Dynamique temporelle d'un laser

Examen du cours d'optique
Formation prédoctorale de physique de l'ENS - L3

12 juin 2025
Durée de l'examen : 3 heures

Les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées. L'utilisation de calculatrices est interdite.

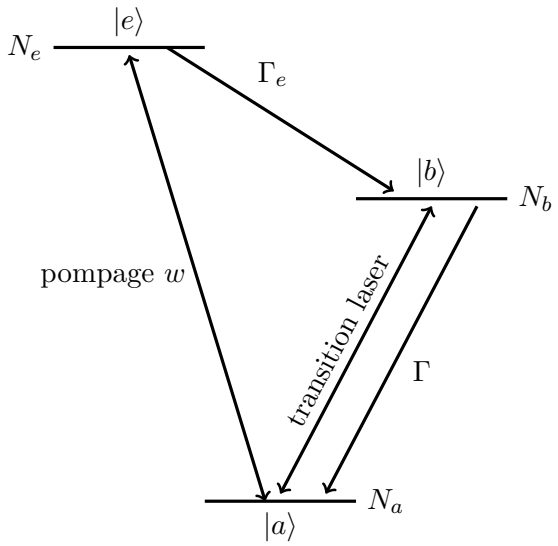
Ce sujet d'examen traite principalement de la dynamique temporelle d'un laser à 3 niveaux.

Dans la première partie, on établit les équations régissant la dynamique d'un laser à 3 niveaux, comme cela a été fait en cours. Dans la deuxième partie, on étudie la dynamique d'allumage d'un laser dans différents régimes.

Une dernière partie complètement indépendante traite de la stabilité d'une cavité optique formée de miroirs plans et comprenant une lentille.

1 Etat d'équilibre d'un laser continu

On considère un milieu amplificateur modélisé par un gaz comprenant N atomes dont on restreint la dynamique à trois niveaux internes $|a\rangle$, $|b\rangle$ et $|e\rangle$ tel que schématisé ci-dessous.



On pompe les atomes de l'état fondamental $|a\rangle$ vers l'état $|e\rangle$ avec un taux de pompage w. L'état $|e\rangle$ se désexcite rapidement vers le niveau $|b\rangle$ avec un taux Γ_e. Ce

dernier peut également se déexciter vers $|a\rangle$ par émission spontanée, avec un taux Γ beaucoup plus faible que Γ_e. Enfin, la transition laser couple les deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ par l'intermédiaire de N^γ photons piégés dans une cavité optique, de durée de vie τ.

On rappelle les équations d'évolution des nombres d'atomes dans chaque état et du nombre de photons :

$$\begin{aligned}\partial_t N_e &= w(N_a - N_e) - \Gamma_e N_e,\\ \partial_t N_b &= \Gamma_e N_e - \Gamma N_b - \beta N^\gamma (N_b - N_a),\\ \partial_t N^\gamma &= -N^\gamma/\tau + \beta N^\gamma (N_b - N_a).\end{aligned}$$

Q1. Montrer que les nombres d'atomes N_a et N_e sont reliés par

$$\Gamma_e N_e \simeq w N_a.$$

Q2. En déduire les équations d'évolution de la différence de population $\Delta = N_b - N_a$ et du nombre de photons N^γ :

$$\partial_t \Delta = (w - \Gamma)N - (w + \Gamma + 2\beta N^\gamma)\Delta, \tag{1}$$

$$\partial_t N^\gamma = -N^\gamma/\tau + \beta \Delta N^\gamma. \tag{2}$$

Q3. Expliquer pourquoi le gain du milieu amplificateur par unité de temps peut se définir comme

$$G = \beta \Delta.$$

Le système (1) et (2) admet deux types de solutions stationnaires : 'laser éteint' avec $N^\gamma = 0$ et 'laser allumé' avec $N^\gamma \neq 0$.

