Somme de fréquence non linéaire

Examen du cours d'optique
Formation prédoctorale de physique de l'ENS - L3

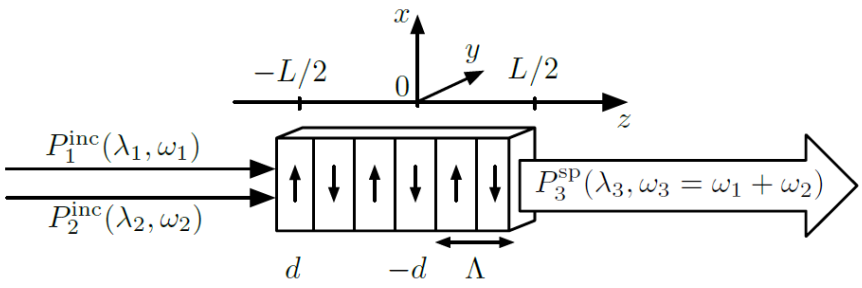
13 juin 2022
Durée de l'examen : 3 heures

Les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées. L'utilisation de calculatrices est interdite.

On s'intéresse à la génération de lumière cohérente à la longueur d'onde $\lambda_3 = 589\,\mathrm{nm}$, qui correspond à la résonance atomique du Sodium. Nous étudions un dispositif basé sur un processus non linéaire de somme de fréquence : deux lasers de longueur d'onde $\lambda_1 = 1064\,\mathrm{nm}$ et $\lambda_2 = 1319\,\mathrm{nm}$ sont superposés dans un cristal non linéaire, induisant de la lumière de longueur d'onde λ_3, cette longueur d'onde vérifiant

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2,$$

où $\omega_i = 2\pi c/\lambda_i$. Ce dispositif est schématisé ci-dessous.



Les faisceaux laser incidents ont pour puissance P_1^{inc} et P_2^{inc}, et la puissance produite à la fréquence somme ω_3 est notée P_3^{sp}. Les faisceaux se propagent selon l'axe z.

Le cristal non linéaire est caractérisé par un coefficient non linéaire de norme d (nous verrons plus loin sa définition précise). La condition d'accord de phase est obtenue par empilement de couches d'épaisseur $\Lambda/2$, telles que le coefficient non linéaire alterne entre les valeurs d et $-d$. La longueur totale du cristal est notée L.

On s'intéresse à trouver la configuration conduisant au maximum de puissance P_3^{sp}.

On décrit les faisceaux laser à l'intérieur du cristal comme des ondes planes d'enveloppe lentement variable

$$E_i(x, y, z, t) = \mathcal{A}_i(x, y, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_i z - \omega_i t)}.$$

Q1. On suppose dans un premier temps que le coefficient non linéaire d est nul. Montrer que les enveloppes satisfont aux équations approchées

$$(\Delta_\perp + 2\mathrm{i}k_i\partial_z)\mathcal{A}_i = 0,$$

et donner la relation entre le vecteur d'onde k_i et la fréquence ω_i. On introduira les indices de réfraction n_i pour les fréquences ω_i. L'opérateur $\Delta_\perp$ est défini par $\Delta_\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Q2. On suppose tout d'abord que le coefficient non linéaire vaut d sur toute la longueur du cristal. On admet que l'effet du processus non linéaire est décrit par le système d'équations

$$\begin{aligned}
(\Delta_\perp + 2\mathrm{i}k_1\partial_z)\mathcal{A}_1 &= \frac{2\omega_1^2 d}{c^2}\mathcal{A}_2^*\mathcal{A}_3 e^{\mathrm{i}\Delta k z},\\
(\Delta_\perp + 2\mathrm{i}k_2\partial_z)\mathcal{A}_2 &= \frac{2\omega_2^2 d}{c^2}\mathcal{A}_1^*\mathcal{A}_3 e^{\mathrm{i}\Delta k z},\\
(\Delta_\perp + 2\mathrm{i}k_3\partial_z)\mathcal{A}_3 &= \frac{2\omega_3^2 d}{c^2}\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 e^{-\mathrm{i}\Delta k z},
\end{aligned}$$

avec

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2.$$

Expliquer le sens physique des trois membres de droite dans ce système d'équations.

