Autofocalisation et filamentation dans un milieu non linéaire

Examen du cours d'optique
Formation prédoctorale de physique de l'ENS - L3

19 juin 2023
Durée de l'examen : 3 heures

Les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées. L'utilisation de calculatrices est interdite.

On s'intéresse à la propagation d'un faisceau lumineux dans un milieu d'indice non linéaire (effet Kerr)

$$n(\mathbf{r}) = n_0 + n_2 I(\mathbf{r}),$$

où $I(\mathbf{r})$ est l'intensité lumineuse au point $\mathbf{r}$. On supposera dans la suite $n_0 = 1$ par souci de simplicité, et on suppose également $n_2 > 0$. On considère un mode stationnaire décrit par un champ électrique

$$E(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz - \omega t)},$$

où ω est la fréquence angulaire et $k = \omega/c$ est le vecteur d'onde à basse intensité. L'amplitude $A(\mathbf{r})$ représente l'enveloppe du mode, supposée varier beaucoup plus lentement que $1/k$. On suppose dans la suite que le mode a une symétrie cylindrique, soit $A(\mathbf{r}) = A(\rho, z)$, où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance à l'axe. On prendra la convention suivante pour l'intensité lumineuse : $I = |A|^2$.

1 Traitement heuristique de l'autofocalisation

On propose dans un premier temps une modélisation approchée de la propagation d'un faisceau gaussien.

Q1. On considère tout d'abord le régime linéaire à faible intensité (on prend donc $n_2 = 0$). On rappelle l'expression du mode gaussien

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}) &= A_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(\frac{-\rho^2}{w(z)^2}\right) \exp\left[\mathrm{i}\left(k\frac{\rho^2}{2R(z)} - \phi(z)\right]\right) \\ w(z) &= w_0 \sqrt{1 + (z - z_0)^2 / z_\mathrm{R}^2} \\ R(z) &= z - z_0 + z_\mathrm{R}^2/(z - z_0). \end{aligned}$$

Rappeler le sens physique des paramètres z_0, $w(z)$ et $R(z)$, ainsi que la formule reliant la longueur de Rayleigh z_R et le waist minimum w_0.

Q2. On introduit la puissance

$$\mathcal{P}(z) = \int \mathrm{d}^2\rho\, I(\rho, z).$$

Montrer que la puissance $\mathcal{P}(z)$ est indépendante de z et donner sa valeur.

Q3. On rappelle qu'un faisceau gaussien peut être caractérisé par la donnée du paramètre complexe $q(z)$ en une cote z, défini par

$$q(z) = z - z_0 - \mathrm{i}z_\mathrm{R}.$$

La propagation libre sur une distance d peut être décrite par une matrice ABCD notée S_d, telle que

$$q(z+d) = \frac{Aq(z)+B}{Cq(z)+D}.$$

Donner l'expression de S_d.

Q4. On s'intéresse maintenant à l'effet de la non linéarité entre deux cotes z et $z+\mathrm{d}z$. Montrer que l'indice non linéaire conduit à un facteur de phase $\phi(\rho)$ dont on donnera l'expression. Le développement quadratique en ρ peut être mis sous la forme $\phi(\rho) = \phi(0) - k\rho^2/(2f)$, correspondant à l'effet d'une lentille mince. Quelle est la valeur de la focale $f(\mathrm{d}z)$? Cette lentille est-elle convergente ou divergente ?

Q5. On rappelle l'expression de la matrice ABCD décrivant la traversée d'une lentille mince de focale f,

$$L_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}.$$

On modélise la traversée du milieu non linéaire par une matrice $M_{\mathrm{d}z}$ donnée par le produit de la matrice de propagation libre $S_{\mathrm{d}z}$ et d'une lentille $L_{f(\mathrm{d}z)}$. Montrer que, à l'ordre 1 en $\mathrm{d}z$, on a

$$M_{\mathrm{d}z} = S_{\mathrm{d}z} L_{f(\mathrm{d}z)} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{d}z \\ -\alpha(z)\,\mathrm{d}z & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \alpha(z) = \frac{8n_2\mathcal{P}}{\pi w(z)^4}.$$

Obtiendrait-on le même résultat si on avait pris le produit $M_{\mathrm{d}z} = L_{f(\mathrm{d}z)} S_{\mathrm{d}z}$?