Q4. La solution laser éteint correspond à la différence de population Δ_0, c'est-à-dire à un gain G_0. Donner l'expression de ces deux quantités. *Réponse :*

$$G_0 = \beta \frac{w - \Gamma}{w + \Gamma} N.$$

Q5. Pour la solution laser allumé, montrer que la valeur d'équilibre du nombre de photons vaut

$$N^\gamma_{\text{eq}} = \frac{w}{2}(\tau N - 1/\beta) - \frac{\Gamma}{2}(\tau N + 1/\beta)$$

et donner également la valeur d'équilibre Δ_{eq} de la différence de population.

Q6. Montrer que cette solution a un sens physique lorsque deux conditions sont satisfaites :

— le gain maximal $G_{\max} = \beta N$ dépasse les pertes dans la cavité.

— le pompage dépasse une valeur seuil w_s dont on donnera l'expression.

2 Dynamique de l'allumage d'un laser

On s'intéresse à la dynamique d'allumage d'un laser. On suppose que le gain maximal du milieu amplificateur dépasse les pertes de la cavité. Partant du laser éteint, on allume brutalement le pompage à une valeur $w > w_s$.

Q7. Montrer qu'une faible valeur de N^γ croît exponentiellement avec le temps.

La résolution de l'évolution du système aux temps longs ne peut être menée analytiquement dans le cas général. On considère dans la suite deux cas particuliers permettant de mener les calculs dans le régime non linéaire et de mettre en évidence deux comportements très différents.

2.1 Laser à faible gain

On considère dans un premier temps un laser à faible gain, tel qu'un laser à gaz Hélium-Néon. Dans ce cas, il est crucial de choisir une cavité optique avec de faibles pertes afin de satisfaire la condition $G_{\max}\tau > 1$. La durée de vie τ des photons est alors beaucoup plus longue que la durée caractéristique $1/\Gamma$ de l'inversion de population.

Q8. Montrer que, dans la limite $\Gamma\tau \gg 1$ considérée ici, on peut éliminer adiabatiquement l'inversion de population et se ramener à un équation d'évolution pour le nombre de photons donnée par

$$\partial_t N^\gamma = -N^\gamma/\tau + \frac{G_0}{1 + N^\gamma/N^\gamma_{\text{sat}}} N^\gamma,$$

où G_0 est le gain défini en question Q4. Interpréter cette équation et donner l'expression de N^γ_{sat}, appelé nombre de saturation. *Réponse :*

$$N^\gamma_{\text{sat}} = \frac{w + \Gamma}{2\beta}.$$

Q9. Montrer que, lorsque w est de l'ordre de Γ et que le nombre de photons est de l'ordre de N^γ_{sat}, les processus d'émission spontanée et stimulée sont du même ordre de grandeur.

Q10. On suppose que le gain G_0 dépasse très légèrement les pertes de la cavité, soit $G_0\tau = 1 + \epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$. Montrer que la solution laser allumé correspond à un nombre de photons très faible devant le nombre de saturation.

Q11. Sous cette hypothèse, on peut effectuer un développement limité de la non linéarité, donnant l'équation d'évolution

$$\tau\, \partial_t N^\gamma = \left(\epsilon - \frac{N^\gamma}{N^\gamma_{\text{sat}}}\right) N^\gamma.$$

Vérifier que cette équation différentielle admet pour solution analytique

$$N^\gamma(t) = \frac{N^\gamma_{\text{eq}}}{1 + (N^\gamma_{\text{eq}} - 1)\exp(-\epsilon t/\tau)}.$$

Q12. Tracer cette courbe et donner la valeur du temps caractéristique de montée de la puissance.

2.2 Laser à gain élevé : mode relaxé

Nous nous plaçons maintenant dans le cas inverse, où la dynamique de l'inversion de population, régie par le taux de pompage w et le taux d'émission spontanée Γ, est lente devant la dynamique des photons, régie par le gain G du milieu amplificateur et la durée de vie τ des photons. Cette situation est typiquement rencontrée dans la description des lasers à état solide, tel que le laser Nd :YAG.