1 Puissance produite dans le cas de faisceaux collimatés

On considère dans un premier temps que le profil d'intensité du faisceau laser est gaussien, avec un waist w indépendant de z. On pose

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_i &= \sqrt{\frac{2\hbar\omega_i}{c\epsilon_0 n_i}} f(x,y) a_i(z),\\
f(x,y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2}\right).
\end{aligned}$$

Q3. A quelle condition peut-on négliger la divergence du faisceau dans ce problème ?

Q4. La puissance $P_i(z)$ du faisceau i au point z dans le cristal est égal à la moyenne temporelle du flux du vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu_0$ à travers le plan de côte z. Calculer l'expression de $P_i(z)$ en fonction de $a_i(z)$.

Q5. Montrer que $|a_i(z)|^2$ est égal au nombre de photons de fréquence ω_i traversant le plan z par unité de temps.

Q6. Montrer que l'amplitude a_3 évolue selon

$$\partial_z a_3 = -\mathrm{i}\gamma a_1 a_2 e^{-\mathrm{i}\Delta k z}\int f^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

et donner l'expression de γ.

Q7. Calculer la valeur de l'intégrale $\int f^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

On suppose dans la suite que les faisceaux de fréquences ω_1 et ω_2 sont très puissants, de sorte que a_1 et a_2 peuvent être considérés comme constants.

Q8. Résoudre l'équation différentielle est montrer que la puissance à la fréquence somme a pour expression, en sortie du cristal,

$$P_3^{\mathrm{sp}} = \alpha P_1^{\mathrm{inc}} P_2^{\mathrm{inc}} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right),$$

où $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Donner l'expression de α.

Q9. Dans le cas d'un accord de phase $\Delta k = 0$, comment varie P_3^{sp} avec la longueur L du cristal ?

Q10. Montrer que la puissance de sortie P_3^{sp} varie avec le waist des lasers comme $1/w^2$. Interpréter physiquement cette dépendance.

2 Cristaux périodiquement polarisés et accord de phase

On considère maintenant le cas $\Delta k \neq 0$.

Q11. Tracer $P_3(z)$ dans la cas étudié précédemment.

On suppose maintenant que le coefficient non linéaire change de signe comme indiqué sur la figure en page 1. On décompose le coefficient linéaire en série de Fourier, comme

$$d(z) = d \sum_n c_n e^{\mathrm{i}q_n z}.$$

Q12. Quelles sont les valeurs possibles de q_n ?

Q13. Montrer que $c_0 = 0$ et calculer la valeur de c_1.

On se contente de considérer l'effet du premier terme de la série de Fourier. On suppose donc $d(z) = d\, c_1 e^{iq_1 z}$.

Q14. Montrer que la puissance en sortie de cristal est donnée par

$$P_3^{\mathrm{sp}} = \eta\, \alpha\, P_1^{\mathrm{inc}} P_2^{\mathrm{inc}} \mathrm{sinc}^2\left[\left(\Delta k - \frac{2\pi}{\Lambda}\right)\frac{L}{2}\right],$$

et donner la valeur de η.

Q15. Comment choisir la période Λ pour maximiser la puissance P_3^{sp} ?

3 Faisceaux gaussiens focalisés : théorie de Boyd-Kleinman

Nous avons vu dans la question (**??**) que l'intensité de sortie P_3^{sp} augmente lorsqu'on diminue le waist w des lasers.

Q16. Expliquer pourquoi l'étude de la maximisation de l'intensité de sortie P_3^{sp} requiert de considérer des faisceaux non collimatés.

Nous considérons dans cette partie des faisceaux gaussiens, focalisés au centre $z = 0$ du cristal. Le waist du faisceau de fréquence ω_i est noté w_i. L'amplitude $\mathcal{A}_i$ s'écrit alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_i &= \sqrt{\frac{2\hbar\omega_i}{c\epsilon_0 n_i}} f_i(x,y,z) a_i(z),\\ f_i(x,y,z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi w_i^2}} \frac{1}{1+\mathrm{i}z/z_{Ri}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w_i^2(1+\mathrm{i}z/z_{Ri})}\right),\\ z_{Ri} &= \frac{\pi w_i^2 n_i}{\lambda_i}.\end{aligned}$$

Q17. Rappeler comment déduire de ces amplitudes complexes l'évolution du waist $w(z)$ avec z.

Q18. Montrer que la phase du faisceau sur l'axe z ne se résume pas simplement à kz. Donner l'expression de cette phase additionnelle (phase de Gouy).

