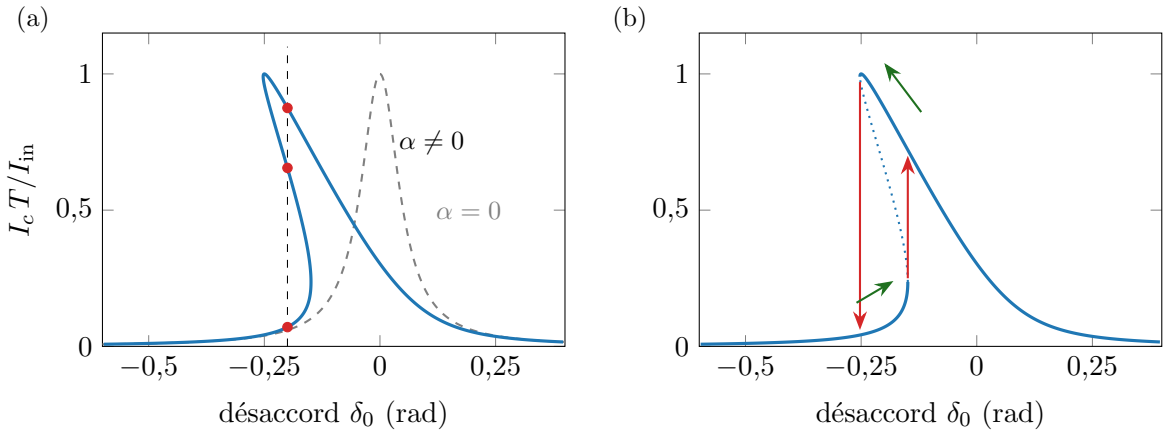


Figure 22 – Fabry-Perot non linéaire. (a) Intensité intracavité en fonction du désaccord δ_0, solution de l'éq. (4.39), pour $m = 400$ et $\alpha I_{\text{in}}/T = 0{,}25\,\text{rad}$ (trait plein), comparée à la résonance lorentzienne obtenue pour $\alpha = 0$ (tirets). Dans un certain domaine de désaccord, trois solutions sont possibles (points rouges). (b) Hystérésis : la branche intermédiaire (pointillés) est instable. En balayant δ_0 vers les valeurs croissantes, le système suit la branche inférieure puis saute sur la branche supérieure ; en balayant δ_0 vers les valeurs décroissantes, il suit la branche supérieure jusqu'à son extrémité, puis retombe sur la branche inférieure (flèches rouges).

4.3 Mesures interférométriques

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la précision ultime d'une mesure interférométrique. Nous montrons qu'elle est limitée par les fluctuations quantiques de la lumière, puis nous discutons les contraintes pratiques sur les différents paramètres, en particulier la bande passante d'une mesure utilisant une cavité Fabry-Perot. Nous décrivons enfin la détection homodyne, qui permet de caractériser le champ électromagnétique lui-même.

4.3.1 Limite quantique de précision

Intéressons-nous à la mesure d'une position de miroir dans un interféromètre. Un déplacement δx du miroir modifie la phase de l'onde réfléchie de

$$\delta\varphi = 4\pi \frac{\delta x}{\lambda} \qquad \text{pour un Michelson,} \tag{4.40}$$

$$\delta\varphi = 8\mathcal{F} \frac{\delta x}{\lambda} \qquad \text{pour un Fabry-Perot.} \tag{4.41}$$

Dans un Fabry-Perot, le déphasage est multiplié par $2\mathcal{F}/\pi$ (ce résultat sera démontré ci-dessous, éq. (4.57)). Ce facteur reflète le grand nombre d'allers-retours de la lumière dans la cavité ; il est à comparer au nombre moyen $\mathcal{F}/2\pi$ d'allers-retours effectués par un photon avant de sortir (chapitre 3), les deux ne différant que par un facteur numérique. La mesure de δx revient donc à une mesure de la phase du champ. Quelle est la limite de précision ?

On représente le champ dans l'espace des phases (figure 23), dont les axes correspondent aux quadratures X (champ électrique) et P (champ magnétique) introduites au chapitre 3.

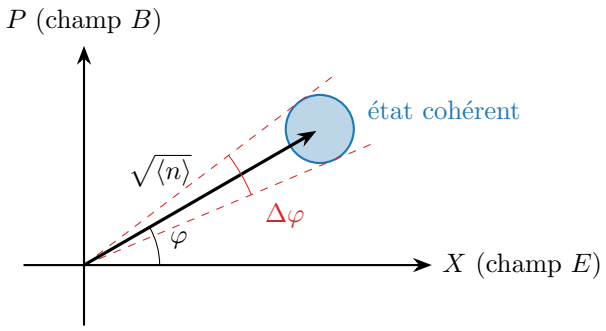


Figure 23 – Représentation d'un état cohérent dans l'espace des phases, dont les axes X et P correspondent au champ électrique et au champ magnétique. L'amplitude moyenne vaut $\sqrt{\langle n\rangle}$, où $\langle n\rangle$ est le nombre moyen de photons, et la phase φ. Les fluctuations quantiques (disque bleu) induisent une incertitude $\Delta\varphi \simeq 1/\sqrt{\langle n\rangle}$ sur la phase.

Le module du vecteur est relié au nombre de photons n, et son angle à la phase φ du champ. Le nombre de photons et la phase obéissent à une relation de Heisenberg

$$\Delta\varphi\,\Delta n \gtrsim 1, \tag{4.42}$$

qui est saturée dans un état cohérent, tel qu'émis par un laser. [1] On rappelle que dans un état cohérent la statistique du nombre de photons est poissonienne, soit $\Delta n = \sqrt{\langle n\rangle}$. On en déduit $\Delta\varphi \simeq 1/\sqrt{\langle n\rangle}$, d'où la limite de précision sur la position du miroir mesurée à l'aide d'un Fabry-Perot :

$$\delta x = \frac{\lambda}{8\mathcal{F}\sqrt{\langle n\rangle}}. \tag{4.43}$$

La précision est d'autant meilleure que la cavité a une grande finesse, et que l'on augmente la puissance P du laser et la durée τ de la mesure, puisque

$$\langle n\rangle = \frac{P\tau}{\hbar\omega}. \tag{4.44}$$

Application numérique. Pour l'interféromètre LIGO/Virgo (*advanced*), on a $P \simeq 100\,\mathrm{W}$ à $\lambda = 1{,}064\,\mu\mathrm{m}$, et une finesse $\mathcal{F} \simeq 450$ dans chaque bras (soit un facteur d'amplification du déphasage $2\mathcal{F}/\pi \simeq 300$). Pour une durée d'intégration $\tau = 1\,\mathrm{s}$, on a $\langle n\rangle = P\tau\lambda/(2\pi\hbar c) \simeq 5\times10^{20}$ photons, soit $\sqrt{\langle n\rangle} \simeq 2{,}3\times10^{10}$, d'où

$$\delta x \simeq \frac{1{,}064\times10^{-6}\,\mathrm{m}}{8\times450\times2{,}3\times10^{10}} \simeq 1{,}3\times10^{-20}\,\mathrm{m}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{\delta x}{L} \simeq 3\times10^{-24}. \tag{4.45}$$

De manière équivalente, l'incertitude sur la phase vaut $\Delta\varphi \simeq 1/\sqrt{\langle n\rangle} \simeq 4\times10^{-11}\,\mathrm{rad}$, bien inférieure au déphasage $\sim 10^{-8}\,\mathrm{rad}$ attendu au passage d'une onde gravitationnelle (éq. (4.13)).

1. Le facteur numérique d'ordre unité dans le membre de droite dépend de la définition précise de l'incertitude sur la phase ; seul l'ordre de grandeur importe ici.

4.3.2 Contraintes sur les différents paramètres

Chacun des paramètres de l'éq. (4.43) ne peut pas être augmenté indéfiniment :
— augmenter P : il faut disposer d'une source laser puissante (et stable) ; des non-linéarités apparaissent (voir le Fabry-Perot non linéaire), ainsi que des dommages sur les optiques ; enfin, le bruit dû aux fluctuations de la pression de radiation sur les miroirs augmente ;
— augmenter τ : cela limite la résolution temporelle de la mesure ;
— augmenter $\mathcal{F}$: cela augmente la durée de piégeage des photons dans la cavité, ce qui limite la bande passante, comme nous le montrons maintenant.

4.3.3 Bande passante d'un interféromètre de Fabry-Perot

On construit un modèle de mesure de position prenant en compte l'aspect dynamique. On considère une cavité formée d'un miroir d'entrée de coefficients r, t et d'un miroir de fond parfaitement réfléchissant, situé à la distance $L_0 + x(t)$, où $x(t)$ est le petit déplacement que l'on cherche à mesurer (figure 24a). On note a et a' les amplitudes intracavité au niveau du miroir d'entrée, se propageant respectivement vers le miroir de fond et en sens inverse, et $\tau = 2L_0/c$ la durée d'un aller-retour (à ne pas confondre avec la durée de la mesure, notée aussi τ plus haut). Les champs vérifient

$$\begin{cases} a(t) = t\, a^{\mathrm{in}}(t) + \mathrm{i}r\, a'(t), \\ a'(t) = \mathrm{i}\, a(t-\tau)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k(L_0+x)}, \\ a^{\mathrm{out}}(t) = t\, a'(t) + \mathrm{i}r\, a^{\mathrm{in}}(t), \end{cases} \tag{4.46}$$

où l'on a pris un coefficient de réflexion i pour le miroir de fond, conformément à notre convention. On suppose la cavité à résonance en l'absence de déplacement, soit $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kL_0} = -1$, et on note $\psi = 2kx \ll 1$. On obtient

$$a(t) = t\, a^{\mathrm{in}} + r\, a(t-\tau)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}. \tag{4.47}$$

Si l'amplitude a varie lentement à l'échelle de τ, on peut développer

$$a(t-\tau) \simeq a(t) - \tau \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}, \tag{4.48}$$

soit

$$a(t) = t\, a^{\mathrm{in}} + r\left(a(t) - \tau \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}. \tag{4.49}$$

On suppose r proche de 1 : $r = 1 - \gamma$ avec $\gamma \ll 1$, de sorte que $t = \sqrt{1-r^2} \simeq \sqrt{2\gamma}$. Au premier ordre en γ, ψ et $\tau\, \mathrm{d}a/\mathrm{d}t$,

$$a = t\, a^{\mathrm{in}} + a - \gamma a + \mathrm{i}\psi a - \tau \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}, \tag{4.50}$$

soit

$$\tau \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = (-\gamma + \mathrm{i}\psi)\, a + \sqrt{2\gamma}\, a^{\mathrm{in}}. \tag{4.51}$$

Le paramètre γ est relié à la finesse de la cavité : d'après l'éq. (4.35) avec $T_1 = t^2 = 2\gamma$ et $T_2 = 0$, on a $\mathcal{F} \simeq 2\pi/T_1 = \pi/\gamma$.

Régime stationnaire. En l'absence de déplacement ($x = 0$, donc $\psi = 0$), le champ intracavité stationnaire vaut

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}\, a^{\text{in}}. \tag{4.52}$$

L'intensité intracavité est amplifiée d'un facteur $2/\gamma = 2\mathcal{F}/\pi \gg 1$.

Réponse à un déplacement. On écrit $a = \bar{a} + \delta a$, et on linéarise l'éq. (4.51) au premier ordre en δa et x :

$$\tau \frac{\mathrm{d}\,\delta a}{\mathrm{d}t} = -\gamma\,\delta a + 2\mathrm{i}k\bar{a}\,x. \tag{4.53}$$

On décompose le mouvement du miroir et la variation de l'amplitude en composantes de Fourier, $x(t) = x[\Omega]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}$ et $\delta a(t) = \delta a[\Omega]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}$. On obtient

$$\delta a[\Omega]\,(\gamma - \mathrm{i}\Omega\tau) = 2\mathrm{i}k\bar{a}\,x[\Omega], \tag{4.54}$$

soit

$$\delta a[\Omega] = \frac{2\mathrm{i}k\bar{a}}{\gamma\left(1 - \mathrm{i}\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)}\, x[\Omega], \qquad \text{avec} \qquad \Omega_c = \frac{\gamma}{\tau}. \tag{4.55}$$

La fréquence de coupure vaut

$$\frac{\Omega_c}{2\pi} = \frac{\gamma c}{4\pi L_0} = \frac{1}{2}\,\frac{\nu_{\text{ISL}}}{\mathcal{F}}, \tag{4.56}$$

c'est-à-dire la demi-largeur à mi-hauteur du pic de résonance de la cavité. Le facteur $1/\gamma$ dans l'éq. (4.55) correspond à l'amplification de la sensibilité par la cavité, mais celle-ci n'opère que pour des fréquences $\Omega \lesssim \Omega_c$: la bande passante est inversement proportionnelle à la finesse.

Signal en sortie. En régime stationnaire, on a $\bar{a}' = -\mathrm{i}\bar{a}$, et le champ sortant vaut $\bar{a}^{\text{out}} = -\mathrm{i}t\bar{a} + \mathrm{i}r\,a^{\text{in}} = -\mathrm{i}a^{\text{in}}$ (on a utilisé l'expression exacte $\bar{a} = t\,a^{\text{in}}/(1-r)$ et $t^2 = 1-r^2$) : toute la lumière est réfléchie, comme il se doit pour une cavité sans pertes. Sa variation est dominée par celle du champ intracavité, $\delta a^{\text{out}} \simeq -\mathrm{i}t\,\delta a$ (on néglige la contribution directe $2\mathrm{i}k\bar{a}x$ à $\delta a'$, plus petite d'un facteur γ à basse fréquence). On en déduit la modulation de phase du champ sortant :

$$\delta\varphi^{\text{out}}[\Omega] = \frac{\delta a^{\text{out}}}{\mathrm{i}\,\bar{a}^{\text{out}}} = \frac{4k}{\gamma\,(1 - \mathrm{i}\Omega/\Omega_c)}\, x[\Omega] = \frac{2\mathcal{F}}{\pi}\,\frac{2k\,x[\Omega]}{1 - \mathrm{i}\Omega/\Omega_c}. \tag{4.57}$$

À basse fréquence, on retrouve $\delta\varphi = 8\mathcal{F}\,x/\lambda$ (éq. (4.41)) : le déphasage $2kx$ obtenu par réflexion sur un miroir seul est multiplié par $2\mathcal{F}/\pi$. Le gain en amplitude par rapport à un miroir seul,

$$G(\Omega) = \frac{2\mathcal{F}/\pi}{\sqrt{1 + \Omega^2/\Omega_c^2}}, \tag{4.58}$$

vaut $2\mathcal{F}/\pi$ pour $\Omega \ll \Omega_c$, puis décroît comme $2/(\Omega\tau)$, indépendamment de la finesse, pour $\Omega \gg \Omega_c$ (figure 24b). Pour les fréquences Ω très grandes devant Ω_c, il n'y a donc plus d'intérêt à augmenter la finesse de la cavité. Par exemple, pour LIGO ($L_0 = 4\,\text{km}$, $\mathcal{F} \simeq 450$), on trouve $\Omega_c/2\pi = c/(4\mathcal{F}L_0) \simeq 40\,\text{Hz}$, une fréquence plus basse que celles des ondes gravitationnelles recherchées (quelques dizaines à quelques centaines de hertz) : augmenter davantage la finesse n'améliorerait guère la sensibilité dans cette gamme.

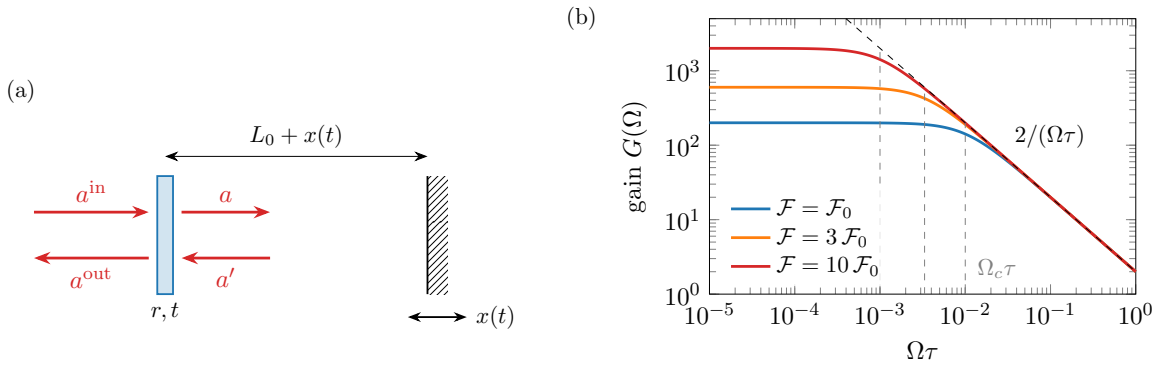


Figure 24 – (a) Modèle de mesure de la position $x(t)$ d'un miroir de fond parfaitement réfléchissant à l'aide d'une cavité Fabry-Perot. (b) Gain en amplitude $G(\Omega)$ du signal de phase par rapport à une réflexion sur un miroir seul, en fonction de la fréquence Ω du mouvement (échelles logarithmiques), pour trois valeurs de la finesse ($\mathcal{F}_0 = \pi/0{,}01$). Le gain vaut $2\mathcal{F}/\pi$ à basse fréquence, mais la fréquence de coupure Ω_c (tirets verticaux) diminue lorsque la finesse augmente ; à haute fréquence, toutes les courbes tendent vers $2/(\Omega\tau)$.

4.3.4 Caractérisation du champ par détection homodyne

On cherche à caractériser l'état d'un champ, par exemple un état cohérent ayant subi une interaction non linéaire, qui a pu modifier ses fluctuations quantiques. Une simple mesure d'intensité ne donne pas accès à la phase du champ. On fait donc interférer le champ à mesurer a avec un champ de référence a_{OL}, appelé oscillateur local, sur une lame séparatrice 50:50, et on mesure les intensités I_1 et I_2 sur les deux sorties (figure 25a).

L'oscillateur local est dans un état cohérent intense : on pourra négliger ses fluctuations. En prenant, comme pour le Fabry-Perot, un coefficient $1/\sqrt{2}$ en transmission et $\mathrm{i}/\sqrt{2}$ en réflexion, les champs en sortie de la lame valent

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a + \mathrm{i}a_{\text{OL}}\right), \qquad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{i}a + a_{\text{OL}}\right). \tag{4.59}$$

On décompose $a_{\text{OL}} = \alpha_{\text{OL}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, avec $\alpha_{\text{OL}} \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$I_1 = |a_1|^2 = \frac{1}{2}\left(|a|^2 + \alpha_{\text{OL}}^2 - 2\,\mathrm{Re}\left[\mathrm{i}a\,\alpha_{\text{OL}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right]\right), \tag{4.60}$$

$$I_2 = |a_2|^2 = \frac{1}{2}\left(|a|^2 + \alpha_{\text{OL}}^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[\mathrm{i}a\,\alpha_{\text{OL}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right]\right). \tag{4.61}$$

On s'intéresse à la différence des intensités :

$$\delta I = I_2 - I_1 = 2\alpha_{\text{OL}}\,\mathrm{Re}\left[a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2-\varphi)}\right] = 2\alpha_{\text{OL}}\,\mathrm{Re}\left[a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right], \qquad \theta = \varphi - \frac{\pi}{2}. \tag{4.62}$$

La différence d'intensité δI mesure donc directement une quadrature du champ, c'est-à-dire la projection de l'amplitude a sur l'axe faisant l'angle θ avec l'axe réel dans le plan complexe (figure 25b). Elle est de plus amplifiée par l'amplitude α_{OL} de l'oscillateur local, ce qui permet de détecter des champs a très faibles. En faisant varier la phase φ de l'oscillateur local, on a accès aux différentes quadratures, et donc à la forme complète de la distribution des fluctuations du champ.

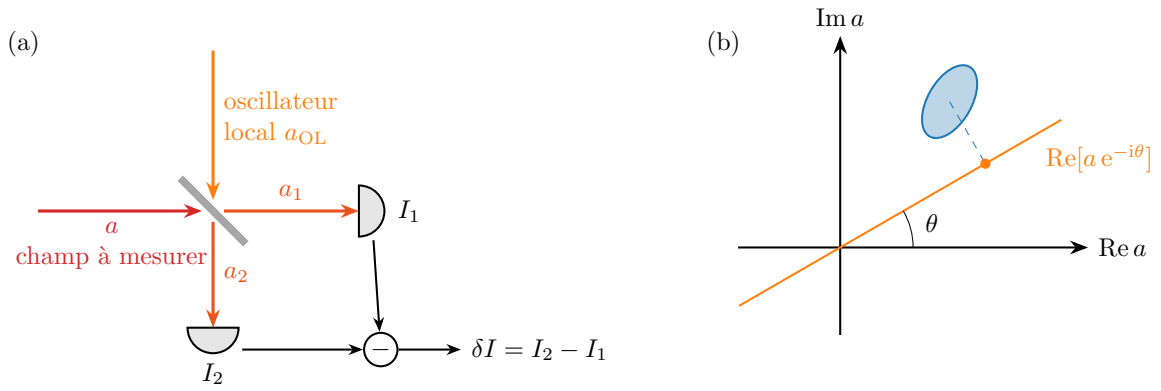


Figure 25 – (a) Détection homodyne : le champ à mesurer a interfère avec un oscillateur local intense a_{OL} sur une lame séparatrice 50:50, et on mesure la différence δI des intensités sur les deux sorties. (b) La différence d'intensité est proportionnelle à la quadrature $\mathrm{Re}[a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}]$ du champ, c'est-à-dire à la projection de l'amplitude a (dont les fluctuations sont représentées par la tache bleue) sur l'axe faisant l'angle θ avec l'axe réel, fixé par la phase de l'oscillateur local.

En pratique, pour que la phase relative entre le champ à mesurer et l'oscillateur local soit bien définie, l'oscillateur local est prélevé sur l'état cohérent avant son interaction avec le système d'intérêt.

5 Propagation et diffraction lumineuse

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la propagation d'une onde lumineuse réaliste, au-delà de l'onde plane d'extension infinie. Nous établissons d'abord l'équation qui régit la propagation d'un faisceau de taille finie dans l'approximation paraxiale, et nous la résolvons formellement, ce qui permet de retrouver le principe de Huygens-Fresnel. Nous en déduisons la diffraction de Fraunhofer, qui décrit le champ à grande distance, puis la formation des images par une lentille et leur résolution limitée par la diffraction. Nous construisons enfin une base de modes optiques gaussiens, nous étudions leur propagation à travers un système optique et nous déterminons les modes propres d'une cavité optique.

On se limite à des ondes qui se propagent selon un axe z, et dont la taille finie $\sigma(z)$ dans le plan xy est caractérisée par la taille quadratique moyenne de la distribution d'intensité $I(x,y,z)$,

$$\sigma^2(z) = \frac{\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(x^2+y^2)\,I(x,y,z)}{\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,I(x,y,z)} - \langle x\rangle^2 - \langle y\rangle^2, \qquad \langle x\rangle = \frac{\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,x\,I(x,y,z)}{\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,I(x,y,z)}, \tag{5.1}$$

et de même pour $\langle y\rangle$.

Il n'est pas possible de trouver un mode électromagnétique du vide, d'extension transverse finie, dont le profil transverse ne dépend pas de z, c'est-à-dire tel que $I(x,y,z) = I(x,y)$: c'est le phénomène de diffraction. L'explication physique est la suivante. Une onde de taille σ dans le plan $z=0$ se décompose en ondes planes dont les vecteurs d'onde ont une composante transverse $k_\perp \sim 1/\sigma$. À grande distance, le paquet d'ondes se retrouve en z avec une taille de l'ordre de $(k_\perp/k_z)\,z$, ce qui correspond à un

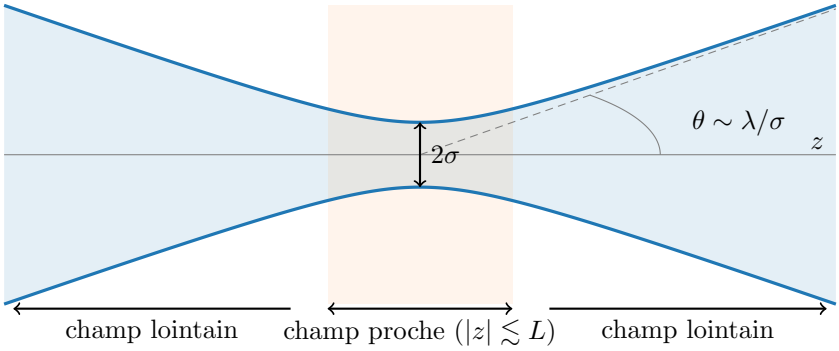


Figure 26 – Évolution de la taille d'un faisceau de taille minimale σ. Dans la zone de champ proche ($|z| \lesssim L = \sigma^2/\lambda$), le faisceau est approximativement parallèle ; dans la zone de champ lointain, sa taille croît linéairement avec $|z|$, avec un angle de divergence $\theta \sim \lambda/\sigma$.

angle de divergence $\theta \sim k_\perp/k \sim 1/(k\sigma)$, soit, sans tenir compte des facteurs numériques comme 2π,

$$\theta \sim \frac{\lambda}{\sigma}. \tag{5.2}$$

On distingue donc deux zones (figure 26) : le champ proche, où la taille du faisceau reste de l'ordre de σ, et le champ lointain, où elle croît linéairement avec z. La transition entre les deux se produit lorsque $\theta z \sim \sigma$, c'est-à-dire pour

$$z \sim L = \frac{\sigma^2}{\lambda}, \tag{5.3}$$

qui correspond, à un facteur numérique près, à la longueur de Rayleigh que nous rencontrerons pour les faisceaux gaussiens. La notion de faisceau parallèle n'a de sens que dans la zone de champ proche, de taille L. Nous nous limiterons à la situation où $L \gg \lambda$, auquel cas on a

$$\lambda \ll \sigma \ll L, \tag{5.4}$$

où σ est l'échelle de variation du profil dans le plan xy, et L l'échelle de variation de ce profil selon z.

5.1 Propagation dans l'approximation paraxiale

5.1.1 Ordres de grandeur

Avant d'établir l'équation de propagation, estimons la longueur $L = \sigma^2/\lambda$ et la divergence $\theta = \lambda/\sigma$ dans quelques situations typiques.

Faisceau laser de travaux pratiques. Pour un laser hélium-néon ou un pointeur laser, on a typiquement $\sigma = 1\,\text{mm}$ et $\lambda \simeq 1\,\mu\text{m}$, d'où $L \simeq 1\,\text{m}$: un tel faisceau reste parallèle sur la longueur d'une table d'optique.

Interféromètre Virgo. Les bras de l'interféromètre Virgo, destiné à la détection des ondes gravitationnelles, sont des cavités de longueur $L = 3\,\text{km}$. Pour que le faisceau reste parallèle sur toute cette distance, il faut une taille $\sigma \gtrsim \sqrt{L\lambda} \simeq 5\,\text{cm}$ (pour $\lambda \simeq 1\,\mu\text{m}$).

Télémétrie Terre-Lune. Pour mesurer la distance Terre-Lune, on envoie des impulsions laser vers des réflecteurs déposés à la surface de la Lune, et on mesure la durée de l'aller-retour. Avec $L \simeq 3{,}8 \times 10^8\,\mathrm{m}$ et $\lambda = 0{,}5\,\mu\mathrm{m}$, il faudrait une taille $\sigma = \sqrt{L\lambda} \simeq 14\,\mathrm{m}$ pour que le faisceau reste parallèle jusqu'à la Lune, ce qui est plus grand qu'un télescope. En pratique, on a plutôt $\sigma = 10\,\mathrm{cm}$ sur Terre, ce qui donne une divergence

$$\theta = \frac{\lambda}{\sigma} = \frac{0{,}5 \times 10^{-6}}{0{,}1} = 5 \times 10^{-6}\,\mathrm{rad} \simeq 1\,\text{seconde d'arc}. \tag{5.5}$$

En pratique, la turbulence atmosphérique augmente la divergence jusqu'à $\theta \simeq 4$ secondes d'arc, soit $2 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad}$. Sur la Lune, la taille du faisceau est alors $\sigma \simeq \theta L \simeq 7\,\mathrm{km}$, à comparer à la taille du réflecteur, de l'ordre de 10 cm. On ne réfléchit donc qu'une fraction

$$f \simeq \left(\frac{0{,}1}{7 \times 10^3}\right)^2 \simeq 2 \times 10^{-10} \tag{5.6}$$

de la lumière émise. En supposant que le faisceau réfléchi subit le même élargissement au retour, on ne collecte après un aller-retour qu'une fraction $f^2 \simeq 4 \times 10^{-20}$ de la lumière émise. On utilise un laser impulsionnel, chaque impulsion ayant une énergie de 1 J, soit un nombre de photons

$$N_{\text{photons}} = \frac{1\,\mathrm{J}}{hc/\lambda} = \frac{5 \times 10^{-7}}{6{,}6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} \simeq 2{,}5 \times 10^{18}. \tag{5.7}$$

On ne collecte donc qu'environ $f^2 N_{\text{photons}} \simeq 0{,}1$ photon à chaque impulsion : il faut accumuler de nombreuses impulsions pour détecter quelques photons ! (Cette estimation, qui ne vaut qu'en ordre de grandeur, néglige notamment la taille du télescope de réception et le nombre de coins de cube des réflecteurs.)

5.1.2 Équation de l'enveloppe lentement variable

On ne considère pas ici la polarisation, et on écrit le champ électrique sous la forme

$$E(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz - \omega t)}, \qquad k = \frac{\omega}{c}, \tag{5.8}$$

où l'enveloppe $A(\mathbf{r})$ varie lentement par rapport à λ. Dans le vide, l'équation d'onde s'écrit, en décomposant le laplacien en $\Delta = \Delta_\perp + \partial_z^2$, avec $\Delta_\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2$ le laplacien transverse,

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta E - \frac{1}{c^2}\,\partial_t^2 E \\ &= \left[\Delta_\perp A + \partial_z^2 A + 2\mathrm{i}k\,\partial_z A - k^2 A + \frac{\omega^2}{c^2} A\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz - \omega t)} \\ &= \left[\Delta_\perp A + \partial_z^2 A + 2\mathrm{i}k\,\partial_z A\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz - \omega t)}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Jusqu'ici, le calcul est exact. D'après la hiérarchie d'échelles (5.4), on s'attend à ce que A varie plus rapidement selon x et y (sur l'échelle σ) que selon z (sur l'échelle L), donc $\partial_z^2 A \ll \Delta_\perp A$. De même, on s'attend à ce que $\partial_z(\partial_z A) \ll k\,\partial_z A$, puisque $1/L \ll k$. On est donc amené à négliger $\partial_z^2 A$, d'où l'équation de l'enveloppe lentement variable, ou équation paraxiale,

$$(2\mathrm{i}k\,\partial_z + \Delta_\perp)\,A = 0. \tag{5.10}$$

Cette équation est analogue à l'équation de Schrödinger d'une particule libre à deux dimensions x, y, où z joue le rôle du temps.