2.2.1 Mise en place de l'inversion de population

Bien que la dynamique des photons dans la cavité implique de courtes échelles temporelles, la première phase est l'établissement lent de la différence de population sans qu'il y ait le moindre photon dans la cavité. En effet, tant que le gain G ne dépasse pas le taux de pertes de photons, le laser reste éteint, avec $N^\gamma = 0$. Le pompage conduit alors à une équation différentielle sur la différence de populations

$$\partial_t \Delta = (w - \Gamma)N - (w + \Gamma)\Delta.$$

Q13. Montrer que cette équation différentielle a pour solution

$$\Delta(t) = \Delta_0(1 - \mathrm{e}^{-t/t_\Delta}) - N\,\mathrm{e}^{-t/t_\Delta} \tag{3}$$

et donner l'expression du temps caractéristique t_Δ. *Réponse : $t_\delta = 1/(\Gamma + w)$.*

2.2.2 Allumage du laser

Q14. Montrer que le laser s'allume lorsque la différence de population dépasse la valeur attendue Δ_{eq} pour le laser à l'équilibre, et que cela se produit au temps

$$t_0 = \log\left(\frac{N + \Delta_0}{\Delta_0 - \Delta_{\mathrm{eq}}}\right) t_\Delta.$$

Q15. On suppose que la différence de population continue d'évoluer selon (3), que l'on peut linéariser autour de t_0 selon

$$\Delta(t) = \Delta_{\mathrm{eq}} + (\Delta_0 - \Delta_{\mathrm{eq}})\frac{t - t_0}{t_\Delta}.$$

Montrer que le nombre de photons est régi par l'équation différentielle.

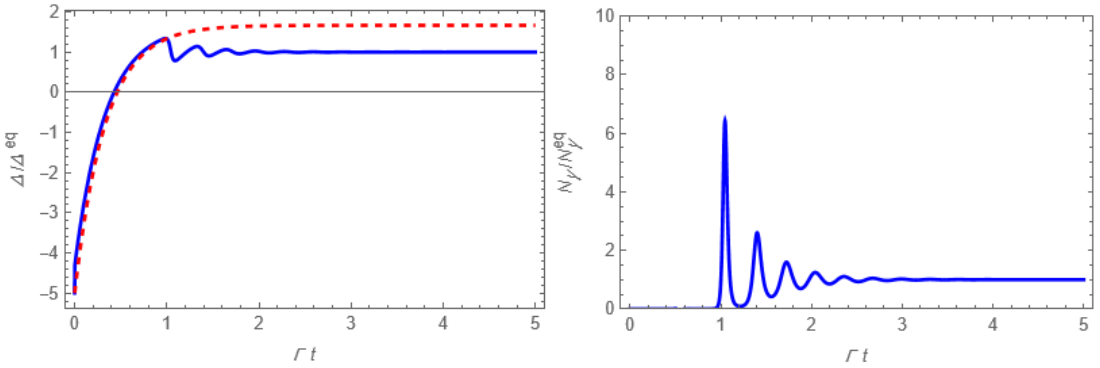
$$\partial_t N^\gamma = (G_0 - 1/\tau)\frac{t - t_0}{t_\Delta} N^\gamma$$

Q16. Résoudre cette équation différentielle et montrer que le nombre de photons d'équilibre N_γ^{eq} est atteint pour un temps caractéristique donné par (en ordre de grandeur)

$$t_\gamma \sim \sqrt{\frac{t_\Delta}{G_0 - 1/\tau}}.$$

Q17. Tant que cette valeur n'est pas atteinte, l'évolution de la différence de population est peu influencée par le nombre croissant de photons, si bien qu'elle continue de croitre selon (3). Expliquer pourquoi on s'attend à l'émission d'un pulse transitoire de lumière d'une intensité dépassant l'intensité stationnaire du laser.

On représente ci-dessous une résolution numérique de la dynamique du laser pour les paramètres suivants : $w = 2\,\Gamma$, $G_{\max} = 1000\,\Gamma$, $\tau = 5/G_{\max}$. Sur l'évolution de $\Delta(t)$, la courbe pointillée correspond à la solution approximée (3).



Ce calcul confirme que la puissance lumineuse dépasse la valeur d'équilibre, le laser émettant une série de pulses lumineux intenses.

