Génération d'impulsions laser par blocage de modes actif

Examen du cours d'optique
Formation prédoctorale de physique de l'ENS - L3

30 mai 2024
Durée de l'examen : 3 heures

Les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées. L'utilisation de calculatrices est interdite.

On s'intéresse à un mécanisme de génération d'impulsions lumineuses ultra-brèves par le mécanisme de blocage de mode actif.

Cette technique repose sur les éléments suivants. On considère un laser comprenant une cavité optique en anneau de longueur totale L, dans laquelle se trouve un milieu amplificateur. Un dispositif inséré dans la cavité permet de moduler temporellement un coefficient de pertes selon

$$\alpha(t) = 1 - \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos\left(2\pi t / T_{\mathrm{mod}}\right),$$

où T_{mod} est la période de modulation. Nous allons voir que, lorsque la période de modulation T_{mod} est choisie égale à la durée de propagation $T = L/c$ de la lumière sur la longueur de la cavité, le laser adopte un régime d'émission d'impulsions ultra-courtes.

Q1. On s'intéresse à l'amplitude $E(t)$ du champ électrique en un point donné de la cavité. On néglige toute source de déphasage autre que la propagation libre du champ électromagnétique dans la cavité. Justifier que le champ électromagnétique peut se décomposer en série de Fourier

$$E(t) = \sum_n E_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t},$$

où $\omega_n = \omega_{\mathrm{cav}} n$, $\omega_{\mathrm{cav}} = 2\pi/T$ et n est un entier.

Le milieu amplificateur peut être modélisé par un facteur de gain par aller-retour dans la cavité

$$g(\omega) = \frac{g_{\mathrm{res}}}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_{\mathrm{res}}}{\Delta\omega}\right)^2 + \bar{I}/I_{\mathrm{sat}}},$$

où ω_{res} est la fréquence de résonance, g_{res} est le gain à résonance et $\Delta\omega$ est largeur de la résonance. L'intensité $\bar{I}$ est la valeur moyenne de $|E^2|$ sur une période, et I_{sat} est l'intensité de saturation.

Q2. Montrer que l'intensité moyenne s'écrit

$$\bar{I} = \sum_n |E_n|^2.$$

Régime monomode

On suppose dans un premier temps que le champ n'implique qu'un seul mode ω_n, et que la modulation temporelle est éteinte ($\alpha_1 = 0$). On se ramène ainsi à un modèle simple de laser monomode en régime stationnaire, tel que décrit dans le cours. Les questions Q3, Q5 et Q6 peuvent donc être considérées comme des questions de cours.

Q3. Montrer que l'amplitude E_n satisfait à l'équation

$$E_n = (1-\alpha_0)\frac{g_{\text{res}}}{1+\delta_n^2+|E_n|^2/I_{\text{sat}}}E_n,$$

où l'on introduit le désaccord adimensionné $\delta_n = (\omega_n - \omega_{\text{res}})/\Delta\omega$.

Q4. Montrer que cette équation reste inchangée si la modulation est allumée ($\alpha_1 \neq 0$).

Q5. Montrer que le laser admet une solution $E_n \neq 0$ à la condition

$$(1-\alpha_0)g_{\text{res}} > 1+\delta_n^2. \tag{1}$$

Q6. Donner la valeur de l'intensité laser $I_n = |E_n|^2$ et tracer sa dépendance par rapport au gain g_{res}. Commenter cette courbe.

Compétition entre deux modes sans modulation du gain

Q7. Supposons maintenant que deux modes n et m satisfont à la condition (1), et que la modulation temporelle du gain est éteinte (soit $\alpha_1 = 0$). Montrer que les intensités satisfont au système d'équations

$$I_n = \frac{(1-\alpha_0)g_{\text{res}}}{1+\delta_n^2+(I_n+I_m)/I_{\text{sat}}}I_n,$$
$$I_m = \frac{(1-\alpha_0)g_{\text{res}}}{1+\delta_m^2+(I_n+I_m)/I_{\text{sat}}}I_m.$$

Q8. Montrer que ce système implique que les intensités vérifient les conditions

$$\left(I_n = 0 \quad \text{ou} \quad I_n + I_m = I_{\text{sat}}\left[(1-\alpha_0)g_{\text{res}} - 1 - \delta_n^2\right]\right)$$

et

$$\left(I_m = 0 \quad \text{ou} \quad I_n + I_m = I_{\text{sat}}\left[(1-\alpha_0)g_{\text{res}} - 1 - \delta_m^2\right]\right).$$

Q9. Dans quel cas peut-on avoir les deux modes présents simultanément ?