5.1.3 Résolution formelle de l'équation de propagation

L'analogie avec l'équation de Schrödinger nous sert de guide. On cherche à exprimer l'amplitude $A(\boldsymbol{\rho}, z)$, où $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ est la position dans le plan transverse, en fonction de l'amplitude $A(\boldsymbol{\rho}, 0)$ dans le plan $z = 0$, comme on le ferait pour l'évolution temporelle d'une particule libre à deux dimensions. Il est plus simple de considérer l'amplitude dans l'espace des vecteurs d'onde transverses (l'analogue de l'espace des impulsions),

$$\tilde{A}(\mathbf{k}_\perp, z) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}} A(\boldsymbol{\rho}, z), \qquad A(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}^2\mathbf{k}_\perp\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}} \tilde{A}(\mathbf{k}_\perp, z). \quad (5.11)$$

L'équation de propagation (5.10) devient

$$2\mathrm{i}k\, \partial_z \tilde{A} - k_\perp^2 \tilde{A} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \tilde{A}(\mathbf{k}_\perp, z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\perp^2 z/2k}\, \tilde{A}(\mathbf{k}_\perp, 0). \quad (5.12)$$

Chaque onde plane acquiert simplement une phase qui dépend de son vecteur d'onde transverse. Ceci permet de relier $A(\boldsymbol{\rho}, z)$ à $A(\boldsymbol{\rho}, 0)$:

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\rho}, z) &= \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}^2\mathbf{k}_\perp\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\perp^2 z/2k}\, \tilde{A}(\mathbf{k}_\perp, 0) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathrm{d}^2\mathbf{k}_\perp\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\perp^2 z/2k} \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}'} A(\boldsymbol{\rho}', 0), \end{aligned} \quad (5.13)$$

soit

$$A(\boldsymbol{\rho}, z) = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\, G(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z)\, A(\boldsymbol{\rho}', 0), \quad (5.14)$$

où l'on introduit la fonction de Green

$$G(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathrm{d}^2\mathbf{k}_\perp\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_\perp\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\perp^2 z/2k}. \quad (5.15)$$

C'est une intégrale gaussienne. En utilisant, pour chacune des deux composantes de $\mathbf{k}_\perp$, le résultat $\int \mathrm{d}q\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}aq^2+\mathrm{i}qu} = \sqrt{\pi/\mathrm{i}a}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2/4a}$, avec $a = z/2k$, on obtient

$$G(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z) = \frac{k}{2\pi\mathrm{i}z}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\|^2/2z}. \quad (5.16)$$

Lien avec le principe de Huygens-Fresnel. On peut rapprocher ce résultat du principe de Huygens-Fresnel (idée initiale de Huygens en 1690 dans sa théorie ondulatoire de la lumière, formalisée par Fresnel en 1818). Selon ce principe, le champ $E(x, y, z)$ peut s'obtenir à partir du champ $E(x, y, z = 0)$ en propageant depuis chaque point $\boldsymbol{\rho}'$ du plan $z = 0$ une onde sphérique $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}/r$ (figure 27) :

$$E(\boldsymbol{\rho}, z) \propto \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\, E(\boldsymbol{\rho}', z = 0)\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}, \qquad r^2 = \|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'\|^2 + z^2. \quad (5.17)$$

Comme on a $\|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'\| \ll z$ dans l'approximation paraxiale, on approxime

$$r \simeq z \left(1 + \frac{\|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'\|^2}{2z^2}\right), \quad (5.18)$$

et on obtient

$$E(\boldsymbol{\rho}, z) \propto \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\, E(\boldsymbol{\rho}', z = 0)\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\|^2/2z}}{z}, \quad (5.19)$$

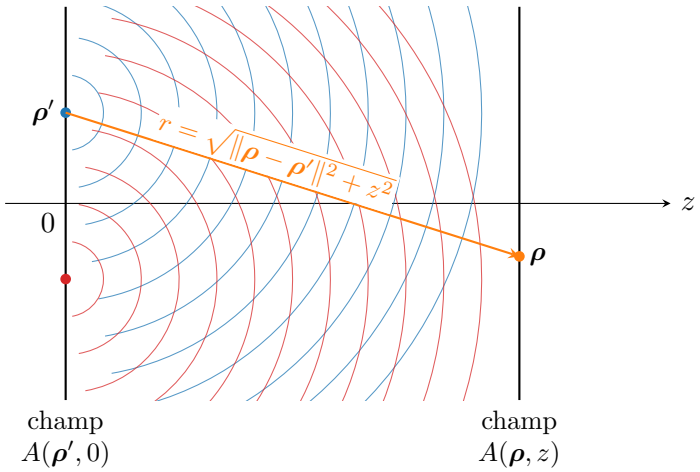


Figure 27 – Principe de Huygens-Fresnel : chaque point $\boldsymbol{\rho}'$ du plan $z = 0$ émet une onde sphérique secondaire, et le champ dans le plan z est la superposition de ces ondelettes. Dans l'approximation paraxiale, ce principe redonne la fonction de Green (5.16).

ce qui est cohérent avec notre résultat (5.14)–(5.16), le facteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$ correspondant à la phase de l'onde porteuse dans l'éq. (5.8). Le calcul de la fonction de Green fixe de plus le préfacteur, $k/2\pi\mathrm{i}z = 1/\mathrm{i}\lambda z$, que le principe de Huygens-Fresnel doit postuler (amplitude et déphasage de $-\pi/2$ des ondelettes secondaires). Notons que le principe de Huygens-Fresnel, écrit tel quel, n'est pas correct au-delà de l'approximation paraxiale (il faut alors tenir compte d'un facteur d'inclinaison et de termes en $1/r^2$).

5.2 Diffraction de Fraunhofer

On s'intéresse maintenant à la propagation « à grande distance ». On développe la fonction de Green en supposant que les points source $\boldsymbol{\rho}'$ sont restreints à une zone de taille finie d autour de l'axe, où $A(\boldsymbol{\rho}', 0) \neq 0$. On écrit

$$G = \frac{k}{2\pi\mathrm{i}z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\rho^2 - 2\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}' + \rho'^2)/2z} \simeq \frac{k}{2\pi\mathrm{i}z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho^2/2z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}'/z}, \tag{5.20}$$

où l'on a négligé le terme en ρ'^2. On obtient alors

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\rho}, z) &= \frac{k}{2\pi\mathrm{i}z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho^2/2z} \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\, A(\boldsymbol{\rho}', 0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{z}\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}'} \\ &= \frac{k}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho^2/2z}\,\tilde{A}\left(\frac{k\boldsymbol{\rho}}{z}, 0\right). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Le champ lointain est donc donné par la transformée de Fourier du champ proche, prise pour un vecteur d'onde transverse $\mathbf{k}_\perp = k\boldsymbol{\rho}/z$. En effet, $\boldsymbol{\rho}/z$ représente l'angle de propagation : le champ observé dans la direction $\boldsymbol{\rho}/z$ provient de la composante en ondes planes de vecteur d'onde transverse $k\boldsymbol{\rho}/z$.

Régime de validité. La phase négligée, $k\rho'^2/2z$, avec $\rho' \lesssim d$, doit être petite devant 1, soit $d^2 \ll \lambda z$ à un facteur numérique près. De manière équivalente, la taille d de la source

doit être petite devant la taille typique $\lambda z/d$ de la figure de diffraction, ce qui s'écrit

$$z \gg \frac{d^2}{\lambda}. \tag{5.22}$$

On retrouve la condition de champ lointain $z \gg L$ établie en introduction.

5.2.1 Exemples typiques

Diffraction par une fente. On considère une fente de largeur a, $|x| \leq a/2$, éclairée par une onde plane, invariante selon y. Le problème est alors à une dimension et

$$A(x,z) \propto \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x' \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{z}xx'} = \frac{\sin\left(\frac{ka}{2z}x\right)}{\frac{k}{2z}x} \propto \operatorname{sinc}\left(\frac{ka}{2z}x\right), \tag{5.23}$$

avec $\operatorname{sinc} u = \sin u/u$. D'où l'intensité

$$I(x) \propto \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ka}{2z}x\right). \tag{5.24}$$

Elle s'annule pour la première fois en $x = \lambda z/a$ (figure 28a). La taille caractéristique de la figure de diffraction, $\lambda z/a$, est inversement proportionnelle à la taille a de la fente !

Diffraction par une ouverture circulaire. Cet exemple est pertinent lorsque la lumière se propage dans un système optique comportant des éléments de rayon fini (lentilles, miroirs de télescopes). Pour une ouverture de diamètre d, la transformée de Fourier fait intervenir la fonction de Bessel J_1 (le calcul est détaillé à la section 5.3.2), et on obtient la figure d'Airy

$$I(\rho) \propto \left[\frac{J_1\left(\frac{kd}{2z}\rho\right)}{\rho}\right]^2, \tag{5.25}$$

qui s'annule pour la première fois lorsque $kd\rho/2z \simeq 3{,}83$, soit pour un angle

$$\theta = \frac{\rho}{z} \simeq 1{,}22\,\frac{\lambda}{d}, \tag{5.26}$$

où d est le diamètre de l'ouverture (figure 28b).

Applications numériques. Pour un télescope de diamètre $d = 1\,\mathrm{m}$ travaillant à $\lambda = 1\,\mu\mathrm{m}$, on a $\theta \sim 10^{-6}\,\mathrm{rad}$. Pour l'ancien radiotélescope d'Arecibo, de diamètre $d = 300\,\mathrm{m}$, observant à $\lambda \sim 10\,\mathrm{cm}$ (fréquence $\nu \sim 3\,\mathrm{GHz}$), on a $\theta \sim 0{,}1/300 \simeq 3\times10^{-4}\,\mathrm{rad}$.

Fentes d'Young. On considère une paire de fentes de largeur a, dont les centres sont séparés d'une distance d. On se ramène au cas précédent : la translation d'une fente de $\pm d/2$ multiplie sa transformée de Fourier par une phase $\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\frac{kd}{2z}x}$, d'où

$$A(x,z) \propto \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{kd}{2z}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{kd}{2z}x}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{ka}{2z}x\right), \tag{5.27}$$

et

$$I(x,z) \propto \underbrace{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{ka}{2z}x\right)}_{\text{diffraction d'une fente}} \underbrace{\left[1+\cos\left(\frac{kd}{z}x\right)\right]}_{\text{interférence entre 2 fentes}}. \tag{5.28}$$

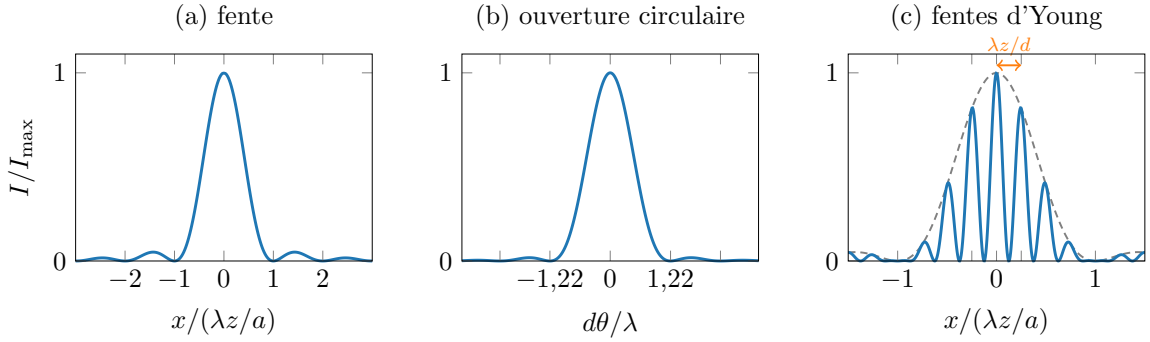


Figure 28 – Figures de diffraction de Fraunhofer. (a) Fente de largeur a : $I \propto \mathrm{sinc}^2(kax/2z)$, de premier zéro en $x = \lambda z/a$. (b) Ouverture circulaire de diamètre d (figure d'Airy), en fonction de l'angle $\theta = \rho/z$: premier zéro en $\theta = 1{,}22\,\lambda/d$. (c) Fentes d'Young de largeur a séparées de $d = 4a$: franges d'interfrange $\lambda z/d$ modulées par la figure de diffraction d'une fente (pointillés).

La figure d'interférence est modulée par la figure de diffraction d'une fente (figure 28c), avec un interfrange

$$D = \frac{2\pi z}{kd} = \frac{\lambda z}{d}. \tag{5.29}$$

Application : télescopes interférométriques. En combinant les signaux de deux télescopes de diamètre a séparés d'une distance $d \gg a$, on obtient une résolution angulaire $\theta \sim \lambda/d$, et non λ/a ! C'est au prix de la nécessité de stabiliser la phase relative entre les télescopes, et d'un signal plus complexe à analyser.

5.3 Formation des images

Nous utilisons maintenant le formalisme de la fonction de Green pour décrire la formation d'une image par une lentille mince. Nous retrouvons la relation de conjugaison de l'optique géométrique, puis nous déterminons l'effet du diamètre fini de la lentille sur la résolution de l'image. Nous terminons par la correction des images formées à travers un milieu complexe.

5.3.1 Conjugaison

On modélise la propagation à travers l'espace libre et une lentille mince placée en $z = 0$, entre un plan objet $z' < 0$ et un plan image $z > 0$ (figure 29a). On note toujours A l'enveloppe du champ.

Effet d'une lentille mince. La lentille introduit un déphasage du champ électromagnétique,

$$A(\boldsymbol{\rho}, 0^+) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\boldsymbol{\rho})} A(\boldsymbol{\rho}, 0^-). \tag{5.30}$$

Pour une lentille plan-convexe d'indice n, de face sphérique de rayon de courbure R, l'épaisseur de verre traversée à la distance ρ de l'axe est réduite de $\rho^2/2R$ par rapport à l'épaisseur sur l'axe. La différence de chemin optique par rapport à l'axe vaut donc

$-(n-1)\rho^2/2R$, d'où

$$\phi(\boldsymbol{\rho}) = \phi(\boldsymbol{\rho}=0) - \frac{k}{2}\,\frac{n-1}{R}\,\rho^2, \tag{5.31}$$

où l'on peut prendre $\phi(\boldsymbol{\rho}=0)$ nul.

Propagation de proche en proche. Le champ en z s'obtient en appliquant successivement la propagation libre de z' à 0^-, le déphasage de la lentille, puis la propagation libre de 0^+ à z :

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\rho},z) &= \frac{k}{2\pi \mathrm{i} z}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}''\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}''\|^2/2z} A(\boldsymbol{\rho}'',0^+) \\ &= \frac{k}{2\pi \mathrm{i} z}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}''\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}''\|^2/2z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{2}\frac{n-1}{R}\rho''^2} A(\boldsymbol{\rho}'',0^-) \\ &= \left(\frac{k}{2\pi \mathrm{i}}\right)^2 \frac{1}{z(-z')}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}''\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k}{2}\Phi} A(\boldsymbol{\rho}',z'), \end{aligned} \tag{5.32}$$

où la phase Φ s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}''\|^2}{z} + \frac{\|\boldsymbol{\rho}''-\boldsymbol{\rho}'\|^2}{-z'} - \frac{n-1}{R}\,\rho''^2 \\ &= \frac{\rho^2+\rho''^2-2\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}''}{z} + \frac{\rho'^2+\rho''^2-2\boldsymbol{\rho}'\cdot\boldsymbol{\rho}''}{-z'} - \frac{n-1}{R}\,\rho''^2 \\ &= \underbrace{\frac{\rho^2}{z}-\frac{\rho'^2}{z'}}_{\text{indépendant de }\boldsymbol{\rho}''} \underbrace{-\frac{2}{z}\,\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}'' + \frac{2}{z'}\,\boldsymbol{\rho}'\cdot\boldsymbol{\rho}''}_{\text{linéaire en }\boldsymbol{\rho}''} + \underbrace{\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z'}-\frac{n-1}{R}\right)\rho''^2}_{\text{quadratique en }\boldsymbol{\rho}''}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

On souhaite effectuer l'intégrale sur $\boldsymbol{\rho}''$, ce qui n'est en général pas simple à interpréter. Le terme quadratique s'annule cependant lorsque

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{z'} = \frac{n-1}{R}. \tag{5.34}$$

On a alors

$$A(\boldsymbol{\rho},z) = \frac{k^2}{4\pi^2 z z'}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k}{2}\left(\frac{\rho^2}{z}-\frac{\rho'^2}{z'}\right)}\left[\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}''\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{z}-\frac{\boldsymbol{\rho}'}{z'}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}''}\right] A(\boldsymbol{\rho}',z'). \tag{5.35}$$

L'intégrale entre crochets vaut

$$(2\pi)^2\,\delta\!\left(k\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{z}-\frac{\boldsymbol{\rho}'}{z'}\right)\right) = (2\pi)^2\left(\frac{z'}{k}\right)^2\delta\!\left(\boldsymbol{\rho}'-\frac{z'}{z}\boldsymbol{\rho}\right), \tag{5.36}$$

où δ est la distribution de Dirac à deux dimensions. D'où la relation simple

$$A(\boldsymbol{\rho},z) = \frac{z'}{z}\,\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{z'}{z^2}\right)\rho^2}}_{\text{de module 1}}\,A\!\left(\frac{z'}{z}\boldsymbol{\rho},z'\right). \tag{5.37}$$

On retrouve le fait que les plans z' et z sont conjugués : le champ dans le plan image reproduit, au facteur de phase près, le champ dans le plan objet, avec un grandissement $\gamma = z/z'$ (négatif, l'image est renversée) et la diminution d'amplitude $1/|\gamma|$ correspondante,

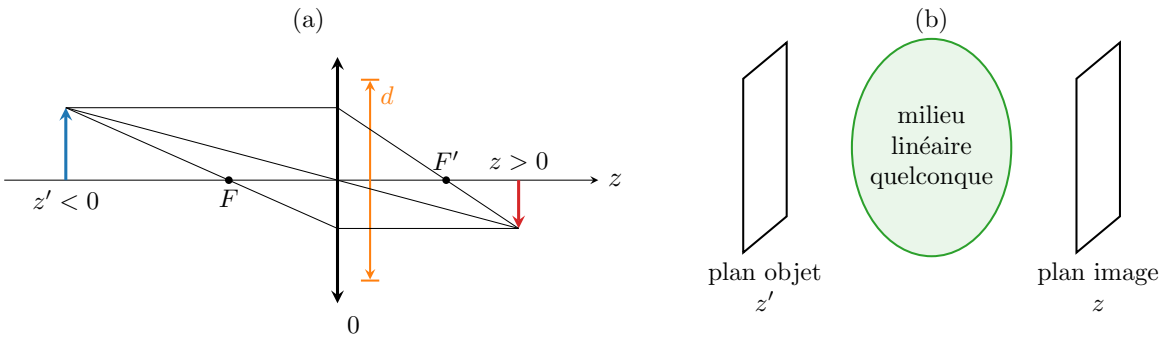


Figure 29 – (a) Formation de l'image d'un objet situé dans le plan $z' < 0$ par une lentille mince de diamètre d placée en $z = 0$: l'image se forme dans le plan conjugué $z > 0$, avec un grandissement $\gamma = z/z'$. Les rayons tracés sont ceux de l'optique géométrique. (b) Imagerie à travers un milieu linéaire quelconque, décrit par une fonction de Green $G(\boldsymbol{\rho}, z; \boldsymbol{\rho}', z')$.

qui assure la conservation de la puissance lumineuse. La condition (5.34) n'est autre que la relation de conjugaison

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z'} = \frac{1}{f'}, \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{f'} = \frac{n-1}{R}. \tag{5.38}$$

Avec cette notation, le déphasage introduit par la lentille s'écrit simplement $\phi(\boldsymbol{\rho}) = -k\rho^2/2f'$.

5.3.2 Résolution d'une image

On a supposé dans le paragraphe précédent que la lentille a un diamètre infini. En pratique, quel est l'effet de son diamètre d ? Dans le calcul précédent, l'intégrale sur $\boldsymbol{\rho}''$ doit être restreinte à $\rho'' \leq d/2$. On pose $\mathbf{A} = k\,(\boldsymbol{\rho}/z - \boldsymbol{\rho}'/z')$ et on calcule, en coordonnées polaires (ρ'', θ) avec θ l'angle entre $\boldsymbol{\rho}''$ et $\mathbf{A}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{PSF}\left(\boldsymbol{\rho}' - \frac{z'}{z}\boldsymbol{\rho}\right) &\equiv \int_{\rho''\leq d/2} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}''\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\rho}''} = \int_0^{d/2} \rho''\mathrm{d}\rho'' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\rho''\cos\theta} \\
&= 2\pi \int_0^{d/2} \rho''\mathrm{d}\rho''\, J_0(A\rho'') = \frac{2\pi}{A^2}\int_0^{dA/2} u\,\mathrm{d}u\, J_0(u) \\
&= \frac{2\pi}{A^2}\,\frac{dA}{2}\, J_1\!\left(\frac{dA}{2}\right) = \frac{\pi d}{k\left\|\frac{\boldsymbol{\rho}}{z} - \frac{\boldsymbol{\rho}'}{z'}\right\|} J_1\!\left(\frac{kd}{2}\left\|\frac{\boldsymbol{\rho}}{z} - \frac{\boldsymbol{\rho}'}{z'}\right\|\right),
\end{aligned} \tag{5.39}$$

où l'on a utilisé la représentation intégrale $J_0(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u\cos\theta}$ et la relation $\int_0^x u\, J_0(u)\,\mathrm{d}u = xJ_1(x)$. On remplace donc la fonction de Dirac $\delta(\boldsymbol{\rho}' - z'\boldsymbol{\rho}/z)$ par la tache d'Airy, aussi appelée fonction d'étalement du point (*point spread function*, PSF). En négligeant les facteurs de phase quadratiques, qui varient peu à l'échelle de la tache d'Airy, l'image est alors donnée par la convolution

$$A(\boldsymbol{\rho}, z) \propto [\mathrm{PSF} * A(\cdot, z')]\left(\frac{z'}{z}\boldsymbol{\rho}\right). \tag{5.40}$$

Chaque point de l'objet donne dans le plan image une tache d'Airy. Exprimée dans le plan objet, la PSF s'annule pour la première fois lorsque $\frac{kd}{2|z'|}\left\|\boldsymbol{\rho}' - \frac{z'}{z}\boldsymbol{\rho}\right\| \simeq 3{,}83$, soit à la distance $1{,}22\,\lambda|z'|/d$ du point conjugué de $\boldsymbol{\rho}$. Deux points de l'objet séparés d'un angle (vu depuis la lentille) inférieur à $1{,}22\,\lambda/d$ ne sont donc pas résolus : on retrouve la limite de résolution (5.26) de la diffraction par une ouverture circulaire.

5.3.3 Correction des images à travers un milieu complexe

On considère maintenant un plan objet z' et un plan image z séparés par un milieu linéaire quelconque (figure 29b). Si le milieu est linéaire, on a toujours une relation

$$A(\boldsymbol{\rho}, z) = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\, G(\boldsymbol{\rho}, z; \boldsymbol{\rho}', z')\, A(\boldsymbol{\rho}', z'). \tag{5.41}$$

Si le milieu est complexe (milieu diffusant, fibre multimode, verre dépoli…), la fonction de Green l'est aussi, et on obtient dans le plan z une image diffuse dont l'intensité n'est pas facilement interprétable.

Cependant, on peut caractériser G en utilisant une base de champs $\{A^{(i)}(\boldsymbol{\rho}', z')\}$ dans le plan objet (par exemple, un seul pixel allumé sur une grille). On mesure alors le champ $A^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, z)$ obtenu dans le plan image pour chaque champ $A^{(i)}(\boldsymbol{\rho}', z')$, pour en déduire G. Il faut pour cela mesurer l'intensité *et* la phase (par exemple par une méthode interférométrique). Si l'on soumet ensuite une image quelconque $A(\boldsymbol{\rho}', z')$, la mesure de $A(\boldsymbol{\rho}, z)$ permet de la reconstruire en inversant la relation linéaire (5.41). Cette méthode, dite de mesure de la matrice de transmission, a été démontrée expérimentalement pour l'imagerie à travers des milieux diffusants [13].

5.4 Modes optiques gaussiens

Nous cherchons maintenant à construire une base de modes optiques d'extension radiale finie. Il y a évidemment une infinité de possibilités. Motivés par les modes optiques propres d'une cavité formée par des miroirs sphériques, nous cherchons des solutions de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left[u(x, y, z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2R(z)}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz - \omega t - \varphi(z))}\right]\boldsymbol{\epsilon}, \tag{5.42}$$

avec u réel, soit une enveloppe lentement variable

$$A(\mathbf{r}) = u(x, y, z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho^2/2R(z)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(z)}. \tag{5.43}$$

La seule variation de phase liée à x, y est ainsi prise quadratique. On vérifie que les surfaces équiphases ont, au voisinage de l'axe, un rayon de courbure $R(z)$: en effet, l'équation $kz + k\rho^2/2R(z) = \text{cste}$ (en négligeant la variation lente de φ) définit, au voisinage d'un point z_1 de l'axe, la surface $z \simeq z_1 - \rho^2/2R(z_1)$, qui est une sphère de rayon $R(z_1)$ au voisinage de l'axe.

Le contenu de cette section est proche de celui traité dans les notes du cours « Physique des lasers » (chapitre « Modes transverses d'un faisceau laser »), dont nous reprenons les conventions, mais la dérivation est ici différente : elle met en évidence l'analogie avec l'oscillateur harmonique quantique.

5.4.1 Équations pour l'amplitude et la phase

On rappelle que, pour une fonction à symétrie cylindrique, $\Delta_\perp f = \partial_\rho^2 f + \frac{1}{\rho}\,\partial_\rho f$. On note $R' = \partial_z R$, $\varphi' = \partial_z \varphi$, et on calcule les dérivées de l'enveloppe (5.43) (en omettant le facteur commun $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho^2/2R}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$) :

$$\partial_z A \to \partial_z u - \mathrm{i}\frac{k\rho^2}{2R^2}\,R'\,u - \mathrm{i}\varphi'\,u, \tag{5.44}$$

$$\frac{1}{\rho}\,\partial_\rho A \to \frac{1}{\rho}\,\partial_\rho u + \mathrm{i}\frac{k}{R}\,u, \tag{5.45}$$

$$\partial_\rho^2 A \to \partial_\rho^2 u + \mathrm{i}\frac{k}{R}\,u + 2\mathrm{i}\frac{k\rho}{R}\,\partial_\rho u - \frac{k^2}{R^2}\,\rho^2 u. \tag{5.46}$$

L'équation de l'enveloppe lentement variable (5.10) s'écrit donc

$$0 = 2\mathrm{i}k\left(\partial_z u - \mathrm{i}\frac{k\rho^2}{2R^2}R'u - \mathrm{i}\varphi' u\right) + \frac{1}{\rho}\,\partial_\rho u + \mathrm{i}\frac{k}{R}u + \partial_\rho^2 u + \mathrm{i}\frac{k}{R}u + 2\mathrm{i}\frac{k\rho}{R}\,\partial_\rho u - \frac{k^2}{R^2}\rho^2 u. \tag{5.47}$$

Comme u, R et φ sont réels, on obtient deux équations, à partir des parties réelle et imaginaire :

$$\frac{k^2\rho^2}{R^2}\,R'u + 2k\varphi' u + \Delta_\perp u - \frac{k^2}{R^2}\,\rho^2 u = 0, \tag{5.48}$$

$$\partial_z u + \frac{1}{R}\,(u + \rho\,\partial_\rho u) = 0. \tag{5.49}$$

Ces équations restent valables sans l'hypothèse de symétrie cylindrique, en remplaçant $\rho\,\partial_\rho$ par $x\partial_x + y\partial_y$.

5.4.2 Modes de Hermite-Gauss

L'éq. (5.48) se réécrit

$$-\frac{1}{2}\,\Delta_\perp u + \frac{1}{2}\,\frac{k^2}{R^2}\,(1 - R')\,\rho^2 u = k\varphi'\,u. \tag{5.50}$$

En chaque point z, c'est l'équation aux valeurs propres d'un oscillateur harmonique à deux dimensions (de masse unité, avec $\hbar = 1$), de pulsation Ω telle que $\Omega^2 = k^2(1 - R')/R^2$, et d'énergie $k\varphi'$. Les solutions sont données par la base des fonctions de Hermite,

$$u_{n,m}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{C_{n,m}}{w(z)}\,\mathrm{e}^{-\rho^2/w^2(z)}\,H_n\!\left(\frac{x\sqrt{2}}{w(z)}\right)H_m\!\left(\frac{y\sqrt{2}}{w(z)}\right), \tag{5.51}$$

où H_n sont les polynômes de Hermite ($H_0 = 1$, $H_1(\xi) = 2\xi$, $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$, …) et $C_{n,m}$ une constante de normalisation. La taille $w(z)$ du mode fondamental est donnée par $2/w^2 = \Omega$, soit

$$\frac{1}{w^4(z)} = \frac{k^2\,(1 - R')}{4R^2}, \tag{5.52}$$

et l'énergie, $k\varphi' = \Omega(n + m + 1)$, par

$$\frac{kw^2}{2}\,\varphi' = n + m + 1. \tag{5.53}$$

Les profils d'intensité de ces modes de Hermite-Gauss, notés TEM_{nm}, sont représentés sur la figure 30 : le mode TEM_{nm} s'annule n fois selon x et m fois selon y (n lignes nodales verticales et m horizontales).

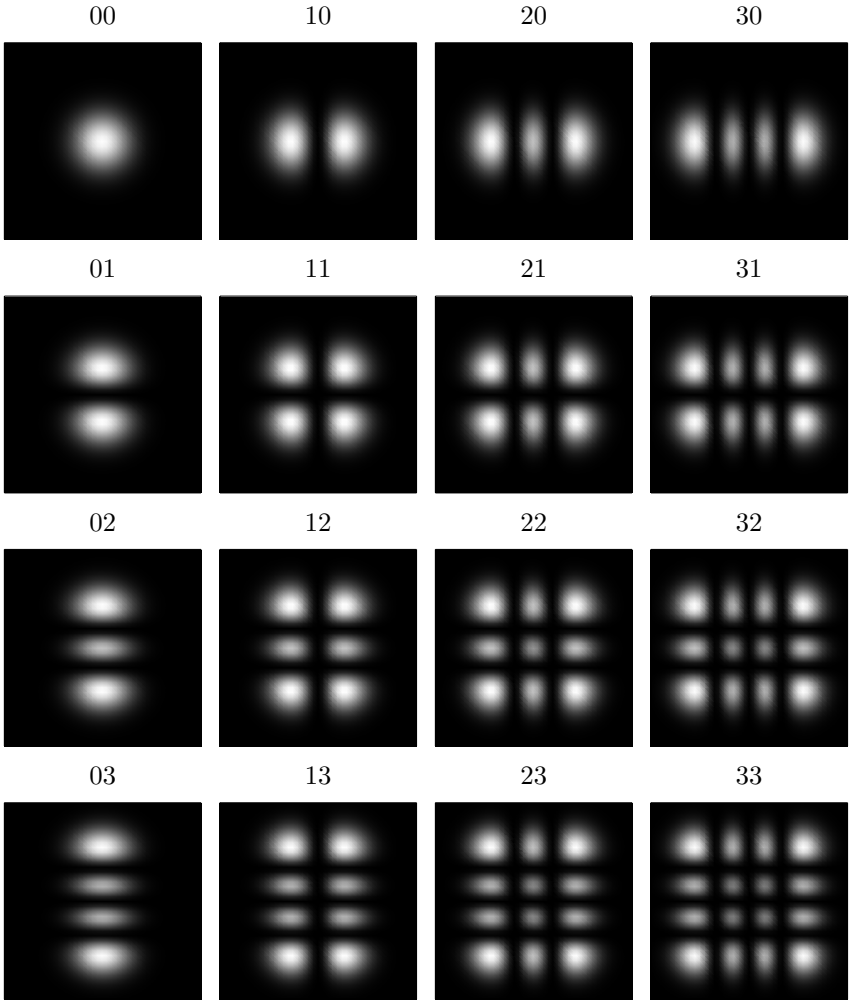


Figure 30 – Profils d'intensité $|u_{n,m}|^2$ des modes de Hermite-Gauss TEM_{nm}, pour $n, m = 0, \ldots, 3$ (indices nm indiqués au-dessus de chaque profil, n selon l'axe horizontal x, m selon l'axe vertical y). Chaque profil est représenté sur un carré de côté $5{,}2\,w$.

5.4.3 Taille du faisceau et rayon de courbure

Il reste à exploiter l'éq. (5.49). On se restreint au mode fondamental,

$$u_{0,0}(\rho, z) = \frac{C}{w(z)}\, \mathrm{e}^{-\rho^2/w^2(z)}. \tag{5.54}$$

On a $\partial_z u_{0,0} = \left(-\frac{\partial_z w}{w^2} + \frac{2\rho^2}{w^4}\,\partial_z w\right) C\mathrm{e}^{-\rho^2/w^2}$ et $u_{0,0} + \rho\,\partial_\rho u_{0,0} = \left(\frac{1}{w} - \frac{2\rho^2}{w^3}\right) C\mathrm{e}^{-\rho^2/w^2}$, donc l'éq. (5.49) donne

$$-\frac{\partial_z w}{w^2} + \frac{2\rho^2}{w^4}\,\partial_z w + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{w} - \frac{2\rho^2}{w^3}\right) = \left(1 - \frac{2\rho^2}{w^2}\right)\left(-\frac{\partial_z w}{w^2} + \frac{1}{Rw}\right) = 0, \tag{5.55}$$

valable pour tout ρ, soit

$$\partial_z w = \frac{w}{R}. \tag{5.56}$$

On peut vérifier que cette relation assure aussi que l'éq. (5.49) est satisfaite par les modes d'ordre supérieur.