On propose de modéliser la dynamique de ces pulses pour $t > t_\gamma$ en linéarisant les équations d'évolution autour des valeurs d'équilibre $\Delta_{\rm eq}$ et $N_{\rm eq}^\gamma$.

Q18. Développer le système d'équations d'évolution (1) et (2) au premier ordre en déviation à l'équilibre. On mettra la solution sous forme matricielle

$$\partial_t \begin{pmatrix} \Delta - \Delta_{\rm eq} \\ N_\gamma - N_\gamma^{\rm eq} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Delta - \Delta_{\rm eq} \\ N_\gamma - N_\gamma^{\rm eq} \end{pmatrix},$$

où l'on introduit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -(w-\Gamma)G_{\rm max}\tau & -2/\tau \\ (w-\Gamma)G_{\rm max}\tau/2 - (w+\Gamma)/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q19. Montrer que ses valeurs propres λ satisfont à l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + (w-\Gamma)G_{\rm max}\tau\lambda + (w-\Gamma)G_{\rm max} - \frac{w+\Gamma}{\tau} = 0.$$

Q20. Le discriminant de cette équation s'écrit

$$D = [(w-\Gamma)G_{\rm max}\tau]^2 - 4\left[(w-\Gamma)G_{\rm max} - \frac{w+\Gamma}{\tau}\right].$$

Montrer que le premier terme est négligeable, et que le discriminant est négatif. On obtient donc les valeurs propres

$$\lambda_\pm = -\frac{(w-\Gamma)G_{\rm max}\tau}{2} \pm {\rm i}\sqrt{(w-\Gamma)G_{\rm max} - \frac{w+\Gamma}{\tau}}$$

Q21. Interpréter ce résultat en terme d'oscillations amorties de la puissance laser. Dans le régime de paramètres considéré ici, a-t-on beaucoup d'oscillations sur l'échelle de temps de l'amortissement ?

On cherche à estimer la hauteur du premier pulse lumineux. On néglige l'amortissement des oscillations, ce qui revient à négliger l'élément diagonal non nul de la matrice M, qui est donc approximée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2/\tau \\ (w-\Gamma)G_{\rm max}\tau/2 - (w+\Gamma)/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A l'instant t_γ, le nombre de photons correspond par définition à $N_{\rm eq}^\gamma$, alors que la différence de population dépasse la valeur d'équilibre (voir question Q18). On prendra pour fixer les idées la valeur $\Delta(t_\gamma) = \Delta_0$.

Q22. Résoudre analytiquement la dynamique de Δ et N^γ, et montrer que la valeur maximale atteinte par le nombre de photon est donnée par

$$N^\gamma_{\max} = N^\gamma \left(1 + \frac{\Delta_0 - \Delta_{\rm eq}}{\sqrt{2\Delta_{\rm eq} N^\gamma_{\rm eq}}}\right).$$

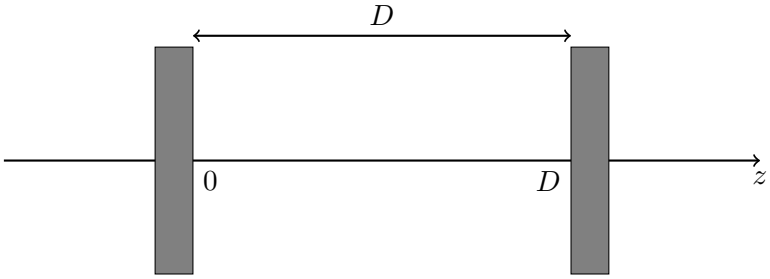
Montrer que, dans le cas d'un laser à fort gain considéré ici, les inégalités $w \sim \Gamma \ll G_{\max} \sim 1/\tau$ conduisent à

$$N^\gamma_{\max}/N^\gamma_{\rm eq} \sim \sqrt{G_{\max}/\Gamma},$$

tel que le premier pic est beaucoup plus intense que la valeur stationnaire atteinte aux temps longs.

