Examen de théorie des champs, M1 2007-2008
Vendredi 1er février 2008

Préambule : notations et formulaire

– $d = 1, 2, \cdots$ est un entier qui désigne la dimension de l'espace-temps (ou de l'espace après rotation de Wick).

– Dans $\mathbb{R}^d$ on choisit la base canonique usuelle $B_d = \{e_1, \cdots, e_d\}$ telle que $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$. On définit $D_d \equiv B_d \cup -B_d = \{\pm e_1, \cdots, \pm e_d\}$. On note $|x|^2 \equiv x_1^2 + \cdots + x_d^2$ la norme euclidienne de x et $x^2 \equiv x_1^2 - \cdots - x_d^2$ la norme minkovskienne de x. De même, si $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x.y$ est le produit scalaire euclidien et xy le produit scalaire minkovskien.

– $\mathbb{L}_d(a) \equiv a\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ est le réseau (hyper)cubique de maille a dans $\mathbb{R}^d$ c'est-à dire l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ dont toutes les coordonnées sont des multiples entiers de a. Si $x \in \mathbb{L}_d(a)$, l'ensemble de ses proches voisins dans $\mathbb{L}_d(a)$ est $\{x + a\varepsilon\}_{\varepsilon \in D_d}$. Une arête de $\mathbb{L}_d(a)$ est un segment reliant deux proches voisins. Un chemin sur le réseau est une succession d'arêtes contiguës.

– Quand il n'y a pas de confusion possible, on écrit dans la suite $\mathbb{L}$, B et D pour $\mathbb{L}_d(a)$, B_d et D_d respectivement.

– Si $f(x), x \in \mathbb{L}_d(a)$ est une fonction réelle ou complexe sur $\mathbb{L}_d(a)$, sa