On va résoudre les équations (5.52) et (5.56) pour trouver $w(z)$ et $R(z)$. Le plus simple est de combiner les exponentielles en écrivant

$$A(\rho, z) \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho^2/2q(z)}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + \frac{2\mathrm{i}}{kw^2(z)}, \tag{5.57}$$

où $q(z)$ est un nombre complexe appelé paramètre confocal (ou paramètre complexe du faisceau). Alors, en utilisant (5.56) puis (5.52) sous la forme $R'/R^2 = 1/R^2 - 4/k^2w^4$,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial_z q}{q^2} &= -\frac{\partial_z R}{R^2} - \frac{4\mathrm{i}}{kw^3}\,\partial_z w = -\frac{1}{R^2} + \frac{4}{k^2w^4} - \frac{4\mathrm{i}}{kw^2R} \\ &= -\left(\frac{1}{R} + \frac{2\mathrm{i}}{kw^2}\right)^2 = -\frac{1}{q^2}, \end{aligned} \tag{5.58}$$

d'où $\partial_z q = 1$, et

$$q(z) = z - z_0 - \mathrm{i}z_\mathrm{R}, \tag{5.59}$$

où z_0 et z_R sont des constantes réelles, avec $z_\mathrm{R} > 0$ pour que $\mathrm{Im}(1/q) = 2/kw^2$ soit positif. On peut prendre $z_0 = 0$ sans perte de généralité, car cela revient à un changement de l'origine de l'axe z. On en déduit

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z - \mathrm{i}z_\mathrm{R}} = \frac{z}{z^2 + z_\mathrm{R}^2} + \mathrm{i}\,\frac{z_\mathrm{R}}{z^2 + z_\mathrm{R}^2}, \tag{5.60}$$

d'où le rayon de courbure des fronts d'onde

$$R(z) = z + \frac{z_\mathrm{R}^2}{z}, \tag{5.61}$$

et la taille du faisceau

$$w^2(z) = \frac{2}{k}\,\frac{z^2 + z_\mathrm{R}^2}{z_\mathrm{R}} = \frac{2z_\mathrm{R}}{k}\left(1 + \frac{z^2}{z_\mathrm{R}^2}\right). \tag{5.62}$$

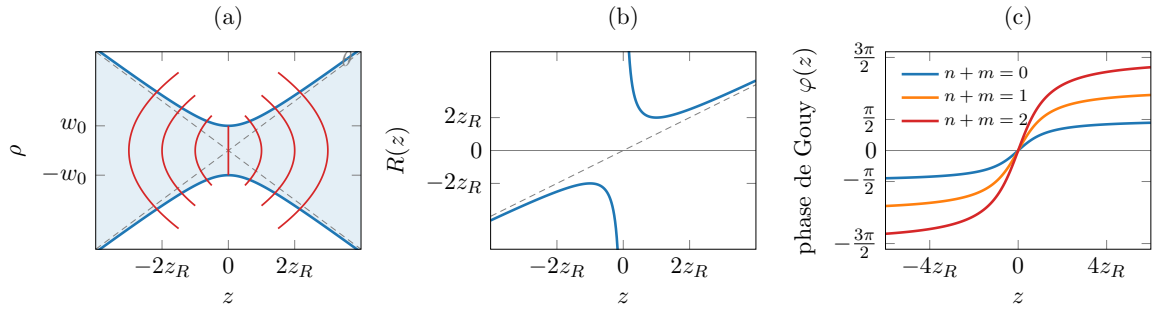


Figure 31 – Faisceau gaussien de col w_0 situé en $z = 0$. (a) Enveloppe $\pm w(z)$ (bleu), asymptotes $\pm\theta z$ (pointillés) et fronts d'onde (rouge), plans au col et sphériques loin du col. (b) Rayon de courbure $R(z) = z + z_\mathrm{R}^2/z$ des fronts d'onde ; $|R|$ est minimal, égal à $2z_\mathrm{R}$, en $|z| = z_\mathrm{R}$, et R tend vers z (pointillés) loin du col. Les courbures des fronts d'onde en (a) sont représentées comme si $w_0 = z_\mathrm{R}$ (elles sont en réalité bien plus faibles, puisque $w_0 \ll z_\mathrm{R}$). (c) Phase de Gouy $\varphi(z) = (n + m + 1)\arctan(z/z_\mathrm{R})$ pour les modes d'ordre $n + m = 0, 1, 2$.

La taille minimale, appelée col (ou *waist*) du faisceau, est atteinte en $z = 0$ et vaut $w_0^2 = 2z_\mathrm{R}/k$. La longueur de Rayleigh z_R et la taille du faisceau s'écrivent donc

$$z_\mathrm{R} = \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \qquad w(z) = w_0\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_\mathrm{R}^2}}. \tag{5.63}$$

Loin du col ($|z| \gg z_\mathrm{R}$), la taille croît linéairement, $w(z) \simeq \theta|z|$, avec un angle de divergence

$$\theta = \frac{w_0}{z_\mathrm{R}} = \frac{\lambda}{\pi w_0}, \tag{5.64}$$

conformément à l'estimation (5.2). Les fronts d'onde sont plans au col ($R \to \infty$), et deviennent sphériques, centrés sur le col, loin de celui-ci ($R \simeq z$) (figure 31a,b). Pour un profil d'intensité $\propto \mathrm{e}^{-2\rho^2/w^2}$, la taille quadratique moyenne (5.1) vaut $\sigma = w/\sqrt{2}$, et la longueur de Rayleigh $z_\mathrm{R} = 2\pi\sigma_0^2/\lambda$ coïncide bien, à un facteur numérique près, avec la longueur L de l'éq. (5.3).

5.4.4 Phase de Gouy

On revient enfin sur la phase $\varphi(z)$. D'après l'éq. (5.53),

$$\partial_z\varphi = \frac{2(n + m + 1)}{kw^2(z)} = \frac{n + m + 1}{z_\mathrm{R}\,(1 + z^2/z_\mathrm{R}^2)}, \tag{5.65}$$

soit

$$\varphi(z) = (n + m + 1)\arctan\frac{z}{z_\mathrm{R}}. \tag{5.66}$$

Cette phase de Gouy varie de $-(n + m + 1)\pi/2$ à $+(n + m + 1)\pi/2$ lorsque l'on traverse le col (figure 31c). Elle dépend de l'ordre $n + m$ du mode transverse, ce qui jouera un rôle important pour les fréquences de résonance d'une cavité.

5.4.5 Propagation d'un faisceau gaussien : matrices ABCD

On s'intéresse au calcul des paramètres d'un faisceau gaussien au cours de sa propagation à travers l'espace libre, des lentilles et des miroirs sphériques.

Rappel d'optique géométrique. Dans l'approximation paraxiale, un rayon lumineux est caractérisé, en chaque position z, par sa distance à l'axe $r(z)$ et sa pente $\theta(z) = \mathrm{d}r/\mathrm{d}z$ (figure 32a).

— Pour une propagation dans l'espace libre sur une longueur d,

$$r(z+d) = r(z) + d\,\theta(z), \quad \theta(z+d) = \theta(z), \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}_{z+d} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S_d} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}_{z}. \tag{5.67}$$

— Pour une lentille mince de focale f, la distance à l'axe est inchangée, $r_+ = r_- = r$. La relation de conjugaison appliquée aux points où le rayon incident et le rayon émergent coupent l'axe, situés aux abscisses $-r/\theta_-$ et $-r/\theta_+$ par rapport à la lentille, donne

$$\frac{1}{-r/\theta_+} - \frac{1}{-r/\theta_-} = \frac{1}{f}, \qquad \text{soit} \qquad \theta_+ = \theta_- - \frac{r}{f}, \tag{5.68}$$

et

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}_{+} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}}_{L_f} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}_{-}. \tag{5.69}$$

— Pour un miroir sphérique de rayon de courbure R (concave pour $R > 0$), qui se comporte comme une lentille de focale $R/2$, on obtient de même

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}_{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}_{-}, \tag{5.70}$$

en dépliant le trajet du rayon après réflexion.

L'intérêt de cette approche est de ramener la propagation dans un système complexe à un produit de matrices. Par exemple, pour le système de la figure 32b,

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}_{z_f} = S_{d_3} L_{f_2} S_{d_2} L_{f_1} S_{d_1} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}_{z_i}. \tag{5.71}$$

Généralisation aux faisceaux gaussiens. Un faisceau gaussien est caractérisé en un point z par sa taille $w(z)$ et son rayon de courbure $R(z)$, ou de manière équivalente par son paramètre confocal complexe

$$q(z) = z - z_0 - \mathrm{i}z_\mathrm{R}, \tag{5.72}$$

où z_0 est la position du col et z_R la longueur de Rayleigh.

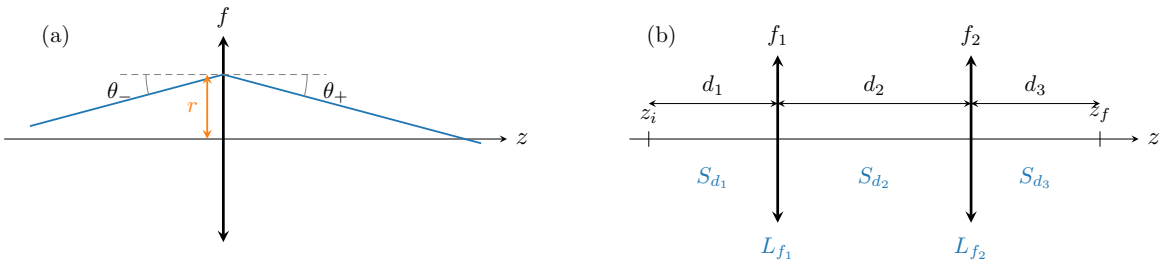


Figure 32 – (a) Rayon paraxial traversant une lentille mince de focale f : la distance à l'axe r est conservée et la pente passe de θ_- à $\theta_+ = \theta_- - r/f$. (b) Système formé de deux lentilles, décrit par le produit de matrices $S_{d_3} L_{f_2} S_{d_2} L_{f_1} S_{d_1}$.

— Pour la propagation dans l'espace libre, on a $q(z+d) = q(z) + d$. On écrit le passage de z à $z+d$ par une matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ telle que

$$q(z+d) = \frac{Aq(z)+B}{Cq(z)+D}. \tag{5.73}$$

On obtient bien la matrice $S_d = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de l'optique géométrique.

— Pour une lentille, on rappelle que le champ prend une phase $\phi(\rho) = -k\rho^2/2f$ (éq. (5.31)). D'où

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k}{2q_+}\rho^2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k}{2q_-}\rho^2 - \frac{k}{2}\frac{\rho^2}{f}\right)}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{q_+} = \frac{1}{q_-} - \frac{1}{f}, \tag{5.74}$$

et

$$q_+ = \frac{q_- f}{f - q_-} = \frac{q_-}{-q_-/f + 1}, \tag{5.75}$$

ce qui correspond à la matrice $L_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$.

Les matrices peuvent aussi être combinées pour calculer la propagation dans un système complexe. C'est une propriété de la loi homographique $q' = (Aq+B)/(Cq+D)$, qui se compose comme les produits de matrices : si deux éléments décrits par les matrices $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ puis $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ sont traversés successivement,

$$q'' = \frac{A'q' + B'}{C'q' + D'} = \frac{(A'A + B'C)q + A'B + B'D}{(C'A + D'C)q + C'B + D'D}, \tag{5.76}$$

qui correspond à la matrice produit $M'M$.

Focalisation d'un faisceau gaussien. On considère un faisceau gaussien de col w_i (longueur de Rayleigh z_{Ri}) situé à la distance d_i en amont d'une lentille de focale f placée en $z = 0$ (figure 33). On cherche la position d_f et la taille w_f (longueur de

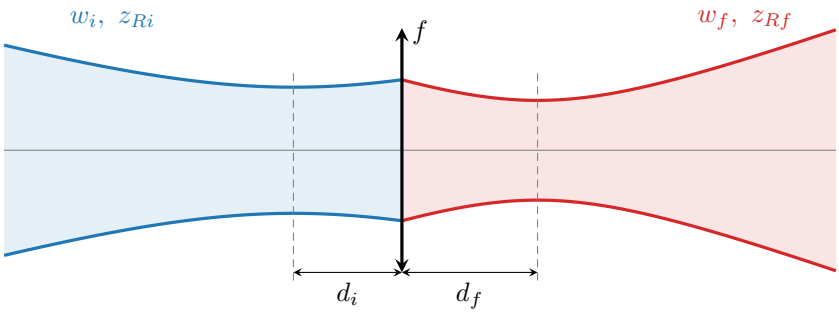


Figure 33 – Focalisation d'un faisceau gaussien par une lentille de focale f. Le col du faisceau incident (bleu) est situé à la distance d_i en amont de la lentille, celui du faisceau émergent (rouge) à la distance d_f en aval, donnée par l'éq. (5.78). Ici $d_i = 0{,}6\,f$ et $z_{Ri} = 1{,}2\,f$, d'où $d_f = z_{Rf} = 0{,}75\,f$.

Rayleigh z_{Rf}) du col du faisceau émergent. On a, juste avant et juste après la lentille,

$$q_i = d_i - \mathrm{i}z_{Ri}, \qquad q_f = -d_f - \mathrm{i}z_{Rf}, \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{q_f} = \frac{1}{q_i} - \frac{1}{f}, \qquad \text{soit} \qquad q_f = \frac{q_i f}{f - q_i}. \tag{5.77}$$

La position du col image est donnée par la partie réelle,

$$\begin{aligned} d_f &= \mathrm{Re}\,\frac{q_i f}{q_i - f} = \mathrm{Re}\,\frac{(d_i - \mathrm{i}z_{Ri})f}{d_i - f - \mathrm{i}z_{Ri}} = \mathrm{Re}\left[f\,\frac{(d_i - \mathrm{i}z_{Ri})(d_i - f + \mathrm{i}z_{Ri})}{(d_i - f)^2 + z_{Ri}^2}\right] \\ &= f\,\frac{d_i(d_i - f) + z_{Ri}^2}{(d_i - f)^2 + z_{Ri}^2}, \end{aligned} \tag{5.78}$$

et sa longueur de Rayleigh par la partie imaginaire,

$$\begin{aligned} z_{Rf} &= \mathrm{Im}\left[f\,\frac{(d_i - \mathrm{i}z_{Ri})(d_i - f + \mathrm{i}z_{Ri})}{(d_i - f)^2 + z_{Ri}^2}\right] = f\,\frac{(f - d_i)z_{Ri} + d_i z_{Ri}}{(d_i - f)^2 + z_{Ri}^2} \\ &= \frac{f^2 z_{Ri}}{(d_i - f)^2 + z_{Ri}^2}. \end{aligned} \tag{5.79}$$

Pour un faisceau incident peu divergent, $z_{Ri} \gg d_i, f$, on obtient $d_f \simeq f$: le faisceau se focalise au foyer de la lentille, avec

$$z_{Rf} \simeq \frac{f^2}{z_{Ri}}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{\pi w_f^2}{\lambda} = \frac{f^2}{\pi w_i^2/\lambda}, \qquad \text{d'où} \qquad w_f = \frac{\lambda f}{\pi w_i}. \tag{5.80}$$

Pour $z_{Ri} \sim d_i, f$, la situation est plus complexe, et le col image ne se trouve en général pas au foyer de la lentille (sauf si le col incident est au foyer objet, $d_i = f$, auquel cas $d_f = f$ exactement).

5.4.6 Modes gaussiens dans une cavité optique

On considère une cavité optique définie par deux miroirs sphériques séparés d'une distance L (figure 34). Un mode optique stable est caractérisé par la superposition de deux ondes se propageant selon $+z$ et $-z$, telles qu'il y ait interférence destructive

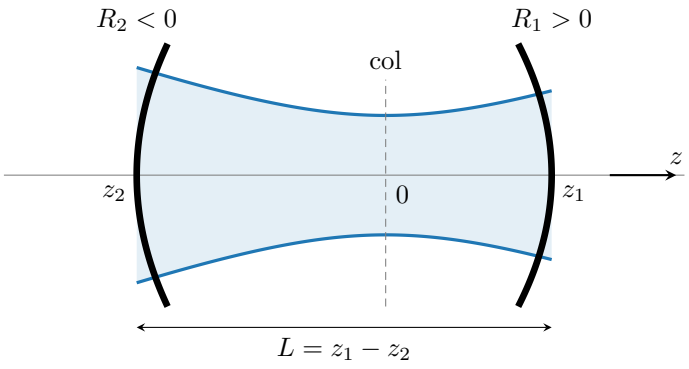


Figure 34 – Mode gaussien d'une cavité formée de deux miroirs sphériques, situés en z_2 et $z_1 = z_2 + L$ par rapport au col du faisceau. La surface des miroirs coïncide avec les fronts d'onde du faisceau, de rayons de courbure $R_1 = R(z_1)$ et $R_2 = R(z_2)$ (la courbure des miroirs est exagérée).

sur chacun des miroirs. Ceci impose que les rayons de courbure $R_+(z)$ et $R_-(z)$ des deux faisceaux soient égaux (au signe près), et même qu'ils soient égaux aux rayons de courbure des miroirs en z_1 et z_2 : les fronts d'onde doivent épouser la surface des miroirs.

— On doit donc avoir pour le faisceau aller

$$R(z_1) = R_1, \qquad R(z_2) = R_2, \tag{5.81}$$

ce qui définit les modes transverses possibles. Ici, z_1 et $z_2 = z_1 - L$ sont les positions des miroirs par rapport au col, et R_1, R_2 sont les rayons de courbure algébriques des fronts d'onde au niveau des miroirs, avec la convention de l'éq. (5.61) : pour deux miroirs concaves, $R_1 > 0$ et $R_2 < 0$.

— De plus, la condition d'interférence destructive impose que le déphasage accumulé sur la distance L soit un multiple de π :

$$\left[kz_1 - (n+m+1)\arctan\frac{z_1}{z_\mathrm{R}}\right] - \left[kz_2 - (n+m+1)\arctan\frac{z_2}{z_\mathrm{R}}\right] = p\pi, \tag{5.82}$$

avec p entier, ce qui définit les fréquences $\omega = ck$ possibles (modes longitudinaux).

Détermination des modes transverses. On résout

$$z_1 R_1 = z_1^2 + z_\mathrm{R}^2, \tag{5.83}$$
$$z_2 R_2 = z_2^2 + z_\mathrm{R}^2, \tag{5.84}$$
$$z_1 - z_2 = L, \tag{5.85}$$

où R_1, R_2 et L sont donnés et où l'on cherche z_1, z_2 et z_R. La différence (5.83)−(5.84) donne

$$z_1 R_1 - z_2 R_2 = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)\ \underbrace{(z_1 - z_2)}_{L \text{ d'après (5.85)}}, \tag{5.86}$$

et, avec $z_2 = z_1 - L$, on obtient

$$z_1 = \frac{L(L+R_2)}{2L+R_2-R_1}, \qquad z_2 = \frac{L(R_1-L)}{2L+R_2-R_1},$$
$$z_\mathrm{R} = \sqrt{\frac{L(R_2+L)(R_1-L)(L+R_2-R_1)}{(2L+R_2-R_1)^2}}. \tag{5.87}$$

Critère de stabilité. Ce mode existe si l'argument de la racine carrée est positif (z_R réel). On réécrit

$$\mathcal{A} = L(R_2+L)(R_1-L)(L+R_2-R_1) = (R_2+L)(R_1-L)\left[R_1R_2 - (R_2+L)(R_1-L)\right]. \tag{5.88}$$

En posant

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1}, \qquad g_2 = 1 + \frac{L}{R_2}, \tag{5.89}$$

on a $(R_2+L)(R_1-L) = R_1R_2\, g_1g_2$, d'où $\mathcal{A} = (R_1R_2)^2\, g_1g_2\,(1-g_1g_2)$. La condition $\mathcal{A} \geq 0$ s'écrit donc

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 + \frac{L}{R_2}\right) \leq 1. \tag{5.90}$$

Avec la convention usuelle où le rayon de courbure $\mathcal{R}_i$ du miroir i est compté positivement si le miroir est concave ($\mathcal{R}_1 = R_1$, $\mathcal{R}_2 = -R_2$), on a simplement $g_i = 1 - L/\mathcal{R}_i$ pour chacun des miroirs. Le diagramme de stabilité correspondant est représenté sur la figure 35.

Cas particuliers.

— *Cavité symétrique*, $R_1 = -R_2 = R > 0$. On obtient $z_1 = L/2$, $z_2 = -L/2$ et

$$z_\mathrm{R} = \sqrt{\frac{L(2R-L)}{4}}, \qquad \text{d'où} \qquad w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\left[\frac{L(2R-L)}{4}\right]^{1/4}. \tag{5.91}$$

Il faut donc $R > L/2$.

— Pour $R \to \infty$ (cavité plan-plan), $w_0 \to \infty$: une cavité plan-plan formée de miroirs de taille finie n'a pas de mode gaussien stable (elle est à la limite de la stabilité).

— Pour $R = L/2$, la cavité est dite concentrique (ou sphérique) : les deux miroirs ont le même centre de courbure, et $z_\mathrm{R} \to 0$. Le col tend alors vers zéro et la taille du faisceau sur les miroirs, $w(\pm L/2) \simeq \lambda L/2\pi w_0$, diverge : en pratique, le faisceau remplit les miroirs, et la taille du col n'est limitée que par la diffraction sur leurs bords, $w_0 \sim \lambda L/a$ pour des miroirs de rayon a. Cette cavité est très sensible à l'alignement.

— Pour une longueur L donnée, la taille du faisceau sur les miroirs, $w^2(L/2) = \frac{\lambda}{\pi}\left(z_\mathrm{R} + \frac{L^2}{4z_\mathrm{R}}\right)$, est minimale pour $z_\mathrm{R} = L/2$, c'est-à-dire $R = L$: c'est la cavité confocale, pour laquelle

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi}}, \qquad w(\pm L/2) = \sqrt{2}\, w_0. \tag{5.92}$$

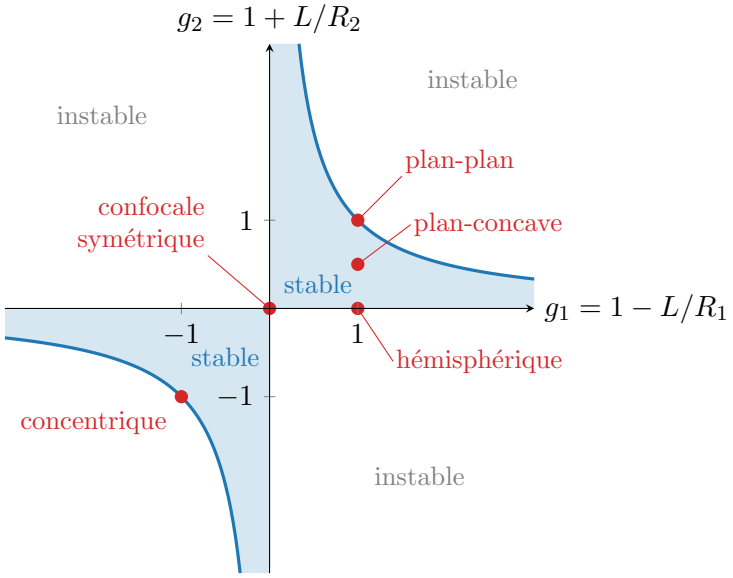


Figure 35 – Diagramme de stabilité d'une cavité à deux miroirs sphériques, dans le plan (g_1, g_2). Les zones colorées, comprises entre les axes et l'hyperbole $g_1 g_2 = 1$, correspondent aux cavités stables. Quelques cavités particulières sont indiquées ; les cavités plan-plan, confocale symétrique, concentrique et hémisphérique (miroir plan et miroir concave de rayon L) sont à la limite de la stabilité.

Le faisceau reste alors étroit sur toute la longueur de la cavité, ce qui donne un faible volume de mode. Notons que ce n'est pas le col w_0 qui est minimal : celui-ci diminue continûment lorsque l'on se rapproche de la cavité concentrique, mais au prix d'une forte divergence et de grandes taches sur les miroirs. De même, le volume du mode, proportionnel à $\int_{-L/2}^{L/2} w^2 \, \mathrm{d}z \propto z_\mathrm{R} + L^2/12 z_\mathrm{R}$, est minimal pour $z_\mathrm{R} = L/2\sqrt{3}$, valeur proche du cas confocal.

— *Cavité plan-concave*, $R_1 = +\infty$, $R_2 < 0$. Le col est sur le miroir plan, $z_1 = 0$, $z_2 = -L$, et

$$z_\mathrm{R} = \sqrt{L\,(|R_2| - L)}, \tag{5.93}$$

ce qui impose $L < |R_2|$.

Stabilité vue par les matrices ABCD. La matrice ABCD décrivant un aller-retour dans la cavité, en partant du miroir 2 vers le miroir 1, s'écrit

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{-R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2L}{R_1} & 2L - \frac{2L^2}{R_1} \\ \frac{2}{R_2} - \frac{2}{R_1} - \frac{4L}{R_1 R_2} & \frac{2L}{R_2} + \left(1 - \frac{2L}{R_1}\right)\left(1 + \frac{2L}{R_2}\right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.94}$$

où le signe $-R_2$ dans la première matrice est dû au changement de sens de propagation (avec notre convention, le miroir 2 concave a $R_2 < 0$). La cavité est stable si les valeurs propres Λ de M sont telles que $|\Lambda| \leq 1$: sinon, un rayon s'éloigne de l'axe

exponentiellement avec le nombre d'allers-retours. Or

$$\det M = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \cdots = 1, \tag{5.95}$$

d'où le polynôme caractéristique

$$\Lambda^2 - \operatorname{Tr} M\, \Lambda + \det M = 0, \qquad \text{soit} \qquad \Lambda_\pm = \frac{\operatorname{Tr} M}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\operatorname{Tr} M}{2}\right)^2 - 1}. \tag{5.96}$$

Comme $\Lambda_+\Lambda_- = 1$, il faut que $\Lambda_+ = \Lambda_-^*$ pour que $|\Lambda_+| = |\Lambda_-| = 1$, soit $|\operatorname{Tr} M| \leq 2$. D'où

$$\begin{aligned} & \left|1 - \frac{2L}{R_1} + \frac{2L}{R_2} + \left(1 - \frac{2L}{R_1}\right)\left(1 + \frac{2L}{R_2}\right)\right| \leq 2, \\ \Leftrightarrow\ & \left|\frac{1}{2} - \frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2} - \frac{L^2}{R_1 R_2}\right| \leq \frac{1}{2}, \\ \Leftrightarrow\ & \left|\left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 + \frac{L}{R_2}\right) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{5.97}$$

soit

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 + \frac{L}{R_2}\right) \leq 1. \tag{5.98}$$

On retrouve le critère de stabilité (5.90).

Modes longitudinaux. Pour un mode TEM_{nm}, la condition de résonance (5.82) s'écrit

$$kL = \frac{\omega}{c}L = \frac{2\pi\nu}{c}L = p\pi + (n+m+1)\left(\arctan\frac{z_1}{z_\mathrm{R}} - \arctan\frac{z_2}{z_\mathrm{R}}\right), \tag{5.99}$$

d'où les fréquences de résonance

$$\nu_{pnm} = p\ \underbrace{\frac{c}{2L}}_{\Delta_\mathrm{ISL}} + (n+m+1)\ \underbrace{\frac{c}{2\pi L}\left(\arctan\frac{z_1}{z_\mathrm{R}} - \arctan\frac{z_2}{z_\mathrm{R}}\right)}_{\Delta_T}. \tag{5.100}$$

Le premier terme fait intervenir l'intervalle spectral libre $\Delta_\mathrm{ISL} = c/2L$ de la cavité, et le second l'écart Δ_T entre modes transverses successifs (figure 36). Les différents modes transverses ne sont donc pas résonants à la même fréquence. Il y a une dégénérescence des modes tels que $n+m$ est fixé. En pratique, cette dégénérescence est levée si la symétrie cylindrique est brisée (soit avec des miroirs elliptiques, soit par un mauvais alignement).

Application : filtrage spatial. Si l'on envoie sur une cavité un faisceau incident présentant des défauts (c'est-à-dire une superposition de nombreux modes transverses), et que l'on accorde la longueur de la cavité de sorte que le mode TEM_{00} soit résonant, seul ce mode est transmis de manière résonante (pourvu que la cavité ne soit pas dégénérée, voir ci-dessous). Le faisceau transmis a alors un profil gaussien parfait.

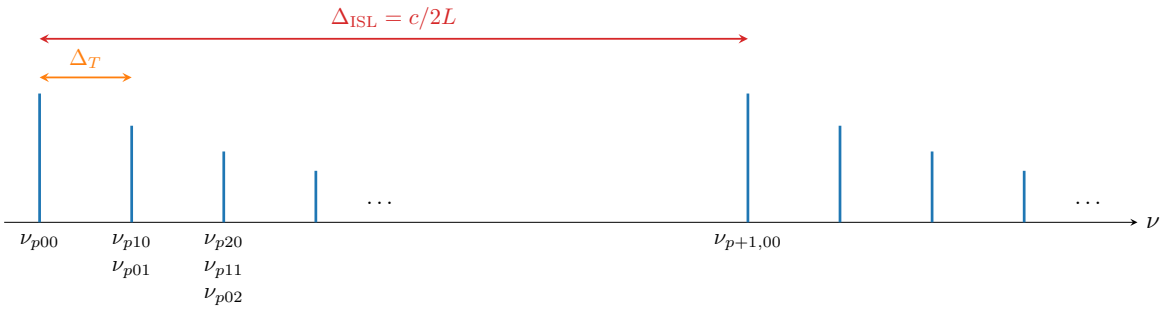


Figure 36 – Fréquences de résonance ν_{pnm} d'une cavité à deux miroirs sphériques (à une constante près). Les modes longitudinaux successifs sont séparés de l'intervalle spectral libre $\Delta_{\mathrm{ISL}} = c/2L$; pour chacun d'eux, les modes transverses TEM_{nm} sont décalés de $(n+m)\Delta_T$, et les modes de même ordre $n+m$ sont dégénérés.

Cavités optiques dégénérées. On obtient une dégénérescence supplémentaire lorsque l'écart entre modes transverses est une fraction rationnelle de l'intervalle spectral libre, $\Delta_T = \Delta_{\mathrm{ISL}}\, p'/q'$ avec p' et q' entiers, soit

$$\arctan\frac{z_1}{z_{\mathrm{R}}} - \arctan\frac{z_2}{z_{\mathrm{R}}} = \pi\,\frac{p'}{q'}. \tag{5.101}$$

Des modes transverses d'ordres différents sont alors résonants à la même fréquence.

Exemple : cavité demi-confocale. On considère une cavité formée d'un miroir plan et d'un miroir concave de rayon de courbure R, séparés de $L = R/2$. D'après le cas plan-concave ci-dessus, $z_1 = 0$, $z_2 = -L$ et $z_{\mathrm{R}} = \sqrt{L(R-L)} = L$, d'où

$$\arctan\frac{z_1}{z_{\mathrm{R}}} - \arctan\frac{z_2}{z_{\mathrm{R}}} = 0 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{p'}{q'} = \frac{1}{4}. \tag{5.102}$$

De même, pour la cavité confocale symétrique ($z_{1,2} = \pm L/2$, $z_{\mathrm{R}} = L/2$), on trouve $p'/q' = 1/2$. Ce type de cavité permet de transmettre une image complexe (superposition de nombreux modes transverses) à travers une cavité. Pour obtenir $p'/q' = 1$, c'est-à-dire la résonance simultanée de tous les modes transverses, il faut un système de miroirs et de lentilles : c'est impossible avec deux miroirs, puisque cela imposerait $z_{\mathrm{R}} \to 0$ (cavité concentrique, à la limite de la stabilité ; de même, $p'/q' = 0$ correspond à la cavité plan-plan, $z_{\mathrm{R}} \to \infty$).