Q6. Montrer que la variation du paramètre complexe $q(z)$ est régie par l'équation

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z} = 1 + \alpha(z) q(z)^2.$$

Q7. On cherche une solution *autofocalisée*, telle que la non linéarité compense la diffraction, avec un waist $w(z) = w_0$ indépendant de z. Montrer que l'on doit avoir $q(z) = -\mathrm{i}\pi w_0^2/\lambda$.

Q8. Montrer que cette solution existe pour une certaine valeur de la puissance $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ dont on donnera l'expression.

2 Autofocalisation et filamentation : modèle théorique

On propose dans cette partie un modèle plus rigoureux de ce phénomène, basé sur l'étude de l'équation de l'enveloppe lentement variable.

Q9. On rappelle que le champ électrique satisfait à l'équation d'onde

$$\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E(\mathbf{r}, t) = 0.$$

En déduire l'équation de l'enveloppe lentement variable

$$2\mathrm{i}k\partial_z A = -\Delta_\perp A - 2n_2k^2|A|^2A.$$

Pour établir cette équation, on supposera que l'indice non linéaire $n_2 I$ reste faible devant 1. On rappelle également que $\Delta_\perp$ désigne le laplacien radial $\partial_x^2 + \partial_y^2$.

Q10. On rappelle que cette équation dans le régime linéaire est analogue à l'équation de Schrödinger d'une particule libre à deux dimensions. Comment interpréter le terme non linéaire en terme de physique quantique ?

Q11. On définit l'extension moyenne du faisceau $\sigma(z)$ par l'expression

$$\sigma^2(z) = \frac{\int \mathrm{d}^2\rho\, I(\rho, z)\rho^2}{\mathcal{P}(z)},$$

où l'on rappelle que $\mathcal{P}(z)$ est la puissance lumineuse. Montrer que $\mathcal{P}(z)$ ne dépend pas de z (tout comme vérifié en question 2 pour un faisceau gaussien dans l'espace libre).

Q12. L'analogie avec l'équation de Schrödinger nous indique une autre quantité conservée, l'*énergie*, définie par

$$\mathcal{E}(z) = \frac{1}{\mathcal{P}}\int \mathrm{d}^2\rho\, \left(-A^*\Delta_\perp A - n_2k^2|A|^4\right).$$

Montrer que $\mathcal{E}$ ne dépend pas de z.

*Les questions **Q13** et **Q14** sont plus techniques et peuvent être passées dans un premiers temps, le résultat de **Q14** étant donné.*

Q13. Montrer que la variation de la taille du faisceau satisfait

$$\partial_z\sigma^2 = \frac{2\mathrm{i}}{k\mathcal{P}}\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, x\left(\partial_x A^*A - A^*\partial_x A\right) + y\left(\partial_y A^*A - A^*\partial_y A\right).$$

Q14. Dériver de nouveau cette équation par rapport à z, et en déduire l'équation de variation de l'extension radiale

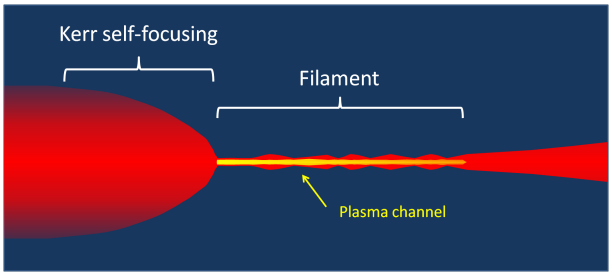
$$\partial_z^2\sigma^2 = \frac{2}{k^2}\mathcal{E}.$$

Q15. L'intégration de cette équation conduit à une variation quadratique en z, qui peut s'écrire comme

$$\sigma^2(z) = \sigma^2(z_0) + \frac{\mathcal{E}}{k^2}(z - z_0)^2.$$

Est-ce que cette solution a toujours un sens ? On tracera les courbes $\sigma(z)$ dans les cas $\mathcal{E} < 0$ et $\mathcal{E} > 0$.

Q16. Que se passe-t-il pour $\mathcal{E} < 0$? Justifier la terminologie de *phénomène de filamentation*, schématisé ci-dessous.



source Wikipedia

Autofocalisation et filamentation d'un faisceau gaussien

On s'intéresse à l'existence d'une solution *auto-focalisante*. Même si ce n'est pas exact, on suppose que cette solution a un profil gaussien

$$A(\mathbf{r}) = A_0 \exp\left(\frac{-\rho^2}{w_0^2}\right)$$

Q17. Dans ce cas particulier d'un faisceau gaussien, quel est le lien entre σ et le waist w_0 ?