Q19. Nous admettons qu'il est optimal de se placer dans le cas de longueurs de Rayleigh égales :

$$z_{R1} = z_{R2} = z_{R3} \equiv z_R.$$

Calculer les valeurs des waists w_i en fonction de la longueur de Rayleigh z_R.

On suppose à nouveau que les deux lasers pompe sont faiblement consommés (a_1, a_2 constants). On suppose dans un premier temps que $d(z)$ vaut d sur toute la longueur du cristal.

Q20. Montrer que l'évolution de l'amplitude a_3 est régie par l'équation

$$f_3 \partial_z a_3 = -\mathrm{i}\gamma f_1 f_2 e^{-\mathrm{i}\Delta k z} a_1 a_2.$$

Q21. Montrer que l'évolution de l'amplitude a_3 s'écrit plus simplement sous la forme

$$\begin{aligned}\partial_z a_3 &= -\mathrm{i}\gamma \mathcal{I}(z) e^{-i\Delta k z} a_1 a_2,\\ \mathcal{I}(z) &= \int f_1 f_2 f_3 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

On admet l'expression suivante de l'intégrale $\mathcal{I}(z)$:

$$\mathcal{I}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{w_{\text{eff}}^2}{w_1 w_2 w_3} \frac{1}{(1+\mathrm{i}z/z_R)(1+\mathrm{i}\epsilon z/z_R)},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}w_{\text{eff}} &= \frac{w_1 w_2 w_3}{(w_1^2 w_2^2 + w_2^2 w_3^2 + w_3^2 w_1^2)^{1/2}},\\ \epsilon &= \frac{\Delta k w_{\text{eff}}^2}{2 z_R}.\end{aligned}$$

Q22. Expliquer pourquoi on s'attend à ce que la valeur du paramètre ϵ soit petite. On prendra dans la suite $\epsilon = 0$.

Q23. Montrer que la puissance de l'onde 3 à la sortie du laser vaut

$$P_3^{\text{sp}} = \frac{2\gamma^2}{\pi\hbar} \frac{\omega_3}{\omega_1\omega_2} \frac{w_{\text{eff}}^4}{w_1^2 w_2^2 w_3^2} \left| \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{-\mathrm{i}\Delta k z} \mathrm{d}z}{1+\mathrm{i}z/z_R} \right|^2 P_1^{\text{inc}} P_2^{\text{inc}}.$$

On admet dans la suite que pour un cristal polarisé périodiquement cette relation reste vraie, moyennant le remplacement de Δk par $\Delta k - 2\pi/\Lambda$, ainsi qu'une renormalisation du coefficient non linéaire par le coefficient η introduit en Q14.

Q24. Dans l'optique d'une optimisation de P_3^{sp}, expliquer pourquoi il s'agit de maximiser la fonction

$$h(a,b) = \frac{1}{4a}\left|\int_{-a}^{a} \frac{e^{-ib\tau}\mathrm{d}\tau}{1+i\tau}\right|^2,$$

et donner l'expression des paramètres a et b en fonction des paramètres physiques du problème.

Q25. Montrer que, dans la limite des faisceaux collimatés ($z_R \gg L$), on a

$$h(a,b) \simeq a\,\mathrm{sinc}^2[(b+1)a].$$

Q26. Montrer que la puissance P_3^{sp} est maximisée pour une valeur non nulle de Δk. Pourquoi trouve-t-on un résultat différent de la partie 1 ? Interpréter physiquement.

Q27. Montrer que, dans le cas de faisceaux fortement focalisés ($z_R \ll L$), on a

$$\begin{aligned} h(a,b) &\simeq \frac{\pi^2}{a} e^{-2b}, \quad b<0, \\ &\simeq 0, \quad b>0, \end{aligned}$$

On calcule numériquement que le maximum de la fonction $h(a,b)$ est atteint pour $a \simeq 3$.

Q28. Calculer la valeur optimale pour la longueur de Rayleigh z_R.

Q29. Calculer sa valeur numérique pour une longueur de cristal $L = 2\,\mathrm{cm}$. Calculer la valeur numérique des waists w_1, w_2 et w_3 correspondant à cette longueur de Rayleigh.

Q30. On présente ci-dessous la puissance à 589 nm mesurée en laboratoire, en fonction de la température du cristal (points noirs). Peut-on expliquer simplement ces résultats de mesure en faisant une supposition simple sur la dépendance des indices de réfraction avec la température ?