6 Interaction atome-lumière

Dans ce chapitre, nous décrivons l'interaction entre un atome et une onde lumineuse quasi résonnante avec l'une de ses transitions. Nous modélisons l'atome par un système quantique à deux niveaux, et le champ électromagnétique par un champ classique. Nous établissons d'abord la dynamique cohérente de ce système (oscillation de Rabi), puis nous prenons en compte l'émission spontanée à l'aide de la matrice densité, ce qui conduit aux équations de Bloch optiques. Nous en déduisons la réponse de l'atome au champ, caractérisée par sa polarisabilité, que nous comparons au modèle classique de l'électron

élastiquement lié. Nous étudions ensuite les effets mécaniques de la lumière sur un atome, la force dipolaire et la pression de radiation, qui sont à la base des pinces optiques et du refroidissement laser. Nous considérons enfin un milieu constitué d'un grand nombre d'atomes, et nous calculons son indice de réfraction et son coefficient d'absorption.

6.1 Couplage entre un atome et une onde électromagnétique : équations de Bloch optiques

6.1.1 Hamiltonien d'un atome à deux niveaux éclairé par un laser

On considère un système quantique (atome ou autre) à deux niveaux, un niveau fondamental $|g\rangle$ et un niveau excité $|e\rangle$, séparés d'une énergie $\hbar\omega_0$, éclairé par un champ électromagnétique de pulsation ω (figure 37). Il est commode de décrire ce système comme un spin 1/2, en introduisant les matrices de Pauli

$$\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \qquad \sigma_x = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|, \qquad \sigma_y = -\mathrm{i}|e\rangle\langle g| + \mathrm{i}|g\rangle\langle e|, \tag{6.1}$$

ainsi que les opérateurs $\sigma_+ = |e\rangle\langle g| = (\sigma_x + \mathrm{i}\sigma_y)/2$ et $\sigma_- = |g\rangle\langle e| = (\sigma_x - \mathrm{i}\sigma_y)/2$. Le hamiltonien de l'atome libre s'écrit, à une constante près, $H_0 = \hbar\omega_0\sigma_z/2$.

L'opérateur dipôle électrique $\hat{D}$ couple ces deux niveaux. On suppose que la polarisation du champ est alignée avec le dipôle de la transition, et on choisit les phases des états de sorte que l'élément de matrice $d = \langle e|\hat{D}|g\rangle$ soit réel. On a alors

$$\hat{D} = d\,(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) = d\,\sigma_x = d\,(\sigma_+ + \sigma_-). \tag{6.2}$$

Pour un champ électrique $E(t) = E_0\cos(\omega t + \varphi)$, le couplage atome-champ s'écrit $-\hat{D}E(t)$, et le hamiltonien total vaut

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z - dE_0\cos(\omega t + \varphi)\,\sigma_x \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\Omega\cos(\omega t + \varphi)\,\sigma_x, \end{aligned} \tag{6.3}$$

où l'on a introduit la pulsation de Rabi Ω, définie par $\hbar\Omega = -dE_0$. Seul le carré $\Omega^2 = d^2E_0^2/\hbar^2$ interviendra dans les résultats physiques (le signe de Ω peut être absorbé dans la phase φ). On suppose que l'onde est quasi résonnante, et on introduit le désaccord

$$\Delta = \omega - \omega_0, \qquad \text{avec} \qquad |\Delta| \ll \omega_0. \tag{6.4}$$

6.1.2 Passage dans le référentiel tournant et approximation de l'onde tournante

On cherche à se débarrasser de la dépendance temporelle du hamiltonien. Pour cela, on passe en représentation d'interaction par rapport au hamiltonien $\hbar\omega\sigma_z/2$, qui décrit un atome dont la transition serait exactement résonnante avec le champ. On définit l'opérateur unitaire

$$U = \exp\left[-\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}\sigma_z\right], \tag{6.5}$$

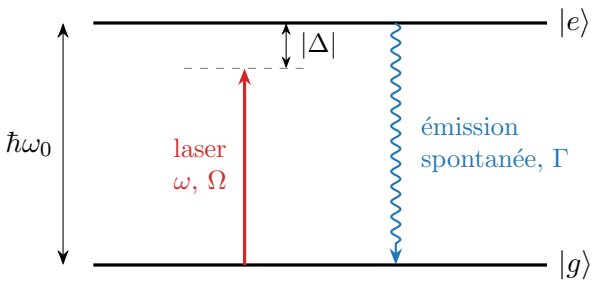


Figure 37 – Atome à deux niveaux $|g\rangle$ et $|e\rangle$, séparés de $\hbar\omega_0$, éclairé par un laser de pulsation ω et de pulsation de Rabi Ω. Le désaccord $\Delta = \omega - \omega_0$ est ici négatif (désaccord « vers le rouge »). Le niveau excité se désexcite par émission spontanée, avec un taux Γ.

et le nouveau vecteur d'état $|\psi'\rangle = U^\dagger|\psi\rangle$. Si $|\psi\rangle$ évolue selon l'équation de Schrödinger $\mathrm{i}\hbar\,\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$, alors $|\psi'\rangle$ évolue selon $\mathrm{i}\hbar\,\partial_t|\psi'\rangle = H'|\psi'\rangle$, où

$$H' = U^\dagger H U + \mathrm{i}\hbar\,(\partial_t U^\dagger)\,U = U^\dagger H U - \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z. \tag{6.6}$$

L'opérateur U correspond à une rotation du spin autour de l'axe z, d'angle ωt. On a ainsi

$$U^\dagger\sigma_+ U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sigma_+, \qquad U^\dagger\sigma_- U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\sigma_-, \qquad U^\dagger\sigma_x U = \cos\omega t\,\sigma_x - \sin\omega t\,\sigma_y. \tag{6.7}$$

En écrivant $\cos(\omega t+\varphi) = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}]/2$, on obtient

$$\begin{aligned} H' &= -\frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sigma_+ + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\sigma_-\right) \\ &= -\frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sigma_+ + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sigma_-\right) + \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\omega t+\varphi)}\sigma_+ + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\omega t+\varphi)}\sigma_-\right). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Le dernier terme de la seconde ligne oscille à la pulsation 2ω, très grande devant toutes les autres pulsations du problème (Δ, Ω, et plus loin Γ) : son effet se moyenne à zéro. L'*approximation de l'onde tournante* consiste à le négliger. On obtient alors un hamiltonien *indépendant du temps*,

$$H' = -\frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\cos\varphi\,\sigma_x + \sin\varphi\,\sigma_y\right). \tag{6.9}$$

Dans ce « référentiel tournant », l'état $|g\rangle$ a l'énergie $+\hbar\Delta/2$ et l'état $|e\rangle$ l'énergie $-\hbar\Delta/2$: tout se passe comme si l'énergie du photon $\hbar\omega$ avait été retranchée à celle de l'état excité. Dans la suite, on se place toujours dans ce référentiel tournant, et on omet le prime.

6.1.3 Oscillation de Rabi

Si le système est initialement dans l'état $|g\rangle$ et qu'on le soumet à la lumière, il va se produire une oscillation de Rabi, qui se ramène à la précession d'un vecteur, le vecteur de Bloch. Un état pur quelconque s'écrit, à une phase globale près,

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|e\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|g\rangle, \tag{6.10}$$

avec $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \phi < 2\pi$. On lui associe le vecteur de Bloch $\mathbf{n} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, vecteur unitaire de coordonnées sphériques (θ, ϕ). L'état $|e\rangle$ correspond au pôle nord de la sphère de Bloch, et l'état $|g\rangle$ au pôle sud. Le hamiltonien (6.9) est de la forme $H = \hbar\,\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2$, avec

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega\cos\varphi \\ \Omega\sin\varphi \\ -\Delta \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

En utilisant les relations de commutation $[\sigma_i, \sigma_j] = 2\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\sigma_k$, on montre que l'équation de Schrödinger se ramène à une équation de précession,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}. \tag{6.12}$$

Le vecteur de Bloch tourne autour de l'axe $\boldsymbol{\Omega}$, à la pulsation $|\boldsymbol{\Omega}|$ (figure 38a).

— À résonance ($\Delta = 0$, et on suppose $\varphi = 0$ pour simplifier), on a $\mathrm{d}\mathbf{n}/\mathrm{d}t = \Omega\,\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{n}$: le vecteur de Bloch tourne autour de l'axe x et décrit un grand cercle passant par les deux pôles. Partant de $|g\rangle$, on a $\mathbf{n}(t) = (0, \sin\Omega t, -\cos\Omega t)$, et la probabilité d'occupation de l'état excité vaut

$$P_e(t) = \frac{1 + n_z(t)}{2} = \sin^2\frac{\Omega t}{2}. \tag{6.13}$$

L'atome oscille entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$ à la pulsation Ω. En particulier, une impulsion de durée $t = \pi/\Omega$ (impulsion « π ») transfère complètement l'atome dans l'état excité.

— Dans le cas général $\Delta \neq 0$, le vecteur de Bloch décrit un petit cercle autour de l'axe $\boldsymbol{\Omega}$, à la pulsation de Rabi généralisée $\Omega' = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$. Partant de $|g\rangle$, on obtient

$$P_e(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \Delta^2}\,\sin^2\frac{\Omega' t}{2}. \tag{6.14}$$

L'oscillation est plus rapide, mais d'amplitude réduite : le transfert vers l'état excité n'est jamais complet (figure 38b).

6.1.4 Prise en compte de l'émission spontanée : matrice densité

On souhaite maintenant tenir compte de l'émission spontanée. On rappelle qu'elle est due au couplage de l'atome au continuum des modes du champ électromagnétique, initialement vides : l'atome excité se désexcite en émettant un photon dans l'un des modes de ce continuum (figure 37). On souhaite proposer une description du seul système atome + lumière laser, dans laquelle le continuum n'intervient qu'à travers le taux d'émission spontanée Γ.

Le système quantique complet (atome + champ électromagnétique) est décrit par un état $|\Psi\rangle$ qui se décompose sur une base $\{|g\rangle \otimes |\psi_{\mathrm{em}}\rangle, |e\rangle \otimes |\psi_{\mathrm{em}}\rangle\}$, où les $|\psi_{\mathrm{em}}\rangle$ forment une base des états du champ électromagnétique :

$$|\Psi\rangle = \sum_{\psi_{\mathrm{em}}} \left(c_{g,\psi_{\mathrm{em}}} |g\rangle \otimes |\psi_{\mathrm{em}}\rangle + c_{e,\psi_{\mathrm{em}}} |e\rangle \otimes |\psi_{\mathrm{em}}\rangle \right). \tag{6.15}$$

En général, $|\Psi\rangle$ ne se factorise pas sous la forme $|\Psi\rangle = |\psi_{\mathrm{atome}}\rangle \otimes |\psi_{\mathrm{em}}\rangle$: l'émission spontanée intrique l'atome et le champ. Il n'existe donc pas de vecteur d'état $|\psi_{\mathrm{atome}}\rangle$

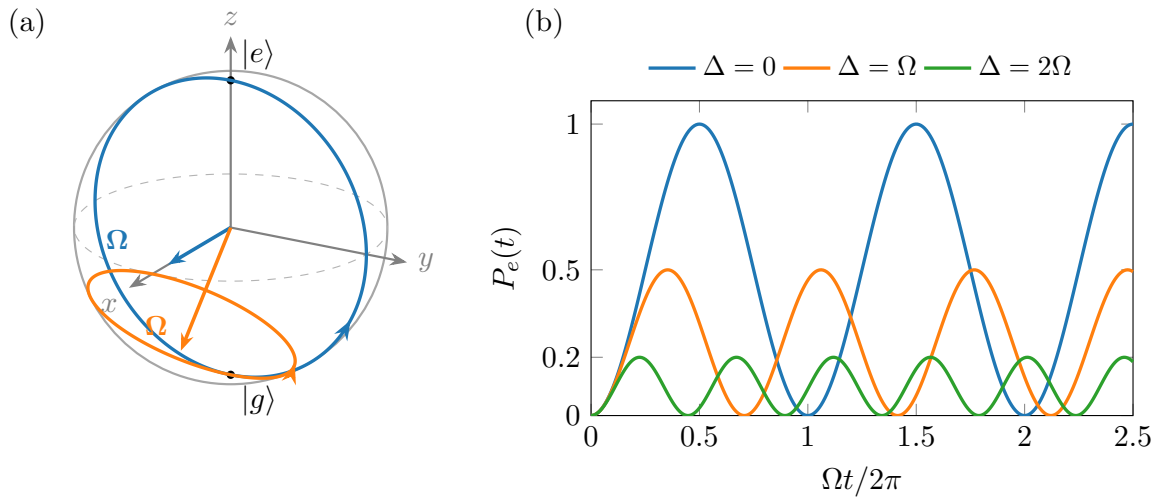


Figure 38 – Oscillation de Rabi. (a) Sur la sphère de Bloch, le vecteur de Bloch, initialement au pôle sud ($|g\rangle$), précesse autour du vecteur $\mathbf{\Omega}$. À résonance (bleu), $\mathbf{\Omega}$ est dans le plan équatorial et la trajectoire passe par le pôle nord ($|e\rangle$). Hors résonance (orange, $\Delta = \Omega$), $\mathbf{\Omega}$ sort du plan équatorial et la trajectoire est un petit cercle. (b) Probabilité d'occupation de l'état excité en fonction du temps, pour différents désaccords.

décrivant l'état du système atomique « en oubliant » le champ électromagnétique ambiant.

Considérons cependant une observable O_{atome} qui n'agit que sur l'atome. Sa valeur moyenne vaut

$$\begin{aligned}\langle O_{\text{atome}}\rangle &= \sum_{\psi_{\text{em}}} \left(c^*_{g,\psi_{\text{em}}} c_{g,\psi_{\text{em}}} \langle g|O_{\text{atome}}|g\rangle + c^*_{e,\psi_{\text{em}}} c_{g,\psi_{\text{em}}} \langle e|O_{\text{atome}}|g\rangle + \dots \right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(\rho\, O_{\text{atome}}\right), \end{aligned} \tag{6.16}$$

où l'on a introduit la matrice densité de l'atome, dont les éléments s'écrivent $\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle = \sum_{\psi_{\text{em}}} c_{i,\psi_{\text{em}}} c^*_{j,\psi_{\text{em}}}$ $(i,j = g,e)$:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{ge} \\ \rho_{eg} & \rho_{ee} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum c_{g,\psi_{\text{em}}} c^*_{g,\psi_{\text{em}}} & \sum c_{g,\psi_{\text{em}}} c^*_{e,\psi_{\text{em}}} \\ \sum c_{e,\psi_{\text{em}}} c^*_{g,\psi_{\text{em}}} & \sum c_{e,\psi_{\text{em}}} c^*_{e,\psi_{\text{em}}} \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Pour un état factorisé $|\Psi\rangle = |\psi_{\text{atome}}\rangle \otimes |\psi_{\text{em}}\rangle$, on a simplement $\rho = |\psi_{\text{atome}}\rangle\langle\psi_{\text{atome}}|$. La matrice densité décrit le système atomique lorsqu'on ignore l'information sur l'autre sous-système (ici le champ électromagnétique). Elle permet de calculer toute observable sur le système atomique. Elle vérifie

— $\rho = \rho^\dagger$ (elle est hermitienne) ;
— $\operatorname{Tr}\rho = \rho_{gg} + \rho_{ee} = 1$ (conservation de la probabilité) ;
— $\langle O\rangle = \operatorname{Tr}(\rho\, O)$ pour toute observable atomique O.

On peut toujours l'écrire sous la forme $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, avec $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$: elle décrit alors un mélange statistique d'états purs $|\psi_i\rangle$. Dans la suite, on note $\Pi_g = \rho_{gg}$ et $\Pi_e = \rho_{ee}$ les populations des deux niveaux, et les éléments non diagonaux $\rho_{eg} = \rho^*_{ge}$ sont appelés les cohérences.

6.1.5 Équations de Bloch optiques

Évolution hamiltonienne. En l'absence d'émission spontanée, l'équation de Schrödinger implique pour la matrice densité l'équation d'évolution

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = [H,\rho] = H\rho - \rho H. \tag{6.18}$$

On l'applique à l'oscillation de Rabi, avec le hamiltonien (6.9), que l'on écrit $H = -\hbar\Delta\sigma_z/2 + \hbar\Omega(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sigma_+ + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sigma_-)/2$. Pour la population de l'état excité, on a

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle e|[H,\rho]|e\rangle = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left(\langle e|H\rho|e\rangle - \text{c.c.}\right) = \frac{2}{\hbar}\,\mathrm{Im}\langle e|H\rho|e\rangle, \tag{6.19}$$

avec

$$\langle e|H\rho|e\rangle = -\frac{\hbar\Delta}{2}\Pi_e + \frac{\hbar\Omega}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\rho_{ge}, \tag{6.20}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_e}{\mathrm{d}t} = \Omega\,\mathrm{Im}\left(\rho_{ge}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right) = -\Omega\,\mathrm{Im}\left(\rho_{eg}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right). \tag{6.21}$$

Pour l'évolution des cohérences, on calcule de même

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho_{eg}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left(\langle e|H\rho|g\rangle - \langle e|\rho H|g\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left(-\frac{\hbar\Delta}{2}\rho_{eg} + \frac{\hbar\Omega}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\Pi_g - \frac{\hbar\Omega}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\Pi_e - \frac{\hbar\Delta}{2}\rho_{eg}\right),\end{aligned} \tag{6.22}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{eg}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\Delta\rho_{eg} + \mathrm{i}\frac{\Omega}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\left(\Pi_e - \Pi_g\right). \tag{6.23}$$

L'équation pour Π_g se déduit de $\Pi_g + \Pi_e = 1$.

Relaxation. Pour tenir compte de l'émission spontanée, il existe un cadre précis pour décrire l'évolution dissipative de la matrice densité (équation pilote), que nous ne présentons pas ici. On se contente d'ajouter aux équations précédentes des termes d'amortissement, avec des taux Γ et Γ' :

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_e}{\mathrm{d}t} = -\Omega\,\mathrm{Im}\left(\rho_{eg}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) - \Gamma\Pi_e, \tag{6.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{eg}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\Delta\rho_{eg} + \mathrm{i}\frac{\Omega}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\left(\Pi_e - \Pi_g\right) - \Gamma'\rho_{eg}. \tag{6.25}$$

Ce sont les *équations de Bloch optiques*.

- $\Gamma = 1/\tau$, où τ est la durée de vie du niveau excité, est le taux de relaxation des populations. Il est appelé $1/T_1$ en résonance magnétique nucléaire (taux de relaxation longitudinale).
- Γ' est le taux de relaxation des cohérences. On peut montrer que $\Gamma' = \Gamma/2$ pour le problème de l'émission spontanée pure. Dans un milieu complexe, les cohérences se brouillent souvent bien plus vite que les populations. On écrit alors

$$\Gamma' = \frac{\Gamma}{2} + \frac{1}{T_2}, \tag{6.26}$$

où $1/T_2$ désigne ici un taux de relaxation transverse supplémentaire (en résonance magnétique, on appelle plutôt $1/T_2$ le taux total Γ'), dû par exemple aux collisions entre atomes dans un gaz, qui induisent des changements de phase aléatoires du dipôle atomique mais n'induisent pas de transition atomique.

Notations complexes. Il est commode de réécrire ces équations en termes du champ et du dipôle atomique. On écrit le champ électrique en notation complexe,

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right], \qquad \mathcal{E} = E_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}, \tag{6.27}$$

de sorte que, d'après la définition de la pulsation de Rabi ($\hbar\Omega = -dE_0$), $\Omega\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = -d\mathcal{E}/\hbar$. Par ailleurs, la cohérence s'écrit $\rho_{eg} = \langle e|\rho|g\rangle = \mathrm{Tr}(\rho|g\rangle\langle e|) = \langle\sigma_-\rangle$ dans le référentiel tournant. En revenant dans le référentiel du laboratoire, on obtient la valeur moyenne du dipôle atomique,

$$\langle\hat{D}\rangle(t) = 2d\ \mathrm{Re}\left[\rho_{eg}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]. \tag{6.28}$$

On définit donc l'amplitude complexe du dipôle atomique

$$\mathcal{D} = 2d\,\rho_{eg}, \qquad \text{telle que} \qquad \langle\hat{D}\rangle(t) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{D}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]. \tag{6.29}$$

Les équations de Bloch optiques (6.24)-(6.25) s'écrivent alors

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\hbar}\,\mathrm{Im}\left(\mathcal{D}\mathcal{E}^*\right) - \Gamma\Pi_e, \tag{6.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{D}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\Delta\mathcal{D} - \Gamma'\mathcal{D} - \mathrm{i}\frac{d^2\mathcal{E}}{\hbar}\left(\Pi_e - \Pi_g\right). \tag{6.31}$$

Le premier terme de l'éq. (6.30) a une interprétation simple : la puissance moyenne cédée par le champ au dipôle vaut $\langle E\,\mathrm{d}\langle\hat{D}\rangle/\mathrm{d}t\rangle = \omega\,\mathrm{Im}(\mathcal{D}\mathcal{E}^*)/2$, et ce terme, égal à cette puissance divisée par $\hbar\omega$, est donc le nombre net de photons absorbés par unité de temps (absorption moins émission stimulée).

6.1.6 Limite de forte relaxation transverse : équations de taux

Dans le cas où Γ' domine les autres échelles de temps, le dipôle $\mathcal{D}$ atteint rapidement un état stationnaire ($\mathrm{d}\mathcal{D}/\mathrm{d}t \simeq 0$), et suit instantanément les évolutions (plus lentes) des populations. D'après l'éq. (6.31), on a alors

$$\mathcal{D} = \frac{\mathrm{i}d^2}{\Gamma' - \mathrm{i}\Delta}\,\frac{\mathcal{E}}{\hbar}\left(\Pi_g - \Pi_e\right). \tag{6.32}$$

L'évolution de Π_e devient, d'après l'éq. (6.30),

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Pi_e}{\mathrm{d}t} &= -\Gamma\Pi_e + \frac{1}{2\hbar}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{i}d^2}{\Gamma' - \mathrm{i}\Delta}\right)\frac{|\mathcal{E}|^2}{\hbar}\left(\Pi_g - \Pi_e\right)\\ &= \underbrace{-\Gamma\Pi_e}_{\text{ém. spontanée}} + \frac{\Omega^2}{2}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma'^2 + \Delta^2}\Big(\underbrace{\Pi_g}_{\text{absorption}} - \underbrace{\Pi_e}_{\text{ém. stimulée}}\Big),\end{aligned} \tag{6.33}$$

où l'on a utilisé $|\mathcal{E}|^2 = E_0^2 = \hbar^2\Omega^2/d^2$. On se ramène ainsi à une équation de taux similaire à celle du modèle d'Einstein, qui sera utilisée pour décrire le milieu amplificateur

d'un laser (chapitre 7) : le terme en Π_g décrit l'absorption, le terme en $-\Pi_e$ l'émission stimulée, avec le même coefficient, et le terme en $-\Gamma\Pi_e$ l'émission spontanée. Le taux d'absorption a une dépendance lorentzienne en fonction du désaccord, de demi-largeur Γ'.

Notons que, même lorsque Γ' ne domine pas les autres échelles de temps (par exemple pour $\Gamma' = \Gamma/2$), les équations (6.32) et (6.33) donnent la solution exacte des équations de Bloch optiques en régime stationnaire, obtenue en annulant toutes les dérivées temporelles.

6.1.7 Polarisabilité : lien avec le modèle de l'électron élastiquement lié

D'après l'éq. (6.32), le dipôle atomique est proportionnel au champ électrique,

$$\mathcal{D} = \alpha\,\mathcal{E}, \tag{6.34}$$

avec la polarisabilité atomique

$$\alpha = \frac{\mathrm{i}d^2}{\hbar(\Gamma' - \mathrm{i}\Delta)}\,(\Pi_g - \Pi_e) = -\frac{d^2}{\hbar}\,\frac{1}{\Delta + \mathrm{i}\Gamma'}\,(\Pi_g - \Pi_e)\,. \tag{6.35}$$

On peut faire le lien avec le modèle classique de l'électron élastiquement lié, dans lequel un électron de masse m et de charge $-e$ est rappelé vers le noyau par une force harmonique de pulsation propre ω_0, et subit une force de frottement de taux Γ. En notation complexe, sa position r obéit à

$$m\ddot{r} = -m\Gamma\dot{r} - m\omega_0^2 r - e\mathcal{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{6.36}$$

En régime forcé, le dipôle $-er$ a pour amplitude complexe

$$\mathcal{D} = \frac{e^2\mathcal{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\Gamma\omega)}, \qquad \text{soit} \qquad \alpha = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\Gamma\omega}. \tag{6.37}$$

Pour ω proche de ω_0, $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \simeq -2\omega_0\Delta$ et $\Gamma\omega \simeq \Gamma\omega_0$, d'où

$$\alpha = -\frac{e^2}{2m\omega_0}\,\frac{1}{\Delta + \mathrm{i}\Gamma/2}. \tag{6.38}$$

On retrouve la même forme que l'éq. (6.35), avec $\Gamma' = \Gamma/2$ (émission spontanée pure), mais sans le facteur $(\Pi_g - \Pi_e)$. Le modèle classique correspond donc à un atome très faiblement excité ($\Pi_g \simeq 1$, $\Pi_e \simeq 0$), avec la correspondance $d^2/\hbar \leftrightarrow e^2/2m\omega_0$ (pour un oscillateur harmonique quantique, on a précisément $|\langle 1|\hat{x}|0\rangle|^2 = \hbar/2m\omega_0$). En revanche, le modèle classique ne rend pas compte de la saturation de la transition : un atome à deux niveaux ne peut pas absorber d'énergie lorsqu'il est dans l'état excité, ce qui se traduit par le facteur $(\Pi_g - \Pi_e)$.

6.2 Effets mécaniques de la lumière sur les atomes

Un atome éclairé par un laser subit une force, qui a deux composantes de natures très différentes. La force dipolaire est associée à la partie réactive de la réponse atomique (la partie réelle de la polarisabilité) : elle dérive d'un potentiel et domine loin de résonance. La pression de radiation est associée à la partie dissipative de la réponse (la partie imaginaire de la polarisabilité, c'est-à-dire l'absorption) : elle est maximale à résonance.

6.2.1 Force dipolaire

L'énergie d'interaction dipolaire électrique $-\hat{D}E$ s'écrit, en moyenne sur une période optique et en régime stationnaire,

$$\langle -\hat{D}E\rangle = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{D}\mathcal{E}^*) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\alpha)\,|\mathcal{E}|^2. \tag{6.39}$$

Pour un dipôle induit par le champ, l'énergie potentielle dont dérive la force est la moitié de cette énergie d'interaction. En effet, la force moyenne exercée par un champ inhomogène sur le dipôle vaut $\mathbf{F} = \langle \hat{D}\,\boldsymbol{\nabla} E\rangle = \mathrm{Re}(\mathcal{D}\,\boldsymbol{\nabla}\mathcal{E}^*)/2$. Pour un champ de phase uniforme, elle s'écrit $\mathbf{F} = \mathrm{Re}(\alpha)\,\boldsymbol{\nabla}|\mathcal{E}|^2/4 = -\boldsymbol{\nabla} U_{\mathrm{dip}}$, avec le potentiel dipolaire

$$U_{\mathrm{dip}} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Re}(\alpha)\,|\mathcal{E}|^2 = \frac{d^2|\mathcal{E}|^2}{4\hbar}\,\frac{\Delta}{\Delta^2+\Gamma'^2}\,(\Pi_g - \Pi_e)\,, \tag{6.40}$$

où l'on a utilisé l'éq. (6.35). On a supposé ici que la différence de populations $\Pi_g - \Pi_e$ ne dépend pas de l'intensité, ce qui est justifié à faible saturation (voir plus bas pour le cas général). Les populations s'équilibrent selon l'éq. (6.33) en régime stationnaire :

$$\Gamma\Pi_e = \frac{d^2|\mathcal{E}|^2}{2\hbar^2}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma'^2+\Delta^2}\,(\Pi_g - \Pi_e) = \frac{\Omega^2}{2}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma'^2+\Delta^2}\,(\Pi_g - \Pi_e)\,. \tag{6.41}$$

On se place dans le cas d'un grand désaccord, tel que $|\Delta| \gg \Gamma, \Gamma'$ et $|\Delta| \gg \Omega$, de sorte que $\Pi_e \ll 1$ et $\Pi_g \simeq 1$. On a alors

$$U_{\mathrm{dip}} = \frac{d^2|\mathcal{E}|^2}{4\hbar\Delta} = \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}. \tag{6.42}$$

C'est le potentiel dipolaire. Il est proportionnel à l'intensité lumineuse locale, et inversement proportionnel au désaccord. En exprimant l'intensité $I = \varepsilon_0 c|\mathcal{E}|^2/2$ et le dipôle en fonction du taux d'émission spontanée, $d^2 = 3\pi\varepsilon_0\hbar c^3\Gamma/\omega_0^3$ (chapitre 3), on obtient la forme usuelle

$$U_{\mathrm{dip}} = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3}\,\frac{\Gamma}{\Delta}\,I. \tag{6.43}$$

Interprétation : déplacement lumineux. Ce résultat s'interprète comme un déplacement en énergie au second ordre de l'état fondamental. Dans le référentiel tournant, les états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ ont des énergies $+\hbar\Delta/2$ et $-\hbar\Delta/2$, et sont couplés par l'élément de matrice $\langle e|H|g\rangle = \hbar\Omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}/2$ (éq. (6.9)). La théorie des perturbations au second ordre donne le déplacement de l'état $|g\rangle$,

$$\delta E_g = \frac{|\langle e|H|g\rangle|^2}{E_g - E_e} = \frac{\hbar^2\Omega^2/4}{\hbar\Delta} = \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}, \tag{6.44}$$

qui coïncide avec l'éq. (6.42). Le couplage repousse les deux niveaux : pour $\Delta < 0$, l'état $|g\rangle$ est sous l'état $|e\rangle$ dans le référentiel tournant, et son énergie est abaissée ; pour $\Delta > 0$, elle est augmentée. Ce déplacement, appelé déplacement lumineux (*light shift*), dépend de la position par l'intermédiaire de l'intensité lumineuse : c'est le potentiel ressenti par l'atome.

Prise en compte de la saturation. Pour $\Gamma' = \Gamma/2$ et une intensité quelconque, la solution stationnaire de l'éq. (6.33) donne $\Pi_g - \Pi_e = 1/(1 + s_\Delta)$, avec $s_\Delta = (\Omega^2/2)/(\Delta^2 + \Gamma^2/4)$. L'expression $\mathbf{F} = \mathrm{Re}(\alpha)\,\boldsymbol{\nabla}|\mathcal{E}|^2/4$ de la force reste valable, avec la polarisabilité locale, qui dépend maintenant de l'intensité :

$$\mathbf{F} = -\frac{\hbar\Delta}{4}\,\frac{\boldsymbol{\nabla}\Omega^2}{\Delta^2+\Gamma^2/4}\,\frac{1}{1+s_\Delta} = -\frac{\hbar\Delta}{2}\,\frac{\boldsymbol{\nabla}s_\Delta}{1+s_\Delta} = -\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\hbar\Delta}{2}\ln\left(1+s_\Delta\right)\right]. \tag{6.45}$$

Le potentiel dipolaire vaut donc $U_{\mathrm{dip}} = (\hbar\Delta/2)\ln(1+s_\Delta)$. Il se réduit à $\hbar\Delta s_\Delta/2 \simeq \hbar\Omega^2/4\Delta$ à faible saturation et grand désaccord, mais ne coïncide plus avec $-\mathrm{Re}(\alpha)|\mathcal{E}|^2/4$ dès que la saturation n'est pas négligeable.

6.2.2 Application : pince optique

Considérons un faisceau laser gaussien focalisé, de désaccord négatif ($\Delta < 0$, laser désaccordé « vers le rouge »). Le potentiel dipolaire $U_{\mathrm{dip}} \propto I/\Delta$ est alors minimal là où l'intensité est maximale : l'atome est attiré vers le foyer du faisceau (figure 39). Au contraire, pour $\Delta > 0$, l'atome est repoussé des zones de forte intensité. C'est le principe de la pince optique, qui permet par exemple de piéger des atomes individuels au foyer d'un faisceau fortement focalisé. Le même principe permet de manipuler des objets diélectriques de taille micrométrique (billes de silice ou de polystyrène, cellules), dont la polarisabilité est réelle et positive lorsque leur indice dépasse celui du milieu environnant : les pinces optiques sont ainsi utilisées en biophysique, par exemple pour étirer des molécules d'ADN.