Montrer que la puissance et l'energie de ce mode peuvent s'écrire comme

$$\mathcal{P} = \frac{\pi}{2} A_0^2 w_0^2,$$
$$\mathcal{E} = \frac{2}{w_0^2}\left(1 - \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}\right),$$

et donner l'expression de $\mathcal{P}_0$.

Q18. Montrer que la condition d'autofocalisation s'écrit

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0.$$

Comparer au résultat obtenu dans la première partie.

Q19. Montrer que, pour une puissance $\mathcal{P} > \mathcal{P}_0$, la filamentation se produit à une distance

$$D = \frac{z_\mathrm{R}}{\sqrt{\mathcal{P}/\mathcal{P}_0 - 1}},$$

où z_R est la longueur de Rayleigh d'un faisceau collimaté à l'entrée du milieu non linéaire.

3 Filamentation dans l'atmosphère

On s'intéresse dans cette partie à une application de la filamentation pour le contrôle de divers phénomènes météorologiques. La concentration de la puissance lumineuse associée à la filamentation conduit à la génération d'un plasma, pouvant stimuler des éclairs dans les orages et induire la condensation de la vapeur d'eau dans les nuages. On cherche dans cette partie à estimer la puissance lumineuse nécessaire à la filamentation dans l'atmosphère.

Dans un premier temps, on cherche à évaluer l'indice non linéaire n_2 de l'air pour un laser de fréquence $\omega = 2\pi c/\lambda$, pour une longueur d'onde $\lambda = 800\,\text{nm}$. On modélise l'air par un milieu atomique dilué de densité ρ, où chaque atome agit comme un système à deux niveaux de fréquence de résonance $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$, avec $\lambda_0 = 400\,\text{nm}$. Ce modèle n'est pas très bon mais il permet de mener les calculs jusqu'au bout.

Q20. On rappelle l'expression de l'indice linéaire dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié

$$n_0 = 1 + \frac{\rho e^2}{4 m_e \epsilon_0 \omega_0 \Delta},$$

où $\Delta = \omega - \omega_0$, e est la charge de l'électron et m_e est sa masse. En prenant une densité volumique $\rho = 10^{25}\text{m}^3$, estimer la valeur de n_0.

Q21. La non linéarité de Kerr peut se modéliser par une saturation de la réponse optique à haute intensité, selon la loi

$$n = 1 + \frac{n_0 - 1}{1 + I/I_{\text{sat}}},$$

où I_{sat} est l'intensité de saturation. Dans la limite de faible non linéarité, montrer que l'on retrouve l'effet Kerr

$$n = n_0 + n_2 I,$$

et donner l'expression de n_2 en fonction de n_0 et I_{sat}.

Q22. Il reste à estimer la valeur de l'intensité de saturation. On l'obtient comme l'intensité pour laquelle la fréquence de précession de Rabi Ω du dipole atomique égale la largeur Γ de la transition atomique. Rappeler l'énergie d'un dipole d dans un champ électrique E et en déduire l'expression de la fréquence de Rabi Ω en fonction de ces deux quantités.

Q23. En prenant un dipole atomique $d = e\,a_0$, où e est la charge de l'électron et a_0 est le rayon de Bohr, et une largeur de raie $\Gamma = 10^{10}\text{s}^{-1}$ (déterminée par les collisions), estimer la valeur de I_{sat}.

Q24. En déduire une estimation de n_2. En pratique, on mesure la valeur $n_2 \sim 3 \times 10^{-19}\text{cm}^2/\text{W}$, que l'on utilisera par la suite.

Q25. Calculer la puissance critique $\mathcal{P}_0$ au delà de laquelle se produit le phénomène de filamentation. On utilisera l'expression de $\mathcal{P}_0$ obtenue dans les parties précédentes. Si celle-ce n'a pas été trouvée, on supposera une valeur approchée $\mathcal{P}_0 = \lambda^2/n_2$. Est-ce une gamme de puissance accessible pour un laser continu ? Quel type de laser doit-on utiliser pour observer le phénomène ?

Q26. On suppose que la laser fonctionne à une puissance $\mathcal{P} = 2\mathcal{P}_0$. Quel doit être la valeur du waist du faisceau pour que la filamentation se produise à une altitude de 100 m au dessus du sol ?