Q10. Supposons que le mode n est résonnant $\delta_n = 0$, alors que le mode m ne l'est pas (soit $\delta_m \neq 0$). On notera dans la suite de cette partie $\delta = \delta_m$ pour alléger les notations. Expliquer sans calcul pourquoi le laser fonctionne en régime monomode sur le mode n, c'est-à-dire $I_n \neq 0$ et $I_m = 0$.

Q11. Afin de justifier cette intuition, on étudie la dynamique de petites perturbations autour de cette solution d'équilibre. On suppose donc dans cette question que les champs E_n et E_m dépendent du temps. Montrer qu'ils satisfont au système

$$T\dot{E}_n = \left[\frac{(1-\alpha_0)g_{\text{res}}}{1+(I_n+I_m)/I_{\text{sat}}} - 1\right]E_n,$$
$$T\dot{E}_m = \left[\frac{(1-\alpha_0)g_{\text{res}}}{1+\delta^2+(I_n+I_m)/I_{\text{sat}}} - 1\right]E_m.$$

Q12. Montrer que des petites perturbations de E_m décroissent exponentiellement vers zero avec le temps.

Stabilisation du régime multimode par modulation du gain

On suppose maintenant que le milieu amplificateur est modulé temporellement, soit $\alpha_1 \neq 0$. On se limite toujours à deux modes en compétition m et n.

Q13. Montrer que, si l'on choisit une fréquence de modulation $\omega_{\text{mod}} = 2\pi/T_{\text{mod}}$ égale à $|\omega_n - \omega_m|$, le système d'équations d'évolution du champ devient

$$T\dot{E}_n = g_{\text{res}} \frac{(1-\alpha_0)E_n + \alpha_1 E_m}{1 + (I_n + I_m)/I_{\text{sat}}} - E_n,$$
$$T\dot{E}_m = g_{\text{res}} \frac{(1-\alpha_0)E_m + \alpha_1 E_n}{1 + \delta^2 + (I_n + I_m)/I_{\text{sat}}} - E_m.$$

Dans la suite, on supposera que les deux modes sont des modes successifs de la cavité, de sorte que $T_{\text{mod}} = T$.

Afin de simplifier ce système linéaire, on le développe à l'ordre 1 par rapport aux infiniments petits $\delta g = g_{\text{res}} - 1, \alpha_0, \alpha_1$ et $\mathcal{I} = (I_n + I_m)/I_{\text{sat}}$. On obtient le système (on ne cherchera pas à le dériver)

$$T \begin{pmatrix} \dot{E}_n \\ \dot{E}_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_n \\ E_m \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \delta g - \alpha_0 - \mathcal{I} & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \delta g - \alpha_0 - \delta^2 - \mathcal{I} \end{pmatrix}.$$

Le mode d'oscillation du laser sera un mode propre de la matrice M de valeur propre nulle (mode stationnaire), l'autre valeur propre devant être de partie réelle négative pour assurer que seul le mode stationnaire soit stable.

Q14. Commençons par vérifier que cette procédure fonctionne bien en l'absence de modulation des pertes. Montrer que le vecteur $(E_n \neq 0, E_m)$ est le vecteur propre dont la valeur propre a la plus grande partie réelle, et que celle-ci s'annule pour $I_n = |E_n|^2 = I_{\text{sat}}(\delta g - \alpha_0)$. Ce résultat est-il en accord avec les questions précédentes ?