Lorsque $|\Delta| \gg \Gamma, \Omega$ (et pour $\Gamma' = \Gamma/2$), le taux d'émission spontanée vaut $\Gamma\Pi_e \simeq \Gamma\Omega^2/4\Delta^2$, de sorte que

$$\frac{\hbar\Gamma\Pi_e}{|U_{\mathrm{dip}}|} \simeq \frac{\Gamma}{|\Delta|} \ll 1. \tag{6.46}$$

L'émission spontanée, qui chauffe les atomes (voir ci-dessous), est négligeable par un facteur $\Gamma/|\Delta| \ll 1$: la force dipolaire est essentiellement conservative. En pratique, on utilise des désaccords très grands, et on compense la décroissance de U_{dip} en $1/\Delta$ par une forte intensité.

6.2.3 Pression de radiation

On considère cette fois un laser résonnant, $\Delta = 0$. On suppose de plus $\Gamma' = \Gamma/2$ pour simplifier. Le potentiel dipolaire s'annule alors, et la condition de stationnarité de l'éq. (6.33) s'écrit

$$\Gamma\Pi_e = \frac{\Omega^2}{2\Gamma'}\left(\Pi_g - \Pi_e\right), \qquad \text{soit} \qquad \Pi_e = \left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)^2\left(\Pi_g - \Pi_e\right). \tag{6.47}$$

Avec $\Pi_g = 1 - \Pi_e$, on obtient $\Pi_e\left[1 + 2(\Omega/\Gamma)^2\right] = (\Omega/\Gamma)^2$, d'où

$$\Pi_e = \frac{(\Omega/\Gamma)^2}{1+2(\Omega/\Gamma)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{s}{1+s}, \tag{6.48}$$

où l'on a introduit le paramètre de saturation

$$s = 2\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)^2 = \frac{2d^2|\mathcal{E}|^2}{\hbar^2\Gamma^2} = \frac{I}{I_{\mathrm{sat}}}. \tag{6.49}$$

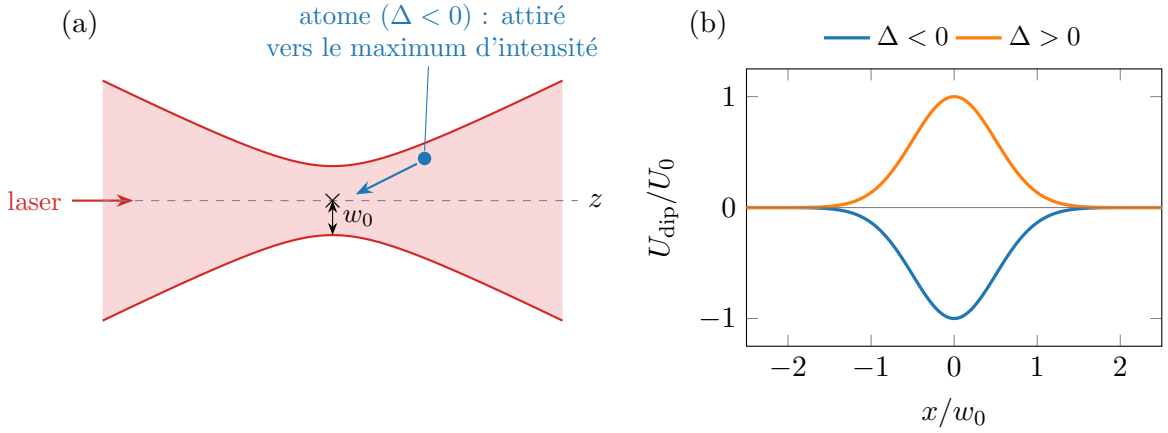


Figure 39 – Principe de la pince optique. (a) Un faisceau laser gaussien est focalisé sur un col de rayon w_0. Pour un désaccord négatif, l'atome est attiré vers le maximum d'intensité, au foyer du faisceau. (b) Potentiel dipolaire dans le plan focal, en fonction de la position transverse x, pour un désaccord négatif (puits de potentiel) et positif (barrière de potentiel). On a noté $U_0 = \hbar\Omega_0^2/4|\Delta|$, où Ω_0 est la pulsation de Rabi au centre du faisceau.

Avec l'intensité $I = \varepsilon_0 c|\mathcal{E}|^2/2$, l'intensité de saturation vaut $I_{\text{sat}} = \varepsilon_0 c\hbar^2\Gamma^2/4d^2$. Comme le montre la figure 40, la population de l'état excité croît linéairement avec l'intensité à faible intensité ($\Pi_e \simeq s/2$), puis sature à la valeur 1/2 : à forte intensité, l'atome a une probabilité égale d'être dans $|g\rangle$ et dans $|e\rangle$. Il est donc impossible d'inverser la population d'un système à deux niveaux en régime stationnaire en l'éclairant (seule une impulsion transitoire, comme l'impulsion π vue plus haut, peut le faire, pendant une durée courte devant $1/\Gamma$).

Le taux d'émission spontanée s'écrit $\Gamma\Pi_e$. En régime stationnaire, l'atome absorbe en moyenne autant de photons qu'il en émet, par émission stimulée ou spontanée. Ces deux processus ont des conséquences mécaniques très différentes.

— Un cycle absorption – émission stimulée ne transfère pas d'impulsion à l'atome : le photon émis est identique au photon absorbé, et en particulier il a la même impulsion $\hbar\mathbf{k}$.

— En revanche, un cycle absorption – émission spontanée s'accompagne d'un gain d'impulsion moyen $\hbar\mathbf{k}$: l'atome absorbe l'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ du photon laser, puis émet un photon dans une direction aléatoire, de sorte que l'impulsion de recul associée à l'émission spontanée est nulle en moyenne.

On en déduit la force de pression de radiation, égale à l'impulsion moyenne transférée par unité de temps :

$$\mathbf{F} = \hbar\mathbf{k}\,\Gamma\Pi_e = \hbar\mathbf{k}\,\frac{\Gamma}{2}\,\frac{s}{1+s}. \tag{6.50}$$

Elle sature à la valeur $\hbar k\Gamma/2$ à forte intensité. En pratique, l'accélération maximale $F_{\max}/m$ est de l'ordre de 10^5 à $10^6\,\text{m/s}^2$, soit 10^4 à 10^5 fois l'accélération de la pesanteur : c'est une force énorme à l'échelle de l'atome. Par exemple, pour la raie de résonance du sodium ($\lambda = 589\,\text{nm}$, $\Gamma/2\pi = 9{,}8\,\text{MHz}$, masse $m = 3{,}8 \times 10^{-26}\,\text{kg}$), la vitesse de recul vaut $\hbar k/m \simeq 3\,\text{cm/s}$, et l'accélération maximale $\hbar k\Gamma/2m \simeq 9 \times 10^5\,\text{m/s}^2$. La pression de radiation est notamment utilisée pour le piégeage et le refroidissement laser des atomes.

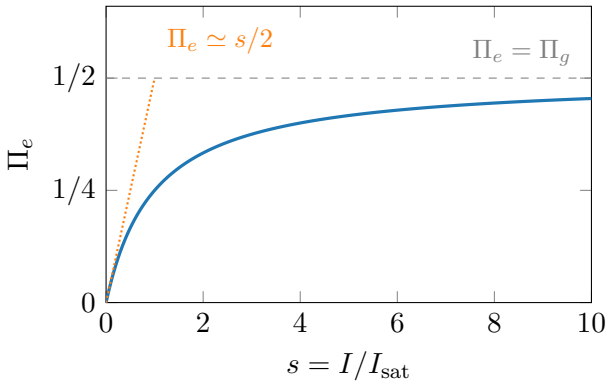


Figure 40 – Population de l'état excité d'un atome éclairé par un laser résonnant, en fonction du paramètre de saturation $s = I/I_{\text{sat}}$ (éq. (6.48)). Elle croît linéairement à faible intensité, puis sature à la valeur 1/2.

Ordres de grandeur. Le taux d'émission spontanée est relié au dipôle par $\Gamma = \omega_0^3 d^2/3\pi\varepsilon_0\hbar c^3$ (chapitre 3). On en déduit l'expression de l'intensité de saturation en fonction des seules caractéristiques de la transition,

$$I_{\text{sat}} = \frac{\varepsilon_0 c\hbar^2\Gamma^2}{4d^2} = \frac{\pi hc\,\Gamma}{3\lambda^3}, \tag{6.51}$$

qui vaut $I_{\text{sat}} \simeq 6{,}3\,\text{mW/cm}^2$ pour le sodium. Hors résonance, le même calcul donne

$$\mathbf{F} = \hbar\mathbf{k}\,\frac{\Gamma}{2}\,\frac{s}{1+s+4\Delta^2/\Gamma^2}. \tag{6.52}$$

Cette dépendance en désaccord, combinée à l'effet Doppler, est à la base du refroidissement laser : un atome se déplaçant vers un laser désaccordé vers le rouge voit la fréquence du laser décalée vers le bleu, plus proche de résonance, et subit une force de freinage.

6.3 Interaction avec un milieu atomique

Nous considérons maintenant un milieu constitué d'un grand nombre d'atomes, et nous étudions la propagation d'une onde lumineuse dans ce milieu. La réponse de chaque atome, caractérisée par sa polarisabilité, détermine l'indice de réfraction et l'absorption du milieu.

6.3.1 Susceptibilité d'un milieu atomique

Pour un milieu atomique de densité n_{at} (nombre d'atomes par unité de volume), on définit la densité de polarisation (en notation complexe)

$$\mathcal{P} = n_{\text{at}}\mathcal{D}. \tag{6.53}$$

En régime stationnaire, d'après l'éq. (6.35), on a

$$\mathcal{P} = -n_{\text{at}}\frac{d^2}{\hbar(\Delta + \mathrm{i}\Gamma')}\,(\Pi_g - \Pi_e)\,\mathcal{E} = \varepsilon_0\chi\,\mathcal{E}, \tag{6.54}$$

où χ est la susceptibilité électrique du milieu,

$$\chi = -\frac{n_{\rm at} d^2}{\varepsilon_0 \hbar(\Delta + {\rm i}\Gamma')} \left(\Pi_g - \Pi_e\right) = \frac{n_{\rm at} d^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{-\Delta + {\rm i}\Gamma'}{\Delta^2 + \Gamma'^2} \left(\Pi_g - \Pi_e\right). \tag{6.55}$$

Sa partie réelle χ' a une forme dispersive en fonction du désaccord, et sa partie imaginaire χ'' une forme lorentzienne (figure 41).

6.3.2 Propagation d'une onde dans le milieu

L'étude de la propagation lumineuse dans un milieu conduit à une modification de l'équation d'onde, qui devient

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 E = \mu_0 \, \partial_t^2 P, \tag{6.56}$$

où $P(t) = {\rm Re}[\mathcal{P} {\rm e}^{-{\rm i}\omega t}]$. Pour une onde plane de pulsation ω, en ${\rm e}^{{\rm i}(kz-\omega t)}$, on obtient $k^2 = (1+\chi)\,\omega^2/c^2$: la propagation se fait comme dans un milieu d'indice complexe $\underline{n}$ tel que

$$\underline{n}^2 = 1 + \chi. \tag{6.57}$$

Pour une faible excitation, $\Pi_g \simeq 1$ et $\Pi_e \ll 1$, la susceptibilité ne dépend pas de l'intensité. Pour un milieu dilué, on a de plus $|\chi| \ll 1$, et

$$\underline{n} \simeq 1 + \frac{\chi}{2}. \tag{6.58}$$

Une onde de pulsation ω s'écrit alors

$$E(z,t) = {\rm Re}\left[\mathcal{E}_0 \, {\rm e}^{{\rm i}(n\omega z/c - \omega t)}\right] {\rm e}^{-z/2\xi}, \tag{6.59}$$

où $n = {\rm Re}\,\underline{n} = 1 + \chi'/2$ est l'indice de réfraction, et où la longueur d'absorption ξ est définie par

$$\frac{1}{2\xi} = \frac{\omega}{c} \, {\rm Im}\,\underline{n}. \tag{6.60}$$

On obtient

$$\frac{1}{\xi} = 2\frac{\omega}{c} \, {\rm Im}\,\underline{n} = \frac{\omega}{c}\,\chi'' = \frac{\omega}{c} \frac{n_{\rm at} d^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{\Gamma'}{\Delta^2 + \Gamma'^2} \left(\Pi_g - \Pi_e\right). \tag{6.61}$$

L'intensité décroît donc exponentiellement, $I(z) = I(0)\,{\rm e}^{-z/\xi}$ (loi de Beer-Lambert). Pour un milieu d'atomes dans leur état fondamental, on obtient $\xi > 0$: le champ est atténué par le milieu. Il y aura amplification pour $\Pi_g < \Pi_e$, c'est-à-dire s'il y a inversion de population. Comme nous l'avons vu, cette situation ne peut pas être obtenue en éclairant un système à deux niveaux, et nécessite de faire intervenir d'autres niveaux d'énergie : c'est le principe du laser (chapitre 7).

Section efficace d'absorption. On écrit souvent $1/\xi = n_{\rm at}\sigma$, où σ est la section efficace d'absorption d'un atome. Pour un atome dans son état fondamental, à résonance et pour $\Gamma' = \Gamma/2$, l'éq. (6.61) et l'expression de Γ en fonction de d donnent

$$\sigma_0 = \frac{2\omega d^2}{\varepsilon_0 \hbar c \Gamma} = \frac{3\lambda^2}{2\pi}. \tag{6.62}$$

La section efficace d'absorption résonnante est de l'ordre du carré de la longueur d'onde, bien plus grande que la taille de l'atome. On vérifie aussi que $I_{\rm sat} = \hbar\omega\Gamma/2\sigma_0$: à l'intensité de saturation, le nombre de photons qui traversent la section efficace σ_0 par unité de temps est égal à $\Gamma/2$.

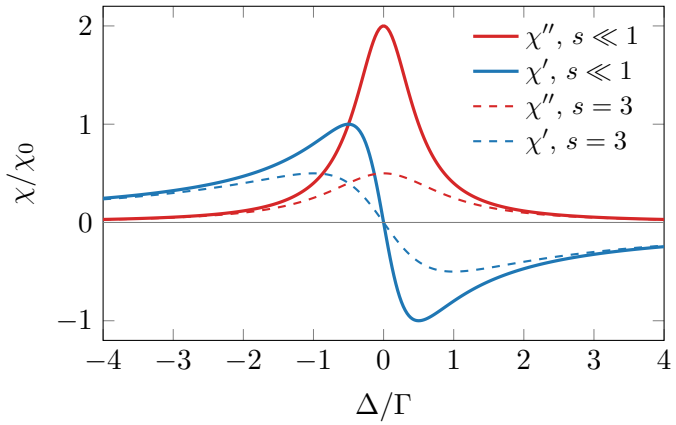


Figure 41 – Parties réelle χ' (bleu) et imaginaire χ'' (rouge) de la susceptibilité d'un milieu d'atomes à deux niveaux, en fonction du désaccord, pour $\Gamma' = \Gamma/2$ (éq. (6.64)), en unités de $\chi_0 = n_{\text{at}} d^2/\varepsilon_0 \hbar \Gamma$. Traits pleins : faible intensité ($s = I/I_{\text{sat}} \ll 1$) ; tirets : $s = 3$. La saturation réduit l'absorption et la dispersion près de résonance, et élargit la raie d'absorption (largeur totale à mi-hauteur $\Gamma\sqrt{1+s}$).

6.3.3 Saturation de la susceptibilité

À plus forte intensité, la différence de populations $\Pi_g - \Pi_e$ dépend elle-même de l'intensité. Pour $\Gamma' = \Gamma/2$, la solution stationnaire de l'éq. (6.33), pour un désaccord quelconque, s'écrit

$$\Pi_g - \Pi_e = \frac{1}{1+s_\Delta} = \frac{1}{1+\dfrac{\Omega^2/2}{\Delta^2+\Gamma^2/4}} = \frac{1}{1+I/I_{\text{sat}}(\Delta)}, \qquad I_{\text{sat}}(\Delta) = I_{\text{sat}}\left(1+\frac{4\Delta^2}{\Gamma^2}\right), \tag{6.63}$$

où l'on a utilisé l'éq. (6.49). On en déduit la susceptibilité saturée d'un milieu d'atomes à deux niveaux :

$$\chi = -\frac{d^2 n_{\text{at}}}{\hbar\varepsilon_0}\,\frac{1}{\Delta + \mathrm{i}\Gamma/2}\,\frac{1}{1+I/I_{\text{sat}}(\Delta)}. \tag{6.64}$$

Près de résonance ($|\Delta| \ll \Gamma$), $I_{\text{sat}}(\Delta) \simeq I_{\text{sat}}$, et l'on peut remplacer $I_{\text{sat}}(\Delta)$ par I_{sat} dans l'éq. (6.64) : c'est la forme que nous utiliserons au chapitre 8. La susceptibilité dépend de l'intensité de l'onde : la réponse du milieu n'est plus linéaire. L'absorption (χ'') diminue lorsque l'intensité dépasse l'intensité de saturation, et le milieu devient transparent à très forte intensité (figure 41). La saturation modifie aussi l'indice de réfraction (χ') : c'est un exemple d'effet Kerr optique, que nous étudierons au chapitre 8.

7 Théorie semi-classique du laser

Ce chapitre est consacré au fonctionnement du laser, que nous décrivons de manière semi-classique : la lumière est décrite par un champ classique (ou par un nombre de photons dans un mode de la cavité), et la matière par des populations de niveaux d'énergie, dont l'évolution découle des résultats du chapitre 6. Nous commençons par établir la condition d'oscillation d'une cavité contenant un milieu amplificateur, puis nous

expliquons comment réaliser un tel milieu et passons en revue quelques lasers courants. Nous étudions ensuite un modèle simple de laser continu, qui permet de comprendre l'existence d'un seuil, la saturation du gain et la largeur spectrale ultime d'un laser. Nous abordons enfin la question du nombre de modes sur lesquels un laser oscille (compétition entre modes, injection optique), et terminons par les lasers à impulsions, qui exploitent au contraire un très grand nombre de modes.

7.1 Condition d'oscillation d'un laser

On considère une cavité Fabry-Perot formée de deux miroirs, éclairée par une onde incidente d'amplitude a_{in} (figure 42). Nous avons vu au chapitre 4 que l'amplitude a du champ à l'intérieur de la cavité s'écrit

$$a = \frac{t\, a_{\text{in}}}{1 - r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}, \qquad \varphi = \frac{4\pi L_0}{\lambda} = \frac{\omega L}{c}, \tag{7.1}$$

où t est le coefficient de transmission en amplitude du miroir d'entrée, r le produit des coefficients de réflexion en amplitude des deux miroirs, L_0 la longueur de la cavité et $L = 2L_0$ la longueur d'un aller-retour. Le champ intracavité est maximal lorsque la condition de résonance $\varphi = 2\pi m$ (m entier) est satisfaite, mais il reste toujours fini, car $|r| < 1$.

Rajoutons maintenant un milieu dans la cavité. On note g le facteur complexe par lequel est multiplié le champ lors de la traversée du milieu (sur un aller-retour), $E_{\text{out}} = g\, E_{\text{in}}$. Le même raisonnement conduit à

$$a = \frac{t\, a_{\text{in}}}{1 - r\, g\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}. \tag{7.2}$$

Si le milieu est amplificateur ($|g| > 1$), le dénominateur peut s'annuler. On aura alors un champ a non nul en l'absence de source a_{in} si

$$r\, g\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 1, \tag{7.3}$$

soit, en prenant r réel positif (les déphasages à la réflexion étant inclus dans φ),

$$\begin{cases} |g| = \dfrac{1}{r} & : \text{le gain compense les pertes,} \\ \arg g + \varphi = 2\pi m & : \text{cette condition définit les fréquences possibles.} \end{cases} \tag{7.4}$$

C'est la condition d'auto-oscillation du laser : comme tout oscillateur, le laser est un amplificateur bouclé sur lui-même par une rétroaction (ici, la cavité). En pratique, l'oscillation démarre à partir du bruit, c'est-à-dire des photons émis spontanément par le milieu dans le mode de la cavité. Il reste à comprendre comment obtenir un milieu amplificateur, et ce qui fixe l'amplitude du champ une fois l'oscillation démarrée.

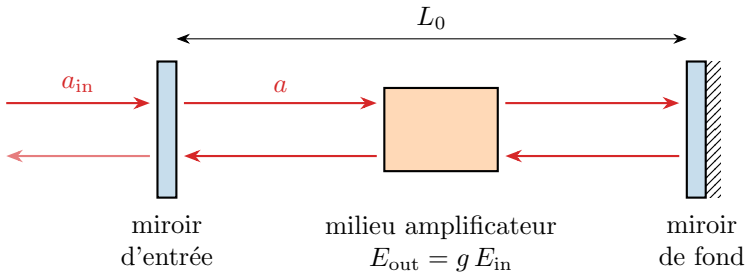


Figure 42 – Cavité Fabry-Perot contenant un milieu amplificateur, qui multiplie l'amplitude du champ par un facteur g à chaque aller-retour. Lorsque le gain compense les pertes, un champ intracavité a non nul peut exister en l'absence de champ incident a_{in} : c'est l'effet laser.

7.2 Milieu amplificateur

Un milieu amplifie la lumière par émission stimulée lorsque la population du niveau supérieur de la transition dépasse celle du niveau inférieur : il faut réaliser une *inversion de population*. Nous montrons que c'est impossible avec un système à deux niveaux, puis nous étudions des systèmes à trois et quatre niveaux, avant de présenter quelques lasers courants.

7.2.1 Système à deux niveaux ?

Pour un atome à deux niveaux g et e éclairé par un laser, nous avons vu au chapitre 6 que les populations stationnaires Π_g et Π_e vérifient

$$\Gamma\,\Pi_e = \frac{\Omega^2}{2}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma'^2 + \Delta^2}\,(\Pi_g - \Pi_e), \tag{7.5}$$

où Γ est le taux d'émission spontanée, Γ' le taux d'amortissement de la cohérence, Ω la pulsation de Rabi et Δ le désaccord du laser. Le membre de gauche étant positif, on a donc

$$\Pi_g > \Pi_e, \tag{7.6}$$

quelle que soit l'intensité laser. Le milieu est donc toujours absorbant : à forte intensité, il devient au mieux transparent ($\Pi_g \simeq \Pi_e \simeq 1/2$), mais jamais amplificateur. L'inversion de population doit donc être obtenue en faisant intervenir d'autres niveaux d'énergie.

7.2.2 Système à trois niveaux

On considère trois niveaux a, b et e (figure 43a). Un mécanisme de pompage transfère les atomes du fondamental a vers le niveau e, avec un taux w. Le niveau e se désexcite rapidement, avec un temps caractéristique τ_e, vers le niveau b, qui a une longue durée de vie τ_b. La transition laser a lieu entre b et a. En l'absence de lumière laser, et dans un modèle simplifié où le pompage agit comme un processus d'absorption et d'émission

stimulée de même taux w, les populations évoluent selon

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N_e}{\mathrm{d}t} = w(N_a - N_e) - \dfrac{N_e}{\tau_e}, \\ \dfrac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}t} = \dfrac{N_e}{\tau_e} - \dfrac{N_b}{\tau_b}, \\ N_a + N_b + N_e = N. \end{cases} \tag{7.7}$$

En régime stationnaire, la deuxième équation donne

$$N_e = \frac{\tau_e}{\tau_b} N_b \ll N_b. \tag{7.8}$$

En reportant dans la première équation, on obtient

$$\frac{N_b}{\tau_b} = w\left(N_a - \frac{\tau_e}{\tau_b} N_b\right), \qquad \text{soit} \qquad \frac{N_b}{\tau_b}(1 + w\tau_e) = wN_a, \tag{7.9}$$

d'où

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{w\tau_b}{1 + w\tau_e}. \tag{7.10}$$

Il y a inversion de population, $N_b > N_a$, si $w\tau_b > 1 + w\tau_e$. Comme $w\tau_e \ll w\tau_b$, cette condition se réduit à

$$w\tau_b > 1 : \tag{7.11}$$

le pompage doit transférer les atomes plus vite que le niveau b ne se désexcite. Ce fonctionnement nécessite un pompage intense, car la moitié des atomes au moins doit être portée dans le niveau b.

Le laser à rubis. Le premier laser, réalisé par T. Maiman en 1960 [14], est un laser à trois niveaux. Le milieu amplificateur est un barreau de rubis, c'est-à-dire un cristal d'alumine Al_2O_3 contenant des impuretés de chrome Cr^{3+}, dont les niveaux d'énergie jouent le rôle des niveaux a, b et e. Le pompage est réalisé par une lampe flash : le laser émet donc des impulsions, sur la raie rouge du rubis à 694,3 nm.

7.2.3 Système à quatre niveaux

Dans un système à quatre niveaux (figure 43b), le pompage porte les atomes du fondamental g vers le niveau e, qui se désexcite rapidement vers le niveau b, de longue durée de vie. La transition laser a lieu entre b et un niveau a distinct du fondamental, qui se désexcite rapidement vers g, avec un temps caractéristique $\tau_a \ll \tau_b$. La population du niveau a évolue selon

$$\frac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}t} = \frac{N_b}{\tau_b} - \frac{N_a}{\tau_a}, \tag{7.12}$$

d'où, en régime stationnaire,

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{\tau_b}{\tau_a} \gg 1. \tag{7.13}$$

Ce système permet de dépeupler rapidement le niveau a, ce qui facilite l'inversion de population : celle-ci est obtenue quel que soit le taux de pompage, même faible.

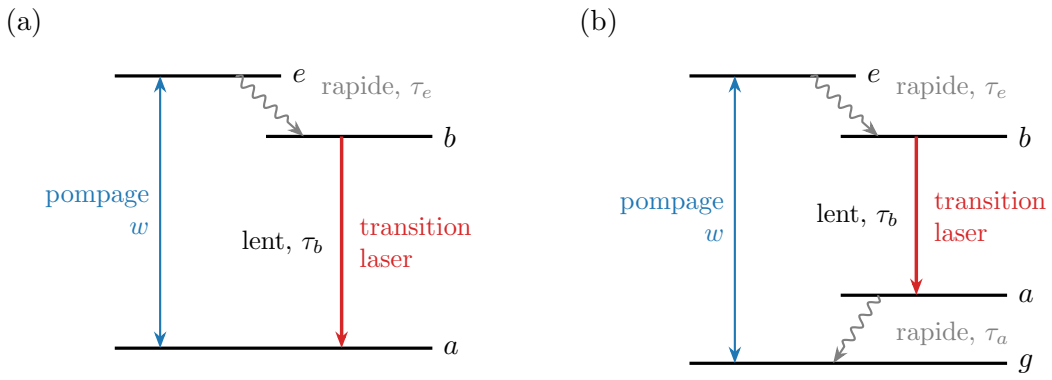


Figure 43 – (a) Système à trois niveaux : le pompage porte les atomes du fondamental a vers le niveau e, qui se désexcite rapidement vers le niveau b, de longue durée de vie. La transition laser a lieu entre b et le fondamental a. (b) Système à quatre niveaux : le niveau inférieur a de la transition laser se vide rapidement vers le fondamental g, ce qui facilite l'inversion de population.

7.2.4 Zoologie des lasers

Laser hélium-néon. Le laser He-Ne est le premier laser continu (1961). Le milieu amplificateur est un mélange gazeux d'hélium et de néon (figure 44). Les atomes d'hélium sont excités par une décharge électrique dans un niveau excité métastable ($2\,^1S_0$ ou $2\,^3S_1$). Ils excitent à leur tour les atomes de néon par collisions, vers des niveaux d'énergie quasiment égale ($5s$ et $4s$). Les niveaux inférieurs des transitions laser ($4p$ et $3p$) se vident rapidement par émission spontanée vers le niveau $3s$, qui se désexcite par collisions avec les parois du tube. On retrouve un schéma à quatre niveaux. La transition la plus utilisée est la raie rouge à 632,8 nm. Le gain est faible : pour une cavité de longueur $L_0 \simeq 20\,\text{cm}$, il est de l'ordre de 1 % par passage, ce qui impose d'utiliser des miroirs de transmission $T < 1\,\%$.

Laser Nd:YAG. Le milieu amplificateur est un cristal de grenat d'yttrium-aluminium $Y_3Al_5O_{12}$ (YAG), dopé par un ion de terre rare, le néodyme Nd^{3+}. Le pompage s'effectue vers des bandes d'absorption situées vers 0,73 μm et 0,8 μm, qui se désexcitent rapidement vers le niveau $^4F_{3/2}$, de longue durée de vie. La transition laser a lieu à 1,06 μm vers le niveau $^4I_{11/2}$, situé environ $2000\,\text{cm}^{-1}$ au-dessus du fondamental $^4I_{9/2}$, et qui se vide rapidement vers celui-ci : c'est un système à quatre niveaux. Ce laser peut être rendu extrêmement stable dans une configuration monolithique, où le cristal lui-même forme la cavité (les réflexions se font sur ses faces).

Lasers à fibre. Le milieu amplificateur est cette fois le cœur d'une fibre optique en silice, dopé par une terre rare, par exemple l'erbium. On utilise une fibre à double cœur : le cœur central, dopé, assure l'amplification et guide la lumière laser sur un mode transverse unique ; le cœur externe, plus large, guide la lumière de pompage, issue de diodes laser de forte puissance mais de mauvaise qualité spatiale, qui est progressivement absorbée par le cœur dopé. Les miroirs de la cavité peuvent être des réseaux de Bragg photo-inscrits dans la fibre. Le laser à fibre dopée erbium émet à 1550 nm, longueur

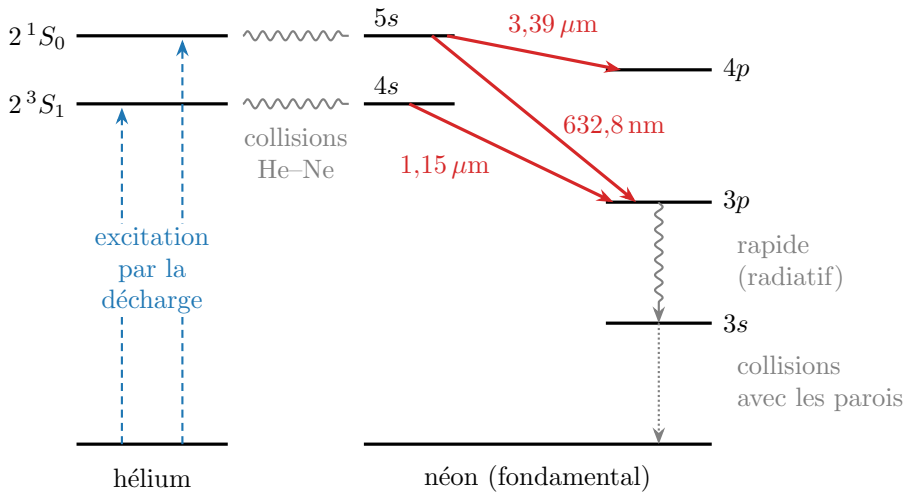


Figure 44 – Niveaux d'énergie (schématiques) mis en jeu dans le laser hélium-néon. Les atomes d'hélium, excités par la décharge dans des niveaux métastables, transfèrent leur énergie aux atomes de néon par collisions. Les flèches rouges indiquent les principales transitions laser du néon.

d'onde à laquelle les fibres optiques en silice présentent une très faible atténuation (0,2 dB/km).

Diodes laser. En pratique, les télécommunications optiques fibrées à 1550 nm utilisent des sources laser sous forme de diodes laser. Le milieu amplificateur est une jonction entre un semi-conducteur dopé p et un semi-conducteur dopé n : le courant électrique injecte des électrons et des trous dans la zone de jonction, où ils se recombinent en émettant des photons. Les faces clivées du cristal semi-conducteur forment la cavité. Ces lasers sont très compacts (la puce mesure moins d'un millimètre) et sont aujourd'hui les plus répandus.

7.3 Modèle de laser continu

Nous décrivons ici un modèle simple de laser, fonctionnant à une seule fréquence et impliquant trois niveaux. Il permet de comprendre l'existence d'un seuil d'oscillation, la stabilité du régime laser et l'origine physique de la saturation du gain.