3 Mode optique d'une cavité

On considère une cavité optique formée de 2 miroirs plans séparés par une distance D, tel que représenté ci-dessous.



On s'intéresse à l'existence de modes gaussiens stables dans la cavité. On rappelle qu'un mode gaussien se propageant selon $+\mathbf{e}_z$ est décrit par un champ électrique de la forme

$$E(r,z) = u(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr^2/[2q(z)]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz},$$

où l'on introduit le paramètre confocal

$$q(z) = z - z_0 - \mathrm{i}z_{\rm R},$$

avec z_0 le point de focalisation et $z_{\rm R}$ la longueur de Rayleigh.

Q23. Supposons que le faisceau possède un paramètre confocal q_0 en $z = 0$. Que vaut le paramètre confocal en $z = D$? Exprimer le lien entre $q(0)$ et $q(D)$ en termes de la matrice ABCD de la propagation libre sur une distance D

$$M_D = \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q24. Justifier que le champ électrique réfléchi sur le miroir en $z = D$ s'écrit

$$E'(r,z) = u(z')\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr^2/[2q(z')]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz'},$$

où $z' = 2D - z$.

Q25. En déduire que le paramètre confocal du faisceau réfléchi s'écrit

$$q'(z) = q(2D - z),$$

et que le paramètre confocal en $z = D$ est inchangé par la réflexion en D.

Q26. Montrer que la propagation libre du faisceau réfléchi entre $z = D$ et $z = 0$ est décrite par une matrice ABCD

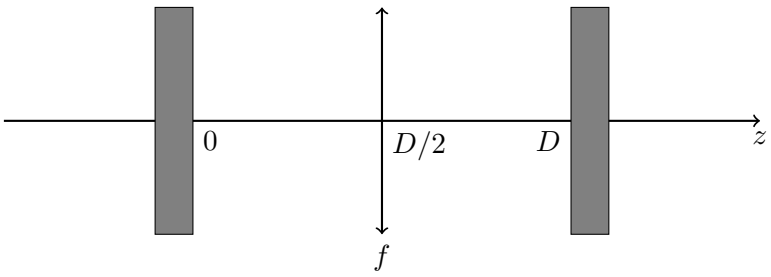
$$M'_D = M_D$$

Q27. Montrer qu'un faisceau gaussien stable doit vérifier la relation

$$q(0) = q(0) + 2D,$$

conduisant à une contradiction.

On s'intéresse à la stabilisation de la cavité au moyen d'une lentille placée au centre de la cavité, de focale f. Le schéma de la cavité complète devient donc



On rappelle que la matrice ABCD associée à la lentille s'écrit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$

Q28. Montrer que la matrice ABCD associée à un tour complet dans la cavité s'écrit

$$M_{\text{total}} = M_{D/2}\, L\, M_D\, L\, M_{D/2}.$$

Q29. Montrer qu'elle peut s'écrire comme la carré de la matrice

$$M_{\text{moitié}} = M_{D/2}\, L\, M_{D/2}$$

associée à un aller simple le long de la cavité.

Q30. Montrer que cette matrice s'écrit

$$M_{\text{moitié}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{D}{2f} & D - \frac{D^2}{4f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{D}{2f} \end{pmatrix}$$

On rappelle que la stabilité de la cavité requiert que les valeurs propres λ_+ et λ_- de la matrice $M_{\text{moitié}}$ soient de module ≤ 1.

Q31. Calculer le déterminant de $M_{\text{moitié}}$ et en déduire qu'une cavité stable requiert que les modules des valeurs propres soient

$$|\lambda_+| = |\lambda_-| = 1.$$

Q32. Les valeurs propres de $M_{\text{moitié}}$ sont données par

$$\lambda_\pm = \frac{-D + 2f \pm \sqrt{D^2 - 4Df}}{2f} \quad \text{pour} \quad D > 4f,$$
$$\lambda_\pm = \frac{-D + 2f \pm \mathrm{i}\sqrt{4Df - D^2}}{2f} \quad \text{pour} \quad D < 4f,$$

En déduire la condition de stabilité de la cavité.