Q15. On considère maintenant le cas modulé $\alpha_1 \neq 0$. Montrer que la matrice M s'écrit en fonction des matrices de Pauli selon

$$M = \delta g - \alpha_0 + \mathcal{I} - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2}\sigma_z + \alpha_1 \sigma_x,$$

avec pour rappel l'expression des matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Q16. Donner l'expression de la valeur propre de plus grande partie réelle. En déduire que l'intensité totale satisfait

$$\mathcal{I} = \delta g - \alpha_0 - \frac{\delta^2}{2} + \sqrt{\frac{\delta^4}{4} + \alpha_1^2}.$$

Q17. Montrer que le rapport d'amplitude des deux modes est donné par

$$\frac{E_m}{E_n} = \frac{u}{1 + \sqrt{1+u^2}}, \quad u = 2\alpha_1/\delta^2.$$

Tracer ce rapport en fonction de u et commenter.

Q18. Comment varie l'intensité lumineuse avec le temps ? A quels instants est-ce que l'intensité est maximale ? Comparer avec l'évolution temporelle du gain et commenter.

Blocage d'un grand nombre de modes

On considère maintenant un grand nombre de modes E_n en compétition.

Q19. Montrer que l'évolution temporelle du champ obéit au système

$$T\dot{E}_n = (\delta g - \alpha_0 - \delta_n^2 - \mathcal{I})E_n + \alpha_1(E_{n-1} + E_{n+1}),$$

avec $\mathcal{I} = (\sum_n |E_n|^2)/I_{\text{sat}}$ et $\delta_n = (n\omega_{\text{cav}} - \omega_{\text{res}})/\Delta\omega$.

Q20. On suppose qu'un grand nombre de modes est peuplé avec une dépendence lente en n. En introduisant une fonction régulière $E(n)$ prenant les valeurs E_n pour n entier, montrer que l'évolution temporelle peut s'écrire comme

$$T\partial_t E = HE,$$
$$H = \delta g - \alpha_0 + 2\alpha_1 - \mathcal{I} + \alpha_1\partial_n^2 + \left(\frac{n\omega_{\text{cav}} - \omega_{\text{res}}}{\Delta\omega}\right)^2.$$

Q21. Le membre de droite peut être vu comme un opérateur hermitien H agissant dans un espace de Hilbert continu à une dimension n. Il comprend une partie indépendante de n, une dérivée seconde ∂_n^2 et un facteur quadratique en n. On peut donc dresser une analogie avec le Hamiltonien d'un oscillateur harmonique quantique. En déduire que le spectre de H s'écrit

$$\mathcal{E}_p = \delta g - \alpha_0 + 2\alpha_1 - \mathcal{I} - 2\sqrt{\alpha_1}\frac{\omega_{\text{cav}}}{\Delta\omega}\left(p + \frac{1}{2}\right),$$

où $p \in \mathbb{N}$.

Q22. Comme discuté dans le cas de deux modes en compétition, le laser va opérer de manière stable sur le mode d'énergie maximale, cette dernière devant être égale à zéro. Montrer que cela donne la valeur de l'intensité laser totale

$$\mathcal{I} = \delta g - \alpha_0 + 2\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1}\frac{\omega_{\text{cav}}}{\Delta\omega}$$

Q23. Montrer que les amplitudes E_n sont données par

$$E_n = \sqrt{\mathcal{I}}\left(\frac{\omega_{\text{cav}}^2}{\pi\alpha_1\delta\omega^2}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{(\omega_n - \omega_{\text{res}})^2}{2\sqrt{\alpha_1}\omega_{\text{cav}}\delta\omega}\right).$$

Q24. Montrer que l'écart quadratique moyen en fréquence vaut $\delta\omega = \alpha_1^{1/4}\sqrt{\omega_{\text{cav}}\delta\omega}$.

Q25. Montrer que le champ électrique $E(t)$ présente des pics de largeur temporelle $\delta t = 1/\delta\omega$. A quels instants se produisent ces pics d'intensité ? Commenter.

Q26. On considère un laser Ti-Sa dont la largeur à mi-hauteur du gain correspond à la plage de 700 nm à 1000 nm, et dont la longueur de la cavité vaut 1 m. Calculer la valeur de la largeur temporelle δt pour une amplitude de modulation $\alpha_1 = 1$.

Q27. Est-ce que cette méthode exploite au mieux la largeur de la courbe de gain du milieu amplificateur ?