7.3.1 Équations d'évolution

On considère le système à trois niveaux de la figure 43a, avec les notations suivantes : le pompage porte les atomes de a vers e avec le taux w ; le niveau e se désexcite vers b avec le taux Γ_e ; le niveau b se désexcite vers a avec le taux Γ_b. La transition laser $b \leftrightarrow a$ est couplée à un mode de la cavité contenant N_γ photons. On se place dans la limite de forte relaxation transverse (Γ' grand), telle que la dynamique des cohérences peut être éliminée et se réduit à des équations de taux (chapitre 6). Les populations évoluent alors

selon

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N_e}{\mathrm{d}t} = -\Gamma_e N_e + w(N_a - N_e), \\ \dfrac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}t} = \Gamma_e N_e - \Gamma_b N_b + \dfrac{\Omega^2}{2}\,\dfrac{\Gamma'}{\Gamma'^2 + \Delta^2}\,(N_a - N_b), \\ \dfrac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(N_e + N_b), \\ \dfrac{\mathrm{d}N_\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{N_\gamma}{\tau} - \beta N_\gamma (N_a - N_b). \end{cases} \tag{7.14}$$

Le dernier terme de la deuxième équation décrit l'absorption (terme en N_a) et l'émission stimulée (terme en N_b) sur la transition laser. Il est proportionnel à Ω^2, donc à l'intensité lumineuse, c'est-à-dire au nombre de photons dans le mode ; on l'écrit

$$\frac{\Omega^2}{2}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma'^2 + \Delta^2} = \beta N_\gamma. \tag{7.15}$$

Dans la dernière équation, τ est la durée de vie d'un photon dans la cavité (qui tient compte de la transmission du miroir de sortie et des autres pertes), et le terme $-\beta N_\gamma(N_a - N_b)$ traduit le fait que chaque absorption fait disparaître un photon du mode, et chaque émission stimulée en ajoute un. Nous avons négligé l'émission spontanée dans le mode laser, qui ajouterait un terme $+\beta N_b$ au membre de droite de la dernière équation (son taux est égal au taux d'émission stimulée pour un seul photon dans le mode) ; elle est petite devant l'émission stimulée $\beta N_\gamma N_b$ dès que $N_\gamma \gg 1$; elle joue cependant un rôle essentiel pour amorcer l'oscillation, et nous la retrouverons dans l'étude de la largeur spectrale. Le système (7.14) est non linéaire, à cause du terme $N_\gamma(N_a - N_b)$.

Simplification. On suppose que Γ_e est très grand, de sorte que $\mathrm{d}N_e/\mathrm{d}t \ll \Gamma_e N_e$ et $\Gamma_e \gg w$. La première équation donne alors le niveau e en régime quasi stationnaire,

$$\Gamma_e N_e = w N_a, \qquad \text{ce qui implique} \qquad N_e \ll N_a. \tag{7.16}$$

On conserve alors des équations sur les seules populations a et b :

$$\frac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}t} = w N_a - \Gamma_b N_b + \beta N_\gamma (N_a - N_b). \tag{7.17}$$

On introduit le nombre total d'atomes $N = N_a + N_b$ (conservé) et l'inversion de population $\Delta = N_b - N_a$ (à ne pas confondre avec le désaccord, qui n'interviendra plus), soit

$$N_b = \frac{N + \Delta}{2}, \qquad N_a = \frac{N - \Delta}{2}. \tag{7.18}$$

Le système devient

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}t} = 2w\,\frac{N - \Delta}{2} - 2\Gamma_b\,\frac{N + \Delta}{2} - 2\beta N_\gamma \Delta, \tag{7.19}$$

soit

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} = (w - \Gamma_b)N - (w + \Gamma_b + 2\beta N_\gamma)\,\Delta, \\ \dfrac{\mathrm{d}N_\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{N_\gamma}{\tau} + \beta N_\gamma \Delta. \end{cases}} \tag{7.20}$$

Nous allons déterminer les états stationnaires de ce système, et étudier leur stabilité.

7.3.2 États stationnaires

Les états stationnaires vérifient

$$\begin{cases} (w-\Gamma_b)N = (w+\Gamma_b+2\beta N_\gamma)\,\Delta, & (1) \\ N_\gamma = \beta\tau N_\gamma \Delta. & (2) \end{cases} \tag{7.21}$$

Solution 1 : laser éteint, $N_\gamma = 0$. L'équation (1) donne alors l'inversion de population

$$\Delta_0 = N\,\frac{w-\Gamma_b}{w+\Gamma_b}. \tag{7.22}$$

L'inversion de population est positive pour $w > \Gamma_b$, et peut être maximale, $\Delta_0 \simeq N$, pour $w \gg \Gamma_b$.

Solution 2 : laser allumé, $N_\gamma \neq 0$. D'après (2), on a

$$\Delta = \frac{1}{\beta\tau}. \tag{7.23}$$

L'inversion de population est donc bloquée à une valeur indépendante du pompage. L'équation (1) donne alors

$$(w-\Gamma_b)\,\beta\tau N = w+\Gamma_b+2\beta N_\gamma, \tag{7.24}$$

d'où

$$N_\gamma = \frac{w}{2}\left(\tau N - \frac{1}{\beta}\right) - \frac{\Gamma_b}{2}\left(\tau N + \frac{1}{\beta}\right). \tag{7.25}$$

Il faut bien sûr $N_\gamma \geq 0$, ce qui impose deux conditions :

— $N > 1/(\beta\tau)$: le milieu doit contenir assez d'atomes pour que le gain puisse compenser les pertes ;

— $w > w_c$, avec

$$w_c = \Gamma_b\,\frac{1+\tau\beta N}{\tau\beta N - 1}. \tag{7.26}$$

Le laser possède donc un *seuil* : il ne fonctionne que si le taux de pompage dépasse w_c. Au-delà, le nombre de photons croît linéairement avec le pompage (figure 45a).

7.3.3 Stabilité des solutions

Pour $w > w_c$, il y a deux solutions acceptables. Montrons que la solution $N_\gamma = 0$ est instable dans ce cas. On suppose pour cela que N_γ est très petit, de sorte que Δ prend la valeur d'équilibre Δ_0 obtenue pour $N_\gamma = 0$ (éq. (7.22)). Une déviation $N_\gamma \neq 0$ évolue alors selon

$$\frac{\mathrm{d}N_\gamma}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{1}{\tau} + \beta\Delta_0\right) N_\gamma \equiv A_0 N_\gamma. \tag{7.27}$$

Le taux de croissance A_0 est la différence entre le gain $G_0 = \beta\Delta_0$ du milieu amplificateur (non saturé) et le taux de pertes $1/\tau$:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{1}{\tau} + \beta N\,\frac{w-\Gamma_b}{w+\Gamma_b} = \frac{w(\beta N\tau - 1) - \Gamma_b(\beta N\tau + 1)}{\tau(w+\Gamma_b)} \\ &= \frac{(\beta N\tau - 1)(w - w_c)}{\tau(w+\Gamma_b)}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

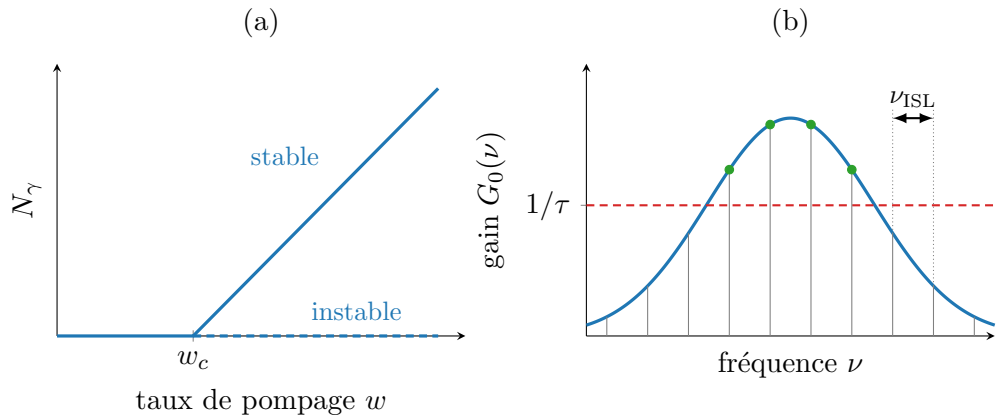


Figure 45 – (a) Nombre de photons dans la cavité en fonction du taux de pompage w, dans le modèle de laser continu : le laser s'allume au-delà du seuil w_c. Au-dessus du seuil, la solution $N_\gamma = 0$ (pointillés) existe toujours mais elle est instable. (b) Gain petit signal $G_0(\nu)$ du milieu amplificateur en fonction de la fréquence, comparé aux pertes $1/\tau$. Seuls les modes longitudinaux de la cavité (traits verticaux, séparés de l'intervalle spectral libre ν_{ISL}) dont le gain dépasse les pertes (points verts) peuvent osciller.

Pour un milieu compatible avec l'effet laser, soit $\beta N\tau > 1$, le taux A_0 a le signe de $w - w_c$. La solution $N_\gamma = 0$ est donc

- stable pour $w < w_c$ ($A_0 < 0$) : une fluctuation du nombre de photons s'amortit ;
- instable pour $w > w_c$ ($A_0 > 0$) : une fluctuation, par exemple un photon émis spontanément dans le mode, est amplifiée exponentiellement.

Stabilité de la solution laser allumé. On peut vérifier que la solution laser allumé est stable pour $w > w_c$. On linéarise le système (7.20) autour de $(\Delta^* = 1/\beta\tau, N_\gamma^*)$, en posant $\Delta = \Delta^* + \delta\Delta$ et $N_\gamma = N_\gamma^* + \delta N_\gamma$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\delta\Delta\\ \delta N_\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(w+\Gamma_b+2\beta N_\gamma^*) & -2\beta\Delta^*\\ \beta N_\gamma^* & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\Delta\\ \delta N_\gamma\end{pmatrix}. \tag{7.29}$$

La matrice a une trace négative et un déterminant $2\beta^2\Delta^* N_\gamma^*$ positif : ses deux valeurs propres ont une partie réelle négative, et la solution est stable. Les valeurs propres peuvent être complexes : le retour à l'équilibre se fait alors par des oscillations amorties, appelées oscillations de relaxation.

7.3.4 Interprétation : saturation du gain

Comment comprendre l'équilibre de l'intensité lumineuse ? Le gain du milieu amplificateur, c'est-à-dire le taux de croissance $G = \beta\Delta$ du nombre de photons par émission stimulée nette, est proportionnel à l'inversion de population. Lorsque le laser est allumé, il s'écrit

$$\frac{G}{G_0} = \frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{1/\beta\tau}{N\,\frac{w-\Gamma_b}{w+\Gamma_b}} = \frac{1}{\beta\tau N\,\frac{w-\Gamma_b}{w+\Gamma_b}}. \tag{7.30}$$

On rappelle que $(w-\Gamma_b)\beta\tau N = w+\Gamma_b+2\beta N_\gamma$, d'où

$$\frac{G}{G_0} = \frac{1}{1+\frac{2\beta N_\gamma}{w+\Gamma_b}}. \tag{7.31}$$

Le gain est de la forme

$$G = \frac{G_0}{1+I/I_{\text{sat}}}, \tag{7.32}$$

avec une intensité $I \propto N_\gamma$ et une intensité de saturation $I_{\text{sat}} \propto (w+\Gamma_b)/2\beta$, telles que $I/I_{\text{sat}} = 2\beta N_\gamma/(w+\Gamma_b)$. L'intensité de saturation dépend du pompage, mais on peut la considérer comme constante au voisinage du seuil ($w \simeq w_c$). On retrouve la saturation du gain par l'intensité lumineuse : l'émission stimulée vide le niveau b et réduit l'inversion de population. L'équilibre s'écrit

$$\frac{1}{\tau} = G = \frac{G_0}{1+I/I_{\text{sat}}}, \tag{7.33}$$

soit

$$1+\frac{I}{I_{\text{sat}}} = G_0\tau, \qquad \text{d'où} \qquad I = I_{\text{sat}}\left(G_0\tau - 1\right). \tag{7.34}$$

On retombe sur une explication simple : l'intensité intracavité s'ajuste de sorte que le gain saturé compense exactement les pertes. Le gain petit signal G_0 doit dépasser les pertes $1/\tau$ pour que le laser s'allume ; au-delà, l'intensité croît avec le gain petit signal, c'est-à-dire avec le pompage.

7.3.5 Largeur spectrale d'un laser

Un laser monomode présente une pulsation

$$\omega = \frac{2\pi c}{L}\, n + \delta, \tag{7.35}$$

où L est la longueur aller-retour de la cavité, n un entier et δ un décalage dû au déphasage à la réflexion sur les miroirs. Pour une cavité typique de longueur aller-retour $L = 1\,\text{m}$, et une fréquence $\omega/2\pi = 3\times10^{14}\,\text{Hz}$, on a

$$n \simeq \frac{\omega L}{2\pi c} = \frac{3\times10^{14}\times1}{3\times10^{8}} = 10^6 \gg 1. \tag{7.36}$$

Une variation de L d'un nanomètre conduit alors à une variation de fréquence (en valeur absolue)

$$\delta\omega = \frac{\delta L}{L}\,\omega = 10^{-9}\,\omega, \qquad \text{soit} \qquad \frac{\delta\omega}{2\pi} = 3\times10^5\,\text{Hz}. \tag{7.37}$$

Ce type de variation de longueur se produit très facilement :

— par dilatation thermique des matériaux solides : une variation de température de 1 mK peut suffire dans le quartz. On utilise donc des matériaux spéciaux, dont la dilatation thermique s'annule à une température T_0 : $\partial L/\partial T = 0$ pour $T = T_0$;

— par une variation de l'indice de l'air, due à un changement de pression.

En fonctionnement libre, un laser dérive donc facilement d'un mégahertz par minute ; à plus long terme, sa fréquence dérive aléatoirement.

La fréquence du laser doit donc être asservie :

— sur une cavité Fabry-Perot de référence, asservie en température et utilisant un matériau tel que $\partial L/\partial T = 0$ pour $T = T_0$, placée dans le vide. On atteint ainsi une largeur $\delta\nu \sim 1\,\mathrm{Hz}$ à court terme ;
— il reste toujours des dérives lentes, qu'on corrige en asservissant le laser sur une raie atomique. Il faut alors contrôler de nombreux effets systématiques (effet Doppler, champ magnétique fluctuant, etc.).

L'état de l'art, atteint dans les horloges atomiques optiques, est une stabilité relative $\delta\omega/\omega \sim 10^{-18}$: une horloge de cette stabilité dériverait de moins d'une seconde sur l'âge de l'Univers.

7.3.6 Limite « fondamentale » : largeur de Schawlow-Townes

Une limite fondamentale à la largeur spectrale d'un laser est due à l'émission spontanée [15]. Un processus d'émission spontanée dans le mode laser ajoute au champ électrique intracavité E un champ de module fixe E_{sp}, mais de phase aléatoire (figure 46). Si θ est la phase relative du champ ajouté, la phase du champ total varie de

$$\delta\varphi \simeq \frac{E_{\mathrm{sp}}}{E}\sin\theta, \qquad \text{soit en moyenne} \qquad \langle\delta\varphi^2\rangle = \frac{E_{\mathrm{sp}}^2}{2E^2}. \tag{7.38}$$

La phase du champ subit donc une marche au hasard, qui conduit après N_{sp} événements d'émission spontanée à une incertitude de phase

$$\Delta\varphi^2 = N_{\mathrm{sp}}\,\frac{E_{\mathrm{sp}}^2}{2E^2}. \tag{7.39}$$

La phase sera brouillée au bout d'un temps de cohérence τ_c tel que $\Delta\varphi \simeq 1$, c'est-à-dire après un nombre d'événements

$$N_{\mathrm{sp}}^c = \frac{2E^2}{E_{\mathrm{sp}}^2}. \tag{7.40}$$

Comme on a, dans une cavité de volume V,

$$\frac{\varepsilon_0}{2}E^2V = N_\gamma\hbar\omega \quad \text{and} \quad \frac{\varepsilon_0}{2}E_{\mathrm{sp}}^2V = \hbar\omega, \tag{7.41}$$

on obtient

$$N_{\mathrm{sp}}^c = 2N_\gamma, \tag{7.42}$$

où N_γ est le nombre de photons dans la cavité (formule assez logique : il faut ajouter de l'ordre de N_γ photons de phases aléatoires pour brouiller la phase du champ). Par ailleurs, le taux d'émission spontanée dans le mode laser est βN_b : d'après la relation d'Einstein appliquée à un seul mode, le taux d'émission spontanée dans un mode est égal au taux d'émission stimulée par photon présent dans ce mode. On a donc également

$$N_{\mathrm{sp}}^c = \beta N_b\,\tau_c. \tag{7.43}$$

Relions maintenant β à la puissance de sortie du laser, qui résulte du bilan entre émission stimulée et absorption : en régime stationnaire, le nombre net de photons créés par émission stimulée par unité de temps est égal au nombre $\Phi_E/\hbar\omega$ de photons émis par

le laser par unité de temps, où Φ_E est la puissance de sortie (on suppose que les pertes de la cavité sont dues à la transmission du miroir de sortie) :

$$\beta N_\gamma (N_b - N_a) = \frac{\Phi_E}{\hbar\omega}. \tag{7.44}$$

On en déduit la largeur de l'émission laser

$$\Delta\omega_{\rm ST} \sim \frac{1}{\tau_c} = \frac{\beta N_b}{2N_\gamma} = \frac{\Phi_E}{\hbar\omega}\,\frac{1}{N_\gamma(N_b-N_a)}\,\frac{N_b}{2N_\gamma},$$

$$\text{soit} \qquad \Delta\omega_{\rm ST} = \frac{1}{2}\,\frac{\Phi_E}{\hbar\omega}\,\frac{N_b}{N_b-N_a}\,\frac{1}{N_\gamma^2}. \tag{7.45}$$

On peut transformer cette relation en reliant Φ_E à N_γ :

$$\frac{\Phi_E}{\hbar\omega} = \frac{N_\gamma}{\tau} = N_\gamma\,\Delta\omega_{\rm cav}, \tag{7.46}$$

où $\Delta\omega_{\rm cav} = 1/\tau$ est la largeur totale à mi-hauteur (en pulsation) des résonances de la cavité passive, dont l'énergie décroît au taux $1/\tau$. On obtient finalement la largeur de Schawlow-Townes

$$\boxed{\Delta\omega_{\rm ST} = \frac{N_b}{2(N_b-N_a)}\,\frac{\Delta\omega_{\rm cav}}{N_\gamma}.} \tag{7.47}$$

La largeur du laser est plus petite que celle de la cavité vide d'un facteur de l'ordre du nombre de photons dans la cavité. Le facteur $N_b/(N_b-N_a) \geq 1$ traduit l'augmentation du bruit lorsque l'inversion de population est incomplète. En éliminant $N_\gamma = \Phi_E/(\hbar\omega\,\Delta\omega_{\rm cav})$, et en passant aux fréquences ($\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$), on obtient pour une inversion complète

$$\Delta\nu_{\rm ST} = \frac{\pi h\nu\,(\Delta\nu_{\rm cav})^2}{\Phi_E}, \tag{7.48}$$

qui est la forme sous laquelle la formule de Schawlow et Townes est habituellement citée. Notre dérivation reste heuristique : le facteur numérique exact dépend de la définition des largeurs et du régime considéré (en dessous ou au-dessus du seuil), et non de la physique, qui est bien décrite par la diffusion de phase.

Applications numériques.

— Laser He-Ne : puissance $\Phi_E = 1\,\text{mW}$, longueur de cavité $L_0 = 1\,\text{m}$, transmission du miroir de sortie 2 %. La durée de vie d'un photon vaut $\tau = 2L_0/(cT) \simeq 3\times10^{-7}\,\text{s}$, soit

$$\frac{\Delta\omega_{\rm cav}}{2\pi} \simeq 5\times10^5\,\text{Hz}. \tag{7.49}$$

Le nombre de photons dans la cavité vaut $N_\gamma = \Phi_E\tau/\hbar\omega \simeq 10^9$ (à $\lambda = 632{,}8\,\text{nm}$), et on obtient, pour une inversion complète ($N_a \ll N_b$),

$$\Delta\omega_{\rm ST} \simeq 1{,}4\times10^{-3}\,\text{s}^{-1}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{\Delta\omega_{\rm ST}}{2\pi} \simeq 2\times10^{-4}\,\text{Hz}, \tag{7.50}$$

ce que l'on retrouve directement avec l'éq. (7.48). Cette largeur est complètement négligeable : en pratique, la largeur spectrale est dominée par les fluctuations techniques décrites plus haut.

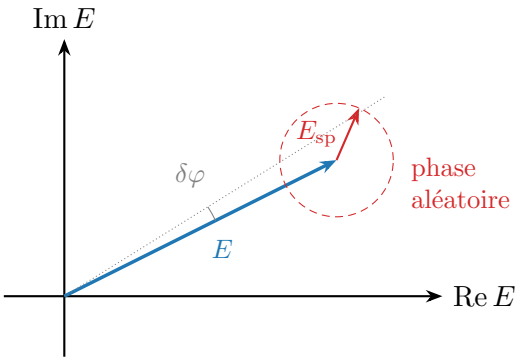


Figure 46 – Représentation dans le plan complexe du champ laser E dans la cavité. Chaque événement d'émission spontanée dans le mode laser ajoute un champ E_{sp} de module fixe et de phase aléatoire, qui modifie la phase du champ total d'une quantité aléatoire $\delta\varphi$. La phase du laser effectue ainsi une marche au hasard.

— Diode laser : la cavité est très courte et de faible finesse, et on a typiquement

$$\frac{\Delta\omega_{\mathrm{cav}}}{2\pi} \simeq 2 \times 10^{10}\,\mathrm{Hz}. \tag{7.51}$$

Pour une puissance de l'ordre du milliwatt, le nombre de photons dans la cavité n'est que de quelques 10^4, et on trouve $\Delta\omega_{\mathrm{ST}}/2\pi \sim 3 \times 10^5\,\mathrm{Hz}$ pour une inversion complète. Compte tenu de l'inversion incomplète d'un semi-conducteur (et d'un couplage entre phase et amplitude propre à ces milieux, qui élargit encore la raie), on obtient $\Delta\omega_{\mathrm{ST}}/2\pi \sim 10^6\,\mathrm{Hz}$, comparable aux largeurs de raie typiques de ces lasers.

On peut toutefois affiner une diode laser, jusqu'à obtenir une largeur inférieure à $\Delta\omega_{\mathrm{ST}}$, en l'asservissant sur une cavité. On sort alors du cadre de la démonstration précédente, qui supposait un laser libre.

7.4 Compétition entre modes

Le laser peut a priori émettre de la lumière à toutes les fréquences résonnantes de la cavité telles que le gain petit signal dépasse les pertes, $G_0 > 1/\tau$ (figure 45b). Ces fréquences sont séparées de l'intervalle spectral libre $\nu_{\mathrm{ISL}} = c/L$ (rappelons que L désigne ici la longueur d'un aller-retour, d'où $\nu_{\mathrm{ISL}} = c/2L_0$ pour une cavité linéaire de longueur L_0).

Remarque. On néglige ici la variation de l'indice du milieu amplificateur avec la fréquence, qui fait que les modes ne sont pas vraiment séparés de ν_{ISL}.

Nous allons voir que le fait qu'un laser puisse être monomode résulte d'un effet non linéaire : la saturation du gain d'un mode par l'intensité des autres modes.

7.4.1 Modèle de deux modes en compétition

Pour le comprendre, on considère deux modes 1 et 2 en compétition, qui partagent le même milieu amplificateur. Le gain de chaque mode est saturé par sa propre intensité,

mais aussi par celle de l'autre mode (saturations croisées) :

$$G_1 = \frac{G_{01}}{1 + \frac{I_1}{I_{\text{sat},1}} + \frac{I_2}{I_{\text{sat},2\to1}}}, \qquad G_2 = \frac{G_{02}}{1 + \frac{I_2}{I_{\text{sat},2}} + \frac{I_1}{I_{\text{sat},1\to2}}}. \tag{7.52}$$

L'intensité de chaque mode évolue selon $\mathrm{d}I_i/\mathrm{d}t = (G_i - 1/\tau)I_i$. On fait une analyse de la dynamique non linéaire pour de faibles non-linéarités, en développant les gains au premier ordre en intensité, $G_1 \simeq G_{01}(1 - I_1/I_{\text{sat},1} - I_2/I_{\text{sat},2\to1})$, et de même pour G_2. On obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = (\alpha_1 - \beta_1 I_1 - \theta_{12} I_2)\, I_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = (\alpha_2 - \beta_2 I_2 - \theta_{21} I_1)\, I_2, \end{cases} \tag{7.53}$$

où $\alpha_i = G_{0i} - 1/\tau$ est le gain net du mode i, $\beta_1 = G_{01}/I_{\text{sat},1}$ décrit l'autosaturation et $\theta_{12} = G_{01}/I_{\text{sat},2\to1}$ la saturation croisée (et de même pour le mode 2).

États stationnaires. Les états stationnaires vérifient

$$(\alpha_1 - \beta_1 I_1 - \theta_{12} I_2 = 0 \quad \text{ou} \quad I_1 = 0) \quad \text{and} \quad (\alpha_2 - \beta_2 I_2 - \theta_{21} I_1 = 0 \quad \text{ou} \quad I_2 = 0)\,. \tag{7.54}$$

Dans le plan (I_1, I_2), les deux premières conditions définissent deux droites D_1 et D_2. La droite D_1 coupe les axes en $I_1 = \alpha_1/\beta_1$ et $I_2 = \alpha_1/\theta_{12}$, la droite D_2 en $I_1 = \alpha_2/\theta_{21}$ et $I_2 = \alpha_2/\beta_2$. Plusieurs cas de figure se présentent, selon les positions relatives de D_1 et D_2 (figure 47).

Cas 1 : D_1 toujours au-dessus de D_2. C'est le cas si

$$\frac{\alpha_1}{\theta_{12}} > \frac{\alpha_2}{\beta_2} \quad \text{and} \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\theta_{21}}. \tag{7.55}$$

Les deux modes ne peuvent pas coexister. Les solutions stationnaires sont $(0,0)$, $(0, \alpha_2/\beta_2)$ et $(\alpha_1/\beta_1, 0)$. La solution $(I_1 = 0, I_2 = \alpha_2/\beta_2)$ est instable : une petite intensité I_1 croît avec le taux $\alpha_1 - \theta_{12}\alpha_2/\beta_2 > 0$. Au contraire, la solution $(I_1 = \alpha_1/\beta_1, I_2 = 0)$ est stable, car une petite intensité I_2 évolue avec le taux $\alpha_2 - \theta_{21}\alpha_1/\beta_1 < 0$. Le laser est monomode, sur le mode 1 (figure 47a).

Cas 2 : les droites se croisent. Si les deux droites se croisent dans le quadrant $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, il existe une solution multimode (I_1^0, I_2^0), à leur intersection. Nous montrons ci-dessous que :

- si $\theta_{12}\theta_{21} < \beta_1\beta_2$, la solution multimode est stable : le laser est multimode (figure 47b) ;
- si $\theta_{12}\theta_{21} > \beta_1\beta_2$, la solution multimode est instable, et les deux solutions monomodes sont stables : le laser est bistable (figure 47c). Il est monomode, mais peut facilement sauter d'un mode à l'autre.

Physiquement, la saturation croisée est forte lorsque les deux modes interagissent avec les mêmes atomes, comme dans un milieu à élargissement homogène : les modes sont alors en compétition. Dans un milieu à élargissement inhomogène (par exemple un gaz élargi par effet Doppler), chaque mode interagit avec une classe différente d'atomes, et les modes peuvent coexister.

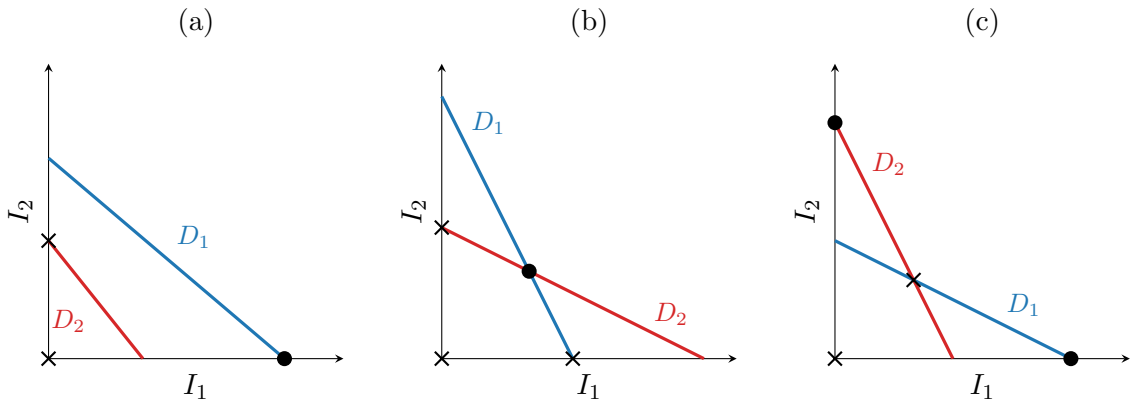


Figure 47 – États stationnaires de deux modes en compétition, dans le plan des intensités (I_1, I_2). Les disques désignent les solutions stables et les croix les solutions instables. (a) La droite D_1 est au-dessus de D_2 : laser monomode sur le mode 1. (b) Les droites se croisent avec $\theta_{12}\theta_{21} < \beta_1\beta_2$: laser multimode. (c) Les droites se croisent avec $\theta_{12}\theta_{21} > \beta_1\beta_2$: laser bistable, monomode sur l'un ou l'autre des modes.

7.4.2 Stabilité de la solution multimode

On étudie la dynamique des faibles déviations autour de la solution stationnaire multimode,

$$I_1 = I_1^0 + \delta I_1, \qquad I_2 = I_2^0 + \delta I_2, \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 I_1^0 - \theta_{12} I_2^0 = 0, \\ \alpha_2 - \beta_2 I_2^0 - \theta_{21} I_1^0 = 0. \end{cases} \tag{7.56}$$

La dynamique linéarisée s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta I_1 = \underbrace{(\alpha_1 - \beta_1 I_1^0 - \theta_{12} I_2^0)}_{=0}\, \delta I_1 - \beta_1 I_1^0\, \delta I_1 - \theta_{12} I_1^0\, \delta I_2, \tag{7.57}$$

et de même

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta I_2 = -\beta_2 I_2^0\, \delta I_2 - \theta_{21} I_2^0\, \delta I_1, \tag{7.58}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \delta I_1 \\ \delta I_2 \end{pmatrix} = -M \begin{pmatrix} \delta I_1 \\ \delta I_2 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \beta_1 I_1^0 & \theta_{12} I_1^0 \\ \theta_{21} I_2^0 & \beta_2 I_2^0 \end{pmatrix}. \tag{7.59}$$

La matrice M a pour déterminant

$$\det M = I_1^0 I_2^0 \left(\beta_1\beta_2 - \theta_{12}\theta_{21}\right). \tag{7.60}$$

La solution est instable si une valeur propre de M est négative. Comme la trace de M est positive, c'est le cas si et seulement si $\det M < 0$, c'est-à-dire $\theta_{12}\theta_{21} > \beta_1\beta_2$. On retrouve la condition sur les pentes relatives de D_1 et D_2 : la solution multimode est stable lorsque la droite D_1 est plus pentue que D_2 (saturations croisées faibles devant les autosaturations).

7.5 Injection optique

Si l'on dispose d'un laser monomode d'excellente pureté spectrale, on peut l'utiliser pour asservir en fréquence un autre laser, par exemple un laser plus puissant multimode. On injecte pour cela la lumière du laser « maître », d'amplitude E_{in}, dans la cavité du laser « esclave », à travers son miroir de sortie, de coefficients de réflexion et de transmission en amplitude r et t (figure 48a). On note E_{cav} le champ intracavité juste après le miroir, G le gain en amplitude sur un tour de cavité et φ le déphasage sur un tour. En choisissant la convention $\begin{pmatrix} t & \mathrm{i}r \\ \mathrm{i}r & t \end{pmatrix}$ (unitaire) pour la matrice de transfert du miroir, les champs vérifient

$$\begin{cases} E_{\text{cav}} = \mathrm{i}r\, G\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\, E_{\text{cav}} + t\, E_{\text{in}}, \\ E_{\text{out}} = \mathrm{i}r\, E_{\text{in}} + t\, G\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\, E_{\text{cav}}. \end{cases} \tag{7.61}$$

Laser libre. En l'absence de champ incident, un champ intracavité non nul impose

$$1 = \mathrm{i}r\, G\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \qquad \text{avec} \qquad G = \frac{G_0}{1 + I/I_{\text{sat}}}, \tag{7.62}$$

soit

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_N = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi N, \\ G(I_0) = \dfrac{1}{|r|}. \end{cases} \tag{7.63}$$

La première condition fixe les fréquences des modes N de la cavité, et la seconde l'intensité I_0 du laser libre.

Laser injecté. Pour un faible champ incident, on cherche à savoir si le champ dans la cavité est asservi à la fréquence du laser maître. On suppose qu'à cette fréquence correspond un déphasage $\varphi = \varphi_N + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll 1$: le laser maître est proche de la résonance avec le mode N. On suppose également que l'intensité du laser esclave reste proche de I_0. L'équation de la cavité s'écrit alors

$$t\, E_{\text{in}} = \left(1 - r\, G\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon}\right) E_{\text{cav}}. \tag{7.64}$$

Supposons E_{in} réel, $E_{\text{in}} = \sqrt{I_{\text{in}}}$, et posons $E_{\text{cav}} = \sqrt{I_{\text{cav}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$, avec $t = \sqrt{T}$. On a

$$\sqrt{T I_{\text{in}}} = \left(1 - r\, G\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon}\right) \sqrt{I_{\text{cav}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}, \tag{7.65}$$

soit, au premier ordre en ε et en $I_{\text{cav}} - I_0$,

$$\sqrt{\frac{T I_{\text{in}}}{I_{\text{cav}}}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi} = 1 - \underbrace{r G(I_0)}_{=1} - r G'(I_0)\, (I_{\text{cav}} - I_0) - \mathrm{i}\varepsilon. \tag{7.66}$$

On en déduit deux équations, en prenant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{T I_{\text{in}}}{I_{\text{cav}}}} \cos\psi = -r G'(I_0)\, (I_{\text{cav}} - I_0), & (1) \\ \sqrt{\dfrac{T I_{\text{in}}}{I_{\text{cav}}}} \sin\psi = \varepsilon. & (2) \end{cases} \tag{7.67}$$

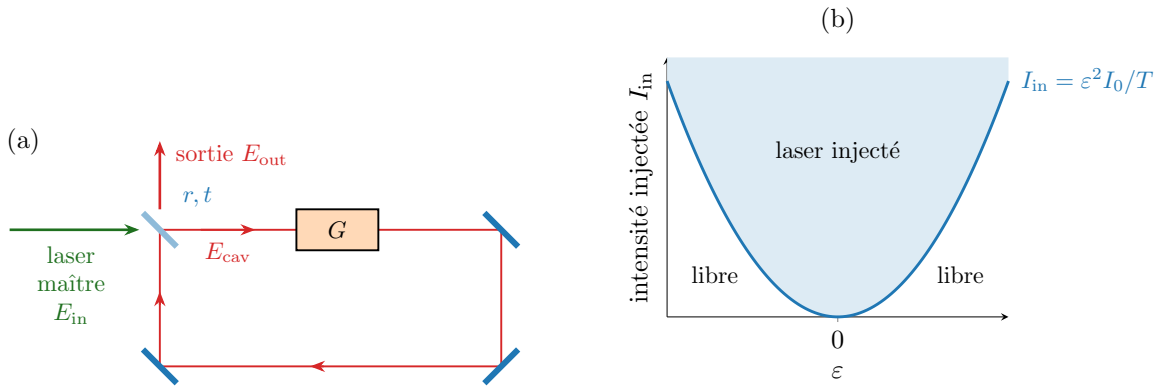


Figure 48 – (a) Injection optique : la lumière d'un laser maître est injectée, à travers le miroir de sortie, dans la cavité en anneau d'un laser esclave de gain G. (b) Domaine d'injection dans le plan $(\varepsilon, I_{\text{in}})$, où ε est le déphasage sur un tour associé à l'écart de fréquence entre le laser maître et le mode libre du laser esclave : le laser esclave est injecté si $I_{\text{in}} > \varepsilon^2 I_0/T$, et oscille librement sinon.

Pour que (2) soit possible, il faut, avec $I_{\text{cav}} \simeq I_0$,

$$\frac{T I_{\text{in}}}{I_0} > \varepsilon^2. \tag{7.68}$$

L'équation (2) fixe alors la phase ψ du laser esclave par rapport au laser maître, et (1) donne la petite correction d'intensité $I_{\text{cav}} - I_0$ (rappelons que $G'(I_0) < 0$). Lorsque la condition (7.68) est satisfaite, le laser esclave oscille à la fréquence du laser maître, avec un déphasage ψ fixe par rapport à celui-ci : il est *injecté*. Sinon, il oscille librement sur son propre mode (figure 48b). Comme $\varepsilon = (\omega - \omega_N)L/c$, où ω est la pulsation du laser maître, ω_N celle du mode libre et L le périmètre de la cavité, la plage de verrouillage en fréquence vaut

$$|\omega - \omega_N| < \frac{c}{L}\sqrt{\frac{T I_{\text{in}}}{I_0}} = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{I_{\text{in}}}{I_{\text{out}}}}, \tag{7.69}$$

où l'on a introduit l'intensité de sortie du laser libre $I_{\text{out}} = T I_0$ et le taux de pertes $1/\tau = cT/L$ associé au miroir de sortie. La plage de verrouillage augmente comme la racine carrée de l'intensité injectée : elle est égale à la largeur de la cavité, multipliée par le rapport des amplitudes des champs injecté et émis. C'est la forme optique de la plage d'accrochage d'Adler, bien connue pour les oscillateurs électroniques. Cette technique permet d'obtenir un laser de forte puissance ayant les propriétés spectrales d'un laser maître de faible puissance.

7.5.1 Comment favoriser le fonctionnement monomode ?

Outre l'injection par un autre laser monomode, on peut favoriser le fonctionnement monomode en déformant la courbe de gain $G(\omega)$, de sorte qu'un seul mode ait un gain net important.

Diode laser sur réseau (cavité étendue). On renvoie dans une diode laser une partie de la lumière qu'elle émet, à l'aide d'un réseau de diffraction d'angle ajustable

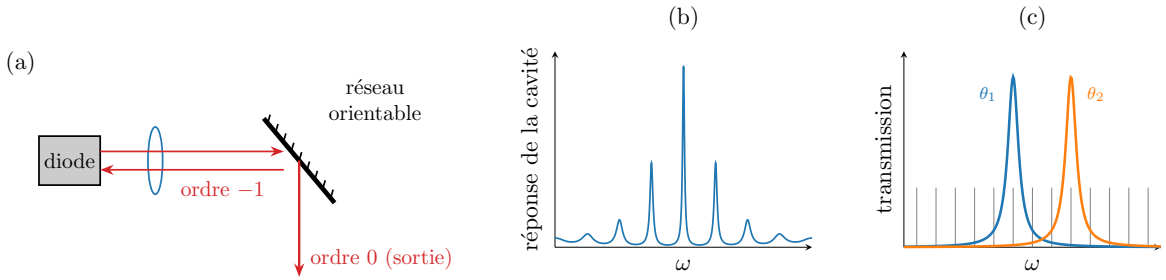


Figure 49 – Sélection d'un mode. (a) Diode laser en cavité étendue (configuration de Littrow) : l'ordre -1 du réseau est renvoyé dans la diode, et l'ordre 0 forme le faisceau de sortie. (b) Réponse de la cavité étendue en fonction de la pulsation : les résonances sont également espacées, mais leur finesse varie avec la fréquence, à cause de la dépendance en fréquence du coefficient de réflexion effectif du réseau. (c) Transmission d'un filtre interférentiel placé dans la cavité, pour deux inclinaisons θ_1 et θ_2 du filtre : seuls les modes de la cavité (traits verticaux) proches du maximum de transmission ont des pertes faibles.

(figure 49a). Pour un réseau de pas d, éclairé sous l'incidence θ_i, l'ordre m est diffracté dans la direction θ_m donnée par

$$\sin\theta_m = \sin\theta_i + m\,\frac{\lambda}{d}. \tag{7.70}$$

On oriente le réseau de sorte que l'ordre -1 soit renvoyé vers la diode ($\theta_{-1} = -\theta_i$, soit $2d\sin\theta_i = \lambda$, configuration dite de Littrow), tandis que l'ordre 0 constitue le faisceau de sortie. On superpose ainsi au laser une cavité externe, dont l'alignement est réalisé pour une seule longueur d'onde : le coefficient de réflexion effectif $r_{\text{eff}}(\omega)$ du réseau dépend de la fréquence. La réponse de la cavité externe, de longueur aller-retour L', est proportionnelle à $1/|1 - r_{\text{eff}}(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega L'/c}|^2$: elle présente des pics également espacés, mais de finesse variant graduellement (figure 49b). Seul le mode de plus grande finesse, sélectionné par l'orientation du réseau, oscille.

Filtre interférentiel. On peut aussi placer dans la cavité un filtre interférentiel à bande étroite, dont la longueur d'onde de transmission dépend de son inclinaison θ (figure 49c). On introduit ainsi des pertes, sauf pour quelques fréquences ajustables.

7.6 Lasers à impulsions

Nous décrivons maintenant un type de laser délivrant des trains d'impulsions courtes, de période T. Par transformée de Fourier, le champ E se décompose sur des fréquences

$$\omega = n\omega_0 + \delta, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \tag{7.71}$$

c'est-à-dire sur un peigne de fréquences équidistantes. Ce spectre correspond aux modes longitudinaux possibles d'un laser, avec

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{L} \tag{7.72}$$

(L étant la longueur aller-retour de la cavité). La période $T = L/c$ du train d'impulsions est donc la durée d'un aller-retour dans la cavité. À quelle condition obtient-on ce régime de fonctionnement pulsé ?

7.6.1 Principe d'un laser à impulsions : synchronisation des modes

Supposons un champ se décomposant sur un grand nombre de modes,

$$E(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n\omega_0+\delta)t}, \qquad c_n = a_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n}. \tag{7.73}$$

Supposons un spectre en « peigne de fréquences » :

$$a_n = \begin{cases} a & \text{pour } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7.74}$$

L'intensité vaut

$$I(t) = \frac{1}{2}|E|^2 = \frac{a^2 N}{2} + a^2 \sum_{n<m} \cos\left[(n-m)\omega_0 t - \varphi_n + \varphi_m\right]. \tag{7.75}$$

Modes décorrélés. Si les phases φ_n sont aléatoires et décorrélées, la moyenne de chaque cosinus est nulle, et on a

$$\langle I(t) \rangle = \frac{a^2 N}{2}. \tag{7.76}$$

Quelles sont les fluctuations temporelles typiques de l'intensité ? On les caractérise par l'écart-type

$$\delta I = \sqrt{\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}. \tag{7.77}$$

En notant $C_{nm}(t) = \cos\left[(n-m)\omega_0 t - \varphi_n + \varphi_m\right]$, l'éq. (7.75) donne

$$I^2(t) = \left(\frac{a^2 N}{2}\right)^2 + 2\,\frac{a^2 N}{2}\, a^2 \sum_{n<m} C_{nm}(t) + a^4 \sum_{\substack{n_1<m_1 \\ n_2<m_2}} C_{n_1 m_1}(t)\, C_{n_2 m_2}(t). \tag{7.78}$$

Le deuxième terme est de moyenne nulle sur les phases φ_n. Pour que le troisième terme ait une moyenne non nulle, il faut $n_1 = n_2$ et $m_1 = m_2$, auquel cas la moyenne du produit des cosinus vaut $1/2$. Il y a $N(N-1)/2$ tels couples, d'où

$$\langle I^2(t) \rangle = \left(\frac{a^2 N}{2}\right)^2 + a^4\, \frac{N(N-1)}{2}\, \frac{1}{2} \underset{N \gg 1}{\simeq} 2 \left(\frac{a^2 N}{2}\right)^2 = 2\langle I \rangle^2. \tag{7.79}$$

On en déduit

$$\boxed{\delta I = \langle I \rangle.} \tag{7.80}$$

On a donc une intensité extrêmement fluctuante : les fluctuations sont aussi grandes que la valeur moyenne (figure 50a).

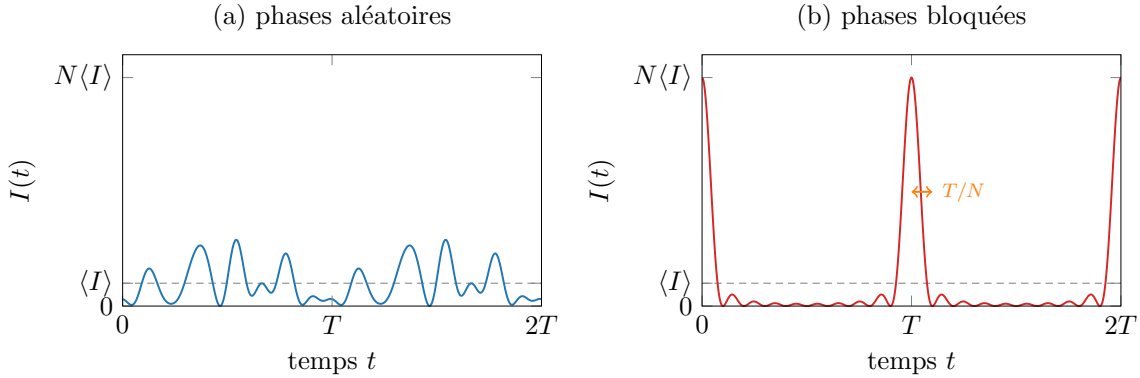


Figure 50 – Intensité d'un laser oscillant sur $N = 10$ modes de même amplitude, en fonction du temps. (a) Phases aléatoires : l'intensité fluctue fortement autour de sa valeur moyenne $\langle I\rangle$. (b) Phases synchronisées : le laser émet un train d'impulsions de durée $\sim T/N$ et d'intensité crête $N\langle I\rangle$, séparées de la durée T d'un aller-retour dans la cavité.

Modes synchronisés. Un comportement très différent se produit lorsque les modes sont synchronisés : toutes les phases φ_n sont égales (disons à 0). Alors

$$\begin{aligned} E(t) &= a\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n\omega_0+\delta)t} = a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta t}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\omega_0 t}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}} \\ &= a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\delta+\frac{N-1}{2}\omega_0\right)t}\,\frac{\sin(N\omega_0 t/2)}{\sin(\omega_0 t/2)}, \end{aligned} \tag{7.81}$$

d'où

$$I(t) = \frac{a^2}{2}\,\frac{\sin^2(N\omega_0 t/2)}{\sin^2(\omega_0 t/2)} = \frac{a^2}{2}\,\frac{\sin^2(N\pi t/T)}{\sin^2(\pi t/T)}. \tag{7.82}$$

Comme il se doit, c'est bien une fonction périodique de t, de période T. Sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$, l'intensité est maximale pour $t = 0$, avec

$$I_{\max} = N^2\,\frac{a^2}{2} = N\langle I\rangle. \tag{7.83}$$

L'intensité s'annule pour la première fois en $t = T/N$. Au voisinage de $t = \frac{3}{2}\,\frac{T}{N}$, elle présente un maximum local, où elle vaut

$$I \simeq \frac{a^2}{2}\,\frac{1}{\sin^2(3\pi/2N)} \simeq \frac{4}{9\pi^2}\,I_{\max} \ll I_{\max}. \tag{7.84}$$

On a donc affaire à des impulsions principales très intenses et brèves, de durée $\sim T/N$, séparées de la durée T d'un aller-retour dans la cavité (figure 50b). Physiquement, une seule impulsion circule dans la cavité, et une fraction en est extraite à chaque passage sur le miroir de sortie.

7.6.2 Réalisation d'un laser à impulsions

Pour avoir des impulsions dans le régime femtoseconde, on doit utiliser un laser pouvant émettre un très grand nombre de modes. L'exemple typique est le laser titane-saphir (Ti:saphir), dont le milieu amplificateur est un cristal de saphir dopé par des

ions titane. Sa bande de gain couvre les longueurs d'onde $700\,\text{nm} < \lambda < 1\,\mu\text{m}$, soit une largeur $\Delta\nu_{\text{gain}} \simeq 100\,\text{THz}$. Pour une cavité de longueur $L_0 = 1{,}5\,\text{m}$, l'intervalle spectral libre vaut $\nu_{\text{ISL}} = c/2L_0 = 100\,\text{MHz}$, d'où un nombre de modes

$$N = \frac{\Delta\nu_{\text{gain}}}{\nu_{\text{ISL}}} = 10^6. \tag{7.85}$$

La durée d'une impulsion sera alors

$$\frac{T}{N} = \frac{1}{N\nu_{\text{ISL}}} = 10\,\text{fs}. \tag{7.86}$$

Compensation de la dispersion. Un obstacle pratique est la dispersion dans le saphir : la vitesse de groupe dépend de la longueur d'onde, ce qui étale temporellement l'impulsion à chaque passage dans le cristal (de manière équivalente, les modes ne sont plus équidistants). On insère pour cela dans la cavité des éléments dispersifs, de manière à compenser la dispersion du cristal : typiquement une paire de prismes, dans lesquels les différentes longueurs d'onde parcourent des chemins différents. Un laser Ti:saphir typique, pompé par un laser continu vert, délivre ainsi à 800 nm des impulsions de 10 fs et de 2 nJ, avec un taux de répétition de 100 MHz.

Blocage des modes. Même lorsque la dispersion est compensée, le laser ne fonctionne pas spontanément en régime femtoseconde : il faut favoriser le régime où les phases des modes sont synchronisées, dit de blocage des modes (*mode locking*). Il existe pour cela deux techniques.

— *Lentille de Kerr et diaphragme.* L'indice du cristal dépend de l'intensité lumineuse, $n = n_0 + n_2 I$ (effet Kerr optique, que nous étudierons au chapitre 8). Le faisceau, plus intense au centre qu'au bord, voit une lentille convergente, de focale $f = f_0 - \alpha P$ d'autant plus courte que la puissance P est grande. Un diaphragme placé dans la cavité induit des pertes, sauf lorsque la puissance est très élevée et que le faisceau est focalisé dans son plan (figure 51). Le régime de pertes minimales, donc de gain net maximal, est ainsi le régime impulsionnel, de forte puissance crête !

— *Auto-injection des différents modes.* On place dans la cavité un modulateur de phase, piloté à la pulsation ω_0 égale à l'intervalle spectral libre (en pulsation). Un champ $E_{\text{in}} = \sum_n c_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n\omega_0+\delta)t}$ ressort du modulateur sous la forme $E_{\text{out}} = E_{\text{in}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\cos\omega_0 t}$. Pour ε petit,

$$E_{\text{out}} \simeq E_{\text{in}}\left(1 - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\right) = \sum_n c'_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n\omega_0+\delta)t}, \tag{7.87}$$

avec

$$c'_n = c_n - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2}\left(c_{n+1} + c_{n-1}\right). \tag{7.88}$$

Les modes $n+1$ et $n-1$ se couplent au mode n et produisent un asservissement de phase, de manière similaire à l'injection maître-esclave.

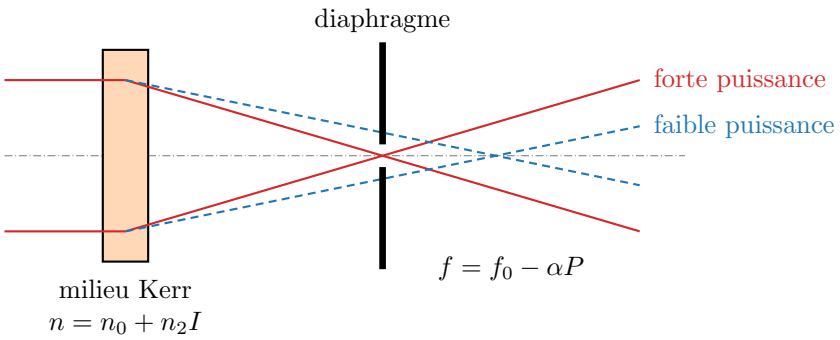


Figure 51 – Blocage des modes par lentille de Kerr. Le milieu Kerr se comporte comme une lentille convergente dont la focale diminue lorsque la puissance augmente. Un diaphragme est placé de sorte qu'à forte puissance (trait plein) le faisceau soit focalisé dans son plan et le traverse sans pertes, tandis qu'à faible puissance (tirets) le faisceau est en partie bloqué. Le fonctionnement impulsionnel, de forte puissance crête, subit donc moins de pertes que le fonctionnement continu.

7.6.3 Impulsions de puissance

Un laser femtoseconde standard émet une puissance moyenne de 1 W, soit, pour un taux de répétition de 100 MHz, une énergie de 10 nJ par impulsion. Pour une durée de 10 fs, cela correspond déjà à une puissance crête de l'ordre du mégawatt. On peut augmenter l'énergie par impulsion en envoyant la lumière dans un milieu amplificateur (sans cavité), typiquement un cristal dopé soumis à une lumière de pompage. Pour ne pas endommager l'amplificateur, on procède à un étirement temporel de l'impulsion avant l'amplificateur, puis à sa recompression après l'amplification [16].

7.6.4 Applications des lasers à impulsions

— *Découpe laser, applications biomédicales.* Avec des impulsions ultrabrèves, la matière est sublimée avant que la chaleur n'ait le temps de diffuser vers les zones voisines : la découpe est propre, sans zone affectée thermiquement, contrairement au cas d'un processus thermique (impulsions longues ou laser continu).

— *Spectroscopie femtoseconde.* Dans une expérience pompe-sonde, l'impulsion laser est séparée en deux (figure 52). Une première impulsion, la pompe, excite le système étudié ; une seconde impulsion, la sonde, retardée d'un temps τ réglable par une ligne à retard, mesure son état. On peut ainsi sonder la dynamique moléculaire (à l'échelle femtoseconde), voire électronique (à l'échelle attoseconde). Un exemple célèbre est le suivi en temps réel de la dissociation de la molécule NaI [17].

— *Plasmas relativistes, fusion thermonucléaire*, qui nécessitent des impulsions de très forte énergie.

— *Peignes de fréquence pour la métrologie de précision* : le spectre d'un laser à impulsions est un peigne de fréquences équidistantes, qui sert de « règle » pour mesurer des fréquences optiques.

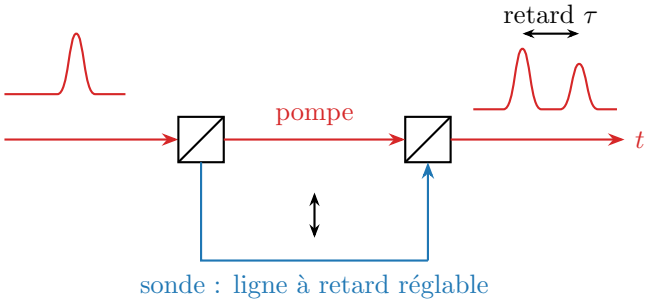


Figure 52 – Principe d'une expérience pompe-sonde : une impulsion est séparée en deux, et la seconde (la sonde) est retardée d'un temps τ réglable par rapport à la première (la pompe), à l'aide d'une ligne à retard.

8 Optique non linéaire

Les fortes intensités produites par les lasers, en particulier en régime impulsionnel, permettent d'observer la réponse non linéaire des matériaux à la lumière. Nous nous intéressons ici à deux types d'effets non linéaires : la conversion de fréquence (doublage de fréquence, oscillateur paramétrique optique), qui permet d'étendre considérablement la gamme des longueurs d'onde accessibles, ce qui est essentiel pour la spectroscopie ; et la modification de la propagation de la lumière par l'effet Kerr optique (autofocalisation, solitons). On pourra consulter la réf. [18] pour une présentation détaillée.

8.1 Milieux non linéaires

Au chapitre 6, nous avons écrit la polarisation du milieu sous la forme $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$, avec une susceptibilité qui dépend de l'intensité (éq. (6.64)),

$$\chi = -\frac{d^2 n_{\text{at}}}{\hbar \varepsilon_0} \frac{1}{\Delta + \mathrm{i}\Gamma/2} \frac{1}{1 + I/I_{\text{sat}}} \tag{8.1}$$

pour un milieu d'atomes à deux niveaux proche de résonance (où $I_{\text{sat}}(\Delta) \simeq I_{\text{sat}}$). Comme $I \propto |E|^2$, en développant le dernier facteur en puissances de I/I_{sat}, la polarisation fait apparaître des termes en E, $|E|^2 E$, $|E|^4 E$, etc. Ce modèle, qui suppose un milieu isotrope, n'autorise que des puissances impaires du champ. En toute généralité, on a

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j + \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k + \varepsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots, \tag{8.2}$$

avec sommation sur les indices répétés. La susceptibilité d'ordre deux $\chi^{(2)}_{ijk}$ est un tenseur de rang 3, et celle d'ordre trois un tenseur de rang 4.

Le tenseur $\chi^{(2)}$ s'annule pour un matériau possédant la symétrie d'inversion $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$. En effet, si l'on a $P_i = \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k$, alors par inversion, le champ et la polarisation changent de signe, et le tenseur reste identique ; on a donc

$$-P_i = \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} (-E_j)(-E_k) = P_i, \qquad \text{d'où} \qquad \chi^{(2)}_{ijk} = 0. \tag{8.3}$$

Les non-linéarités d'ordre deux n'interviennent donc que dans des milieux non centrosymétriques, comme certains cristaux : KDP (KH_2PO_4), KTP ($KTiOPO_4$), BBO (β-BaB_2O_4), niobate de lithium ($LiNbO_3$). Les non-linéarités d'ordre trois existent dans tous les milieux, y compris les liquides, les gaz et les verres.

8.2 Propagation lumineuse dans un milieu non linéaire

On rappelle l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu de polarisation $\mathbf{P}$,

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\partial_t^2\mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)} + \dots \tag{8.4}$$

On intègre la partie linéaire $\mathbf{P}^{(1)}$ dans l'indice optique $n(\omega)$, et on note P^{NL} la partie non linéaire. On considère des champs de polarisation fixée, ce qui permet de travailler avec des grandeurs scalaires. Dans tout ce chapitre, on décompose le champ réel et la polarisation en composantes de Fourier sous la forme

$$E(\mathbf{r},t) = \sum_\omega E(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \text{c.c.}, \qquad P^{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},t) = \sum_\omega P^{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \text{c.c.}, \tag{8.5}$$

sans facteur 1/2 (contrairement à la convention $E = \mathrm{Re}[\mathcal{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}]$ du chapitre 6, on a donc $\mathcal{E} = 2E(\mathbf{r},\omega)$), et on écrit la composante de pulsation ω du champ sous la forme

$$E(\mathbf{r},\omega) = A(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\omega)z}, \qquad k(\omega) = n(\omega)\frac{\omega}{c}, \tag{8.6}$$

où l'enveloppe A varie lentement. Avec cette convention, l'intensité d'une onde plane d'amplitude A dans un milieu d'indice n vaut $I = n\varepsilon_0 c\langle E^2\rangle = 2n\varepsilon_0 c|A|^2$. Comme au chapitre 5 (éq. (5.10)), en négligeant $\partial_z^2 A$ devant $k\,\partial_z A$, on obtient l'équation

$$2\mathrm{i}k(\omega)\,\partial_z A + \Delta_\perp A = -\frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}\,P^{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\omega)z}. \tag{8.7}$$

Dans un premier temps, on ne s'intéresse pas à la dépendance transverse : on considère des ondes planes. L'équation devient

$$\partial_z A = \frac{\mathrm{i}\omega}{2n(\omega)\varepsilon_0 c}\,P^{\mathrm{NL}}(z,\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\omega)z}. \tag{8.8}$$

8.3 Effets non linéaires du second ordre

On considère l'effet de deux champs de pulsations ω_1 et ω_2,

$$E = A_1(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 z - \omega_1 t)} + A_2(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2 z - \omega_2 t)} + \text{c.c.} \tag{8.9}$$

La polarisation non linéaire d'ordre deux $P^{(2)} = \varepsilon_0\chi^{(2)}E^2$ comprend des termes

- en $2\omega_1$ et $2\omega_2$: doublage de fréquence ;
- en $\omega_1 + \omega_2$: somme de fréquences ;
- en $\omega_1 - \omega_2$: différence de fréquences ;
- de fréquence nulle : redressement optique (polarisation statique du milieu).

Ces processus peuvent être vus comme des processus élémentaires à trois photons, qui conservent l'énergie ; par exemple, pour la somme de fréquences, deux photons de pulsations ω_1 et ω_2 sont convertis en un photon de pulsation $\omega_1 + \omega_2$.

8.3.1 Doublage de fréquence

Dans un premier temps, on se restreint au doublage de fréquence : un seul champ incident, à la pulsation ω_1. La polarisation non linéaire du second ordre s'écrit

$$P^{\mathrm{NL}}(z,t) = \varepsilon_0\chi^{(2)}\left(A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1z-\omega_1t)} + \text{c.c.}\right)^2 = \varepsilon_0\chi^{(2)}\left(A_1^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(k_1z-\omega_1t)} + \text{c.c.} + 2|A_1|^2\right). \tag{8.10}$$

Le premier terme oscille à la pulsation double $\omega_2 = 2\omega_1$ (doublage de fréquence) ; le dernier, de fréquence nulle, correspond au redressement optique. On s'intéresse à la génération d'un champ de pulsation $\omega_2 = 2\omega_1$, d'amplitude A_2 et de vecteur d'onde $k_2 = k(\omega_2)$. La composante de Fourier de la polarisation à ω_2 vaut $P^{\mathrm{NL}}(z,\omega_2) = \varepsilon_0\chi^{(2)}A_1^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k_1z}$; d'après l'éq. (8.8), l'amplitude A_2 évolue donc selon

$$\partial_z A_2 = \frac{\mathrm{i}\chi^{(2)}\omega_2^2}{2k_2c^2}\,A_1^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta kz}, \qquad \Delta k = 2k_1 - k_2. \tag{8.11}$$

Si l'on tient compte de la présence de A_2, la polarisation non linéaire devient

$$\begin{aligned} P^{\mathrm{NL}}(z,t) &= \varepsilon_0\chi^{(2)}\left(A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1z-\omega_1t)} + A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2z-\omega_2t)} + \text{c.c.}\right)^2 \\ &= \varepsilon_0\chi^{(2)}\left(A_1^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k_1z-\omega_2t)} + 2A_2A_1^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(k_2-k_1)z-\omega_1t]} + \dots\right). \end{aligned} \tag{8.12}$$

Le second terme, issu du produit croisé entre $A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2z-\omega_2t)}$ et le complexe conjugué de $A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1z-\omega_1t)}$, oscille à la pulsation $\omega_2 - \omega_1 = \omega_1$: le champ fondamental est également affecté par la non-linéarité, ce qui est obligatoire pour assurer la conservation de l'énergie. Il évolue selon

$$\partial_z A_1 = \frac{\mathrm{i}\chi^{(2)}\omega_1^2}{k_1c^2}\,A_2A_1^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta kz}. \tag{8.13}$$

Résolution dans le régime de faible déplétion. On suppose que le champ incident à ω_1 ne varie pas beaucoup en amplitude. L'éq. (8.11) s'intègre alors directement, avec A_1 constant. Si le milieu non linéaire est compris entre $z = 0$ et $z = L$, on obtient

$$A_2(L) = \frac{\chi^{(2)}\omega_2^2}{2k_2c^2}\,A_1^2\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta kL} - 1}{\Delta k}, \tag{8.14}$$

et donc l'intensité

$$I_2 \propto |A_2(L)|^2 = \left(\frac{\chi^{(2)}\omega_2^2}{2k_2c^2}\right)^2 |A_1|^4 \left(\frac{\sin(\Delta kL/2)}{\Delta k/2}\right)^2 = \left(\frac{\chi^{(2)}\omega_2^2}{2k_2c^2}\right)^2 |A_1|^4L^2\,\mathrm{sinc}^2\,\frac{\Delta kL}{2}, \tag{8.15}$$

où l'on a utilisé $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta kL} - 1| = 2|\sin(\Delta kL/2)|$ et $\mathrm{sinc}\,x = \sin x/x$.

— Dans le cas d'un accord de phase, $\Delta k = 0$: la polarisation non linéaire et le champ A_2 oscillent en phase au cours de la propagation. Alors

$$I_2 \propto \left(\frac{\chi^{(2)}\omega_2^2}{2k_2c^2}\right)^2 |A_1|^4L^2. \tag{8.16}$$

Le champ à ω_2 croît linéairement avec L, et l'intensité quadratiquement.

— Sans accord de phase, l'intensité harmonique oscille avec la longueur du cristal (figure 53b), entre 0 et une valeur maximale qui décroît comme $1/\Delta k^2$. Elle est maximale pour L égal à la longueur de cohérence $L_{\text{coh}} = \pi/|\Delta k|$, et s'annule pour $L = 2L_{\text{coh}}$. Cette annulation périodique est due à l'accumulation d'un déphasage entre A_2 et la polarisation non linéaire $\propto A_1^2$: au-delà de L_{coh}, la polarisation non linéaire se met à s'opposer à A_2, et le champ harmonique est reconverti en champ fondamental.

8.3.2 Comment réaliser l'accord de phase ?

Accord de phase par biréfringence. Dans la plupart des matériaux, la dispersion est normale : l'indice $n(\omega)$ croît avec la fréquence. L'accord de phase $k_2 = 2k_1$, qui s'écrit $n_2 = n_1$ (avec $n_j = n(\omega_j)$), n'est donc pas réalisé : on a $\Delta k = 2\omega_1(n_1 - n_2)/c < 0$. En pratique, on parvient à l'accord de phase en utilisant un cristal biréfringent. On considère un cristal uniaxe, caractérisé par un indice n_o (ordinaire) pour une polarisation perpendiculaire à l'axe optique $\mathbf{e}'$, et un indice $\bar{n}_e$ (extraordinaire) pour une polarisation parallèle à $\mathbf{e}'$. Pour une onde qui se propage selon une direction faisant un angle θ avec l'axe optique, et polarisée dans le plan formé par cette direction et l'axe optique, on montre que l'indice vaut

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\sin^2\theta}{\bar{n}_e^2} + \frac{\cos^2\theta}{n_o^2}. \tag{8.17}$$

On suppose que l'onde à ω_1 est ordinaire (polarisée perpendiculairement à l'axe optique), et que l'onde à ω_2 est extraordinaire. La condition d'accord de phase devient

$$n_e(2\omega_1, \theta) = n_o(\omega_1). \tag{8.18}$$

On choisit un matériau dont l'indice extraordinaire est inférieur à l'indice ordinaire (cristal uniaxe négatif, $\bar{n}_e < n_o$). Lorsque θ varie de 0 à 90°, l'indice $n_e(2\omega_1, \theta)$ décroît continûment de $n_o(2\omega_1) > n_o(\omega_1)$ à $\bar{n}_e(2\omega_1)$; si la biréfringence est suffisante pour que $\bar{n}_e(2\omega_1) \leq n_o(\omega_1)$, il existe donc un angle θ pour lequel on réalise l'accord de phase (figure 53a).

Un problème de cette méthode est que, pour $\theta \neq 0°$ et $\theta \neq 90°$, la direction de propagation de l'énergie de l'onde extraordinaire diffère de celle de l'onde ordinaire : les deux faisceaux se décalent progressivement l'un par rapport à l'autre, ce qui limite la longueur d'interaction utile. Heureusement, dans certains cristaux, l'accord de phase est possible à $\theta = 90°$ (accord de phase non critique), où ce décalage disparaît ; on l'ajuste alors grâce à la dépendance en température des indices (exemple : le niobate de lithium).

Quasi-accord de phase. Pour les cristaux de faible biréfringence, ou pour exploiter la composante diagonale $\chi^{(2)}_{zzz}$ du tenseur non linéaire (toutes les ondes polarisées selon l'axe z du cristal), qui est la plus importante mais ne permet pas d'utiliser la biréfringence, on utilise le quasi-accord de phase. Retourner le cristal (lui appliquer l'inversion $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$) change le signe de $\chi^{(2)}$: c'est le raisonnement fait plus haut, appliqué cette fois à un cristal non centrosymétrique, dont le tenseur n'est pas invariant par inversion. On inverse donc périodiquement l'orientation des domaines du cristal (on parle de cristal périodiquement polarisé, ou *periodically poled*), de manière à alterner le signe de $\chi^{(2)}$ avec une période Λ :

$$\chi^{(2)}(z) = \chi^{(2)}\ \text{sgn}\left[\sin\frac{2\pi z}{\Lambda}\right], \tag{8.19}$$

le premier domaine s'étendant de $z = 0$ à $z = \Lambda/2$. On développe $\chi^{(2)}(z)$ en série de Fourier :

$$\chi^{(2)}(z) = \chi^{(2)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_m z}, \qquad q_m = \frac{2\pi}{\Lambda} m, \qquad a_m = \frac{1-(-1)^m}{\mathrm{i}m\pi}, \tag{8.20}$$

pour $m \neq 0$, et $a_0 = 0$ (valeur moyenne nulle) ; seuls les m impairs contribuent, avec $a_m = -2\mathrm{i}/(m\pi)$. L'équation donnant l'évolution du champ harmonique devient

$$\partial_z A_2 = \frac{\mathrm{i}\omega_2 \chi^{(2)}}{2n_2 c} A_1^2 \sum_m a_m \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta k + q_m)z}. \tag{8.21}$$

On choisit Λ tel que $\Delta k + q_m = 0$ pour $m = +1$ ou $m = -1$ selon le signe de Δk (en dispersion normale, $\Delta k < 0$ et c'est la composante $m = 1$), soit

$$\Lambda = \frac{2\pi}{|\Delta k|} = 2L_{\mathrm{coh}}. \tag{8.22}$$

Le signe de $\chi^{(2)}$ est inversé à chaque longueur de cohérence, au moment où la polarisation non linéaire se mettrait à s'opposer au champ harmonique. Cela rétablit l'accord de phase pour la composante $m = \pm 1$, avec un coefficient non linéaire effectif

$$\chi_{\mathrm{eff}} = \chi^{(2)} |a_{\pm 1}| = \frac{2}{\pi} \chi^{(2)}. \tag{8.23}$$

Les autres composantes ne vérifient pas l'accord de phase, et leur effet devient négligeable pour des distances $L \gg \Lambda$ (figure 53b) : l'intensité harmonique est celle d'un cristal à accord de phase, réduite d'un facteur $(2/\pi)^2 \simeq 0{,}4$, ce qui est largement compensé par la valeur élevée de $\chi^{(2)}_{zzz}$. Valeur typique : pour le doublage de fréquence de $\lambda = 1064\,\mathrm{nm}$ dans le niobate de lithium périodiquement polarisé (PPLN), les indices extraordinaires valent $n_1 \simeq 2{,}156$ et $n_2 \simeq 2{,}234$, d'où $\Lambda = 2\pi/|\Delta k| = \lambda/[2(n_2 - n_1)] \simeq 6{,}8\,\mu\mathrm{m}$.

8.3.3 Au-delà de l'approximation de faible déplétion de la pompe

On se restreint ici à la situation d'accord de phase ($\Delta k = 0$). Les amplitudes évoluent selon les équations (8.11) et (8.13), que l'on réécrit, en utilisant $k_j = n_j \omega_j / c$,

$$\begin{cases} \partial_z A_2 = \dfrac{\mathrm{i}\chi^{(2)}\omega_2}{2n_2 c} A_1^2, \\ \partial_z A_1 = \dfrac{\mathrm{i}\chi^{(2)}\omega_1}{n_1 c} A_2 A_1^*. \end{cases} \tag{8.24}$$

L'intensité lumineuse de chaque composante s'écrit $I_j = 2n_j \varepsilon_0 c |A_j|^2$. On vérifie que l'intensité totale $I = I_1 + I_2$ est conservée :

$$\begin{aligned} \partial_z I \propto n_1 A_1^* \partial_z A_1 + n_2 A_2^* \partial_z A_2 + \mathrm{c.c.} &= \frac{\mathrm{i}\chi^{(2)}}{c} \left(\omega_1 A_2 A_1^{*2} + \frac{\omega_2}{2} A_2^* A_1^2 \right) + \mathrm{c.c.} \\ &= \frac{\mathrm{i}\chi^{(2)}\omega_1}{c} \left(A_2 A_1^{*2} + \mathrm{c.c.} \right) + \mathrm{c.c.} = 0, \end{aligned} \tag{8.25}$$

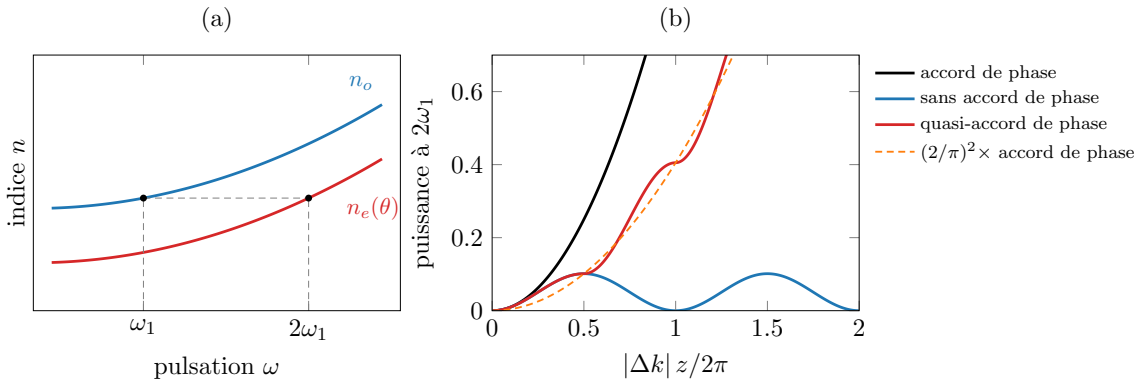


Figure 53 – (a) Accord de phase par biréfringence : en dispersion normale, les indices croissent avec la fréquence, mais on peut choisir l'angle θ pour que l'indice extraordinaire à $2\omega_1$ soit égal à l'indice ordinaire à ω_1. (b) Puissance du champ harmonique (unités arbitraires) en fonction de la distance de propagation z, dans le régime de faible déplétion : avec accord de phase, sans accord de phase (maximum en $z = L_{\text{coh}}$, soit $|\Delta k|z/2\pi = 1/2$), et avec quasi-accord de phase ($\chi^{(2)}(z) \propto \text{sgn}[\sin(2\pi z/\Lambda)]$, avec $\Lambda = 2\pi/|\Delta k|$) : il suit la courbe sans accord de phase jusqu'à $z = L_{\text{coh}} = \Lambda/2$, puis croît à chaque inversion du signe de $\chi^{(2)}$, et suit en moyenne la courbe d'accord de phase réduite d'un facteur $(2/\pi)^2$.

car $A_2 A_1^{*2} + \text{c.c.}$ est réel (on a utilisé $\omega_2 = 2\omega_1$). On pose alors

$$A_1 = \sqrt{\frac{I}{2n_1\varepsilon_0 c}}\, u_1, \qquad A_2 = \mathrm{i}\sqrt{\frac{I}{2n_2\varepsilon_0 c}}\, u_2, \tag{8.26}$$

de sorte que $u_j^2 = I_j/I$ lorsque u_j est réel ; le facteur i dans A_2 correspond au déphasage de $\pi/2$ entre le champ harmonique et la polarisation non linéaire qui lui donne naissance. Les équations de propagation deviennent

$$\partial_z u_2 = \frac{u_1^2}{\ell}, \qquad \partial_z u_1 = -\frac{u_1 u_2}{\ell}, \qquad \text{où} \qquad \ell = \frac{c}{\chi^{(2)}\omega_1}\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 c\, n_1^2 n_2}{I}}. \tag{8.27}$$

On pose $\zeta = z/\ell$, si bien que le système devient

$$\begin{cases} \partial_\zeta u_1 = -u_1 u_2, \\ \partial_\zeta u_2 = u_1^2. \end{cases} \tag{8.28}$$

Si u_1 et u_2 sont réels en $z = 0$, les solutions restent réelles. On vérifie la conservation de l'énergie, $\partial_\zeta(u_1^2 + u_2^2) = -2u_1^2 u_2 + 2u_2 u_1^2 = 0$. On a donc $u_1^2 + u_2^2 = 1$, d'où

$$\partial_\zeta u_2 = 1 - u_2^2, \qquad \text{soit} \qquad u_2 = \tanh(\zeta - \zeta_0). \tag{8.29}$$

En $z = 0$, on suppose $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, soit $\zeta_0 = 0$. D'où

$$u_2(\zeta) = \tanh\zeta, \qquad u_1(\zeta) = \sqrt{1 - \tanh^2\zeta} = \frac{1}{\cosh\zeta}. \tag{8.30}$$

Toute l'intensité est progressivement convertie à la fréquence double (figure 54). Pour $z \ll \ell$, on retrouve $u_2^2 \simeq (z/\ell)^2$, c'est-à-dire la croissance quadratique du régime de faible

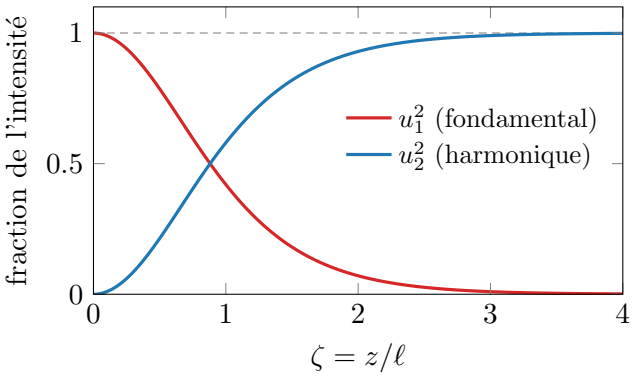


Figure 54 – Doublage de fréquence avec accord de phase, au-delà de l'approximation de faible déplétion : fraction de l'intensité dans le champ fondamental et dans le champ harmonique en fonction de la distance de propagation.

déplétion ; comme $1/\ell^2 \propto I$, l'intensité harmonique $I_2 \simeq I\, z^2/\ell^2$ croît alors comme le carré de l'intensité incidente. L'efficacité de conversion d'un cristal de longueur L vaut $\eta = I_2/I = \tanh^2(L/\ell)$.

Valeurs typiques. Pour une puissance $P_1 = 1\,\mathrm{W}$ en régime continu et un cristal de longueur $L = 1\,\mathrm{cm}$, le col optimal du faisceau focalisé dans le cristal est de l'ordre de $20\,\mu\mathrm{m}$ (longueur de Rayleigh de l'ordre de la longueur du cristal), soit une intensité $I \sim 2P_1/\pi w_0^2 \sim 10^5\,\mathrm{W/cm^2}$. Pour un coefficient $\chi^{(2)}$ de quelques pm/V, la longueur caractéristique ℓ vaut alors une dizaine de centimètres, et l'efficacité de conversion $\eta \simeq (L/\ell)^2$ n'est que de l'ordre du pourcent. Elle peut être améliorée :

— en utilisant des lasers impulsionnels, dont la très forte intensité crête donne une efficacité élevée (souvent supérieure à 50 %) ;
— en plaçant le cristal dans une cavité optique résonnante pour le champ fondamental, qui augmente l'intensité dans le cristal d'un facteur de l'ordre de la finesse.

Le laser Nd:YAG à 1064 nm, doublé, triplé (par somme de fréquences entre le fondamental et l'harmonique 2) ou quadruplé, fournit ainsi des impulsions intenses à 532, 355 et 266 nm. Le laser vert à 532 nm utilisé pour pomper le Ti:saphir est souvent un laser Nd:YVO_4 doublé en fréquence.

8.3.4 Oscillateur paramétrique optique

On considère maintenant le processus inverse de la somme de fréquences. On note
— ω_1 : le signal à amplifier ;
— ω_3 : le faisceau de pompage, intense ;
— $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$: le faisceau complémentaire (*idler*).

Un photon de pompe se scinde en un photon signal et un photon complémentaire. Comme pour le doublage, on obtient des équations couplées pour les amplitudes : la composante de la polarisation non linéaire à $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$ provient du produit croisé $2\varepsilon_0\chi^{(2)}A_3A_2^*$, et de même à ω_2. En supposant l'accord de phase réalisé ($k_3 = k_1 + k_2$) et le faisceau de

pompe non déplété (A_3 constant), l'éq. (8.8) donne

$$\partial_z A_1 = \mathrm{i}\kappa_1 A_3 A_2^*, \qquad \partial_z A_2 = \mathrm{i}\kappa_2 A_3 A_1^*, \qquad \kappa_j = \frac{\chi^{(2)}\omega_j}{n_j c}. \tag{8.31}$$

On en déduit $\partial_z^2 A_1 = \mathrm{i}\kappa_1 A_3\, \partial_z A_2^* = \kappa_1\kappa_2 |A_3|^2 A_1$. Pour un champ complémentaire initialement nul ($\partial_z A_1 = 0$ en $z = 0$), on trouve

$$A_1(z) = A_1(0)\cosh gz, \qquad A_2(z) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\,\frac{A_3}{|A_3|}\,A_1^*(0)\sinh gz, \qquad g = \sqrt{\kappa_1\kappa_2}\,|A_3|. \tag{8.32}$$

Le signal est amplifié exponentiellement, en même temps qu'un champ complémentaire est créé : c'est l'amplification paramétrique optique. Contrairement à l'amplification dans un milieu à inversion de population, aucune énergie n'est stockée dans le milieu, qui reste transparent.

En plaçant le cristal non linéaire dans une cavité optique pompée à ω_3, on réalise un oscillateur paramétrique optique (OPO). Comme pour un laser, l'oscillation démarre lorsque le gain paramétrique, qui croît avec l'intensité de pompe, compense les pertes de la cavité ; elle démarre à partir du bruit (fluorescence paramétrique), sans signal incident. Les pulsations ω_1 et ω_2 sont choisies toutes deux résonnantes par ajustement de la cavité, et satisfont la condition d'accord de phase : on obtient une source accordable en ajustant la condition d'accord de phase (angle ou température du cristal).

Seuil d'oscillation. Pour des amplitudes initiales quelconques, la solution des équations couplées s'écrit $A_1(L) = A_1\cosh gL + \mathrm{i}\sqrt{\kappa_1/\kappa_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_3} A_2^* \sinh gL$ (et de même en échangeant 1 et 2), où φ_3 est la phase de la pompe. On note r_j le facteur d'atténuation de l'amplitude A_j sur un tour de cavité, en dehors du cristal. En écrivant qu'après un tour les amplitudes A_1 et A_2^* se reproduisent, on obtient la condition de seuil

$$(1 - r_1\cosh gL)(1 - r_2\cosh gL) = r_1 r_2 \sinh^2 gL. \tag{8.33}$$

Pour des pertes faibles en intensité $p_j = 1 - r_j^2 \ll 1$, elle se simplifie en $g_{\mathrm{th}}L \simeq \sqrt{p_1 p_2}/2$: l'intensité de pompe au seuil, proportionnelle à g^2, est proportionnelle au produit des pertes des deux ondes. Si seul le signal est résonnant ($r_2 = 0$), la condition devient $\cosh g_{\mathrm{th}}L = 1/r_1$, soit $g_{\mathrm{th}}L \simeq \sqrt{p_1}$, et le seuil est beaucoup plus élevé.

Les OPO constituent des sources accordables sur de très larges gammes de longueurs d'onde. Par exemple, un OPO à cristal de BBO pompé par un laser Nd:YAG triplé à 355 nm fournit des impulsions nanoseconde accordables de 410 nm à plus de 2 μm. Les amplificateurs paramétriques pompés par des lasers Ti:saphir amplifiés fournissent de même des impulsions femtoseconde accordables du visible à l'infrarouge moyen. Ces sources ont largement remplacé les lasers à colorant en spectroscopie.

8.4 Effet Kerr optique

8.4.1 Autofocalisation

L'effet Kerr est un processus non linéaire du troisième ordre, qui se traduit par un indice de réfraction de la forme

$$n = n_0 + \frac{n_2}{2}\langle E^2\rangle, \tag{8.34}$$

où $\langle E^2 \rangle$ est la moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$. Pour un champ monochromatique $E(t) = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \text{c.c.}$, on a $\langle E^2 \rangle = 2|A|^2$, soit $n = n_0 + n_2|A|^2$. Dans cette section, n_2 désigne le coefficient Kerr, à ne pas confondre avec l'indice $n(\omega_2)$ de la section précédente. On utilise souvent le coefficient $n_2^{(I)}$ rapporté à l'intensité, défini par $n = n_0 + n_2^{(I)} I$; comme $I = 2n_0\varepsilon_0 c|A|^2$, on a $n_2^{(I)} = n_2/(2n_0\varepsilon_0 c)$. Cet effet provient de la susceptibilité d'ordre trois, et existe donc dans tous les milieux ; dans l'air, par exemple, $n_2^{(I)} \sim 3 \times 10^{-19}\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{W}$ dans le proche infrarouge.

Nous considérons ici l'influence de cet effet Kerr sur la propagation du mode transverse d'un faisceau lumineux de profil gaussien, qui entre dans un milieu non linéaire. L'indice de réfraction présente lui-même un profil gaussien, maximal au centre du faisceau, où il vaut $n_0 + n_2|A_{\max}|^2$ (pour $n_2 > 0$). Le milieu agit alors comme une lentille convergente. Cette autofocalisation s'oppose à la diffraction, qui induit un étalement du profil transverse. C'est ce mécanisme qui est utilisé pour le blocage de modes par lentille de Kerr dans les lasers Ti:saphir (chapitre 7).

8.4.2 Équation de Schrödinger non linéaire

La propagation est décrite par l'équation de l'enveloppe lentement variable. On écrit l'amplitude complexe du champ $E(\mathbf{r}, \omega) = A(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 z}$, où $k_0 = n_0\omega/c$, avec $E(\mathbf{r}, \omega)$ solution de l'équation de Helmholtz dans un milieu d'indice $n_0 + n_2|E|^2$,

$$\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2}\left(n_0 + n_2|E|^2\right)^2 E = 0. \tag{8.35}$$

En développant $\frac{\omega^2}{c^2}(n_0 + n_2|E|^2)^2 \simeq k_0^2(1 + \alpha'|E|^2)$, avec $\alpha' = 2n_2/n_0$ (car $n_2|E|^2 \ll n_0$), et en négligeant $\partial_z^2 A$ comme précédemment, on obtient

$$2\mathrm{i}k_0\,\partial_z A + \Delta_\perp A + \alpha|A|^2 A = 0, \qquad \alpha = k_0^2\alpha' = \frac{2k_0^2 n_2}{n_0}. \tag{8.36}$$

Cette équation n'est plus linéaire, et le comportement du faisceau dépend de sa puissance totale, que l'on définit ici, à un facteur $2n_0\varepsilon_0 c$ près, par

$$P = \int \mathrm{d}^2\mathbf{r}\,|A|^2(\mathbf{r}, z), \tag{8.37}$$

et qui est indépendante de z (le milieu étant transparent). On introduit le champ normalisé $\Psi = A/\sqrt{P}$, tel que $\int \mathrm{d}^2\mathbf{r}\,|\Psi|^2 = 1$, qui obéit à

$$2\mathrm{i}k_0\,\partial_z \Psi + \Delta_\perp \Psi + \alpha P|\Psi|^2\Psi = 0. \tag{8.38}$$

C'est une équation de Schrödinger non linéaire à deux dimensions, la coordonnée z jouant le rôle du temps, et le terme non linéaire celui d'une interaction attractive.

8.4.3 Évolution de la taille du faisceau

On définit la taille σ du faisceau par

$$\sigma^2(z) = \int \mathrm{d}^2\mathbf{r}\,|\Psi|^2(\mathbf{r}, z)\,r^2. \tag{8.39}$$

Son évolution est régie par un théorème du viriel :

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^2}{\mathrm{d}z^2} = \frac{2}{k_0^2}\,\mathcal{E}, \qquad \mathcal{E} = \int \mathrm{d}^2\mathbf{r}\left[|\boldsymbol{\nabla}_\perp\Psi|^2 - \frac{\alpha P}{2}|\Psi|^4\right], \tag{8.40}$$

où l'« énergie » $\mathcal{E}$ est une quantité conservée au cours de la propagation. Ce résultat s'obtient en dérivant deux fois σ^2 par rapport à z et en utilisant l'éq. (8.38) pour éliminer les dérivées de Ψ, comme pour le théorème d'Ehrenfest en mécanique quantique ; il est propre à la dimension deux et à une non-linéarité cubique, pour lesquelles les deux termes de $\mathcal{E}$ ont la même dépendance en la taille du faisceau. L'énergie comprend deux termes : un terme d'énergie cinétique, qui décrit la diffraction, et un terme d'attraction non linéaire. L'évolution de la taille résulte d'une compétition entre diffraction et non-linéarité. Comme $\mathrm{d}^2\sigma^2/\mathrm{d}z^2$ est constant, et pour un faisceau de front d'onde plan en $z = 0$ (soit $\mathrm{d}\sigma^2/\mathrm{d}z = 0$ en $z = 0$), on obtient

$$\sigma^2(z) = \sigma^2(0) + \frac{\mathcal{E}}{k_0^2}\,z^2. \tag{8.41}$$

En l'absence de non-linéarité ($\alpha = 0$) et pour un faisceau gaussien de col w_0, on a $\sigma^2(0) = w_0^2/2$ et $\mathcal{E} = 2/w_0^2$, et l'on retrouve l'évolution $w^2(z) = w_0^2(1 + z^2/z_\mathrm{R}^2)$ du chapitre 5, avec $z_\mathrm{R} = k_0 w_0^2/2$. Si $\mathcal{E} < 0$, σ^2 s'annule à la distance finie $z = k_0\sigma(0)/\sqrt{|\mathcal{E}|}$: le faisceau lumineux s'effondre sur lui-même (figure 55a). Pour $\mathcal{E} = 0$, on peut espérer avoir une solution indépendante de z.

8.4.4 Soliton de Townes

On cherche une solution stationnaire de l'éq. (8.38), de la forme

$$\Psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Kz}R(r), \tag{8.42}$$

avec R réelle positive. Elle vérifie

$$-2k_0K\,R = -\Delta_\perp R - \alpha P\,R^3. \tag{8.43}$$

Supposons que l'on ait une telle solution. Alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}K'z}\lambda^{-1}R(r/\lambda)$ est également solution, avec $K' = K/\lambda^2$, pour la même valeur de P (le laplacien et le terme non linéaire sont tous deux multipliés par λ^{-3}), et elle a la même norme. On a donc une famille de solutions invariante par homothétie, qui ont toutes la même puissance. Cette puissance est fixée : en écrivant $R(r) = a\,Q(r/b)$, où Q est l'unique solution positive et décroissante de $\Delta_\perp Q - Q + Q^3 = 0$, on trouve $b^2 = 1/2k_0K$ et $\alpha P a^2 b^2 = 1$, et la normalisation $\int \mathrm{d}^2\mathbf{r}\,R^2 = a^2b^2\int \mathrm{d}^2\mathbf{r}\,Q^2 = 1$ impose

$$\alpha P = \int \mathrm{d}^2\mathbf{r}\,Q^2 \simeq 11{,}70. \tag{8.44}$$

Les solutions stationnaires n'existent donc que pour une valeur particulière $P = P_\mathrm{cr}$ de la puissance. Le profil $R(r)$, appelé soliton de Townes, est maximal au centre et décroît exponentiellement à grande distance. Comme σ^2 est indépendant de z, on a $\mathcal{E} = 0$ pour ce soliton, d'après le théorème du viriel. En revenant à la puissance physique $2n_0\varepsilon_0 cP$ et au coefficient $n_2^{(I)}$, la puissance critique vaut

$$P_\mathrm{cr} = \frac{11{,}70}{8\pi^2}\,\frac{\lambda_0^2}{n_0 n_2^{(I)}} \simeq 1{,}86\,\frac{\lambda_0^2}{4\pi n_0 n_2^{(I)}}, \tag{8.45}$$

où $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ est la longueur d'onde dans le vide (à ne pas confondre avec le facteur d'échelle λ ci-dessus), soit environ 3 GW dans l'air pour un laser Ti:saphir à 800 nm.

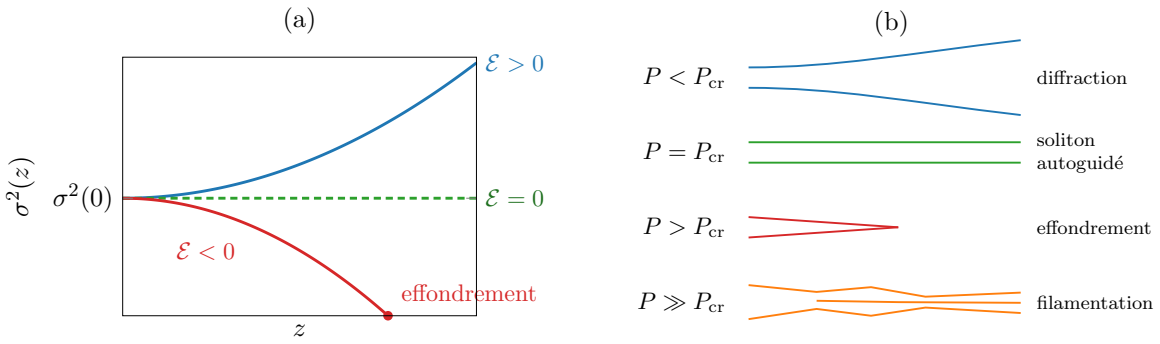


Figure 55 – (a) Évolution de la taille d'un faisceau dans un milieu Kerr, selon le signe de l'énergie conservée $\mathcal{E}$. (b) Régimes de propagation en fonction de la puissance du faisceau, comparée à la puissance critique P_{cr}.

Bilan. Selon la puissance du faisceau, on observe différents régimes (figure 55b) :
- $P < P_{\mathrm{cr}}$: la diffraction l'emporte, et le faisceau s'élargit ;
- $P = P_{\mathrm{cr}}$: possibilité d'une solution autoguidée, qui se propage sans se déformer (mais qui est instable : la moindre perturbation la fait diffracter ou s'effondrer) ;
- $P > P_{\mathrm{cr}}$: le faisceau s'effondre sur lui-même (en pratique, l'effondrement est arrêté par d'autres effets, comme l'ionisation du milieu) ;
- $P \gg P_{\mathrm{cr}}$: le faisceau se fragmente en de multiples filaments.

Ce comportement est pertinent pour la propagation des lasers impulsionnels de forte puissance crête : l'autofocalisation peut endommager les optiques, et la filamentation dans l'air est utilisée par exemple pour la détection à distance de molécules.

Références

[1] H. B. G. Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, 51:793, 1948.

[2] M. J. Sparnaay. Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, 24:751, 1958.

[3] U. Mohideen and A. Roy. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μm. *Phys. Rev. Lett.*, 81:4549, 1998.

[4] R. Onofrio. Casimir forces and non-newtonian gravitation. *New J. Phys.*, 8:237, 2006.

[5] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche. Quantum rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1800, 1996.

[6] R. G. Hulet, E. S. Hilfer, and D. Kleppner. Inhibited spontaneous emission by a rydberg atom. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2137, 1985.

[7] W. Jhe, A. Anderson, E. A. Hinds, D. Meschede, L. Moi, and S. Haroche. Suppression of spontaneous decay at optical frequencies: Test of vacuum-field anisotropy in confined space. *Phys. Rev. Lett.*, 58:666, 1987.

[8] P. Goy, J. M. Raimond, M. Gross, and S. Haroche. Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.*, 50:1903, 1983.

[9] D. J. Heinzen, J. J. Childs, J. E. Thomas, and M. S. Feld. Enhanced and inhibited visible spontaneous emission by atoms in a confocal resonator. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1320, 1987.

[10] E. J. Post. Sagnac effect. *Rev. Mod. Phys.*, 39:475–493, 1967.

[11] D. Hunger, T. Steinmetz, Y. Colombe, C. Deutsch, T. W. Hänsch, and J. Reichel. A fiber Fabry–Perot cavity with high finesse. *New J. Phys.*, 12:065038, 2010.

[12] Kerry J. Vahala. Optical microcavities. *Nature*, 424:839–846, 2003.

[13] S. M. Popoff, G. Lerosey, R. Carminati, M. Fink, A. C. Boccara, and S. Gigan. Measuring the transmission matrix in optics: An approach to the study and control of light propagation in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 104:100601, 2010.

[14] T. H. Maiman. Stimulated optical radiation in ruby. *Nature*, 187:493–494, 1960.

[15] A. L. Schawlow and C. H. Townes. Infrared and optical masers. *Phys. Rev.*, 112:1940–1949, 1958.

[16] Donna Strickland and Gerard Mourou. Compression of amplified chirped optical pulses. *Opt. Commun.*, 56:219–221, 1985.

[17] A. Mokhtari, P. Cong, J. L. Herek, and A. H. Zewail. Direct femtosecond mapping of trajectories in a chemical reaction. *Nature*, 348:225–227, 1990.

[18] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, Burlington, 3 edition, 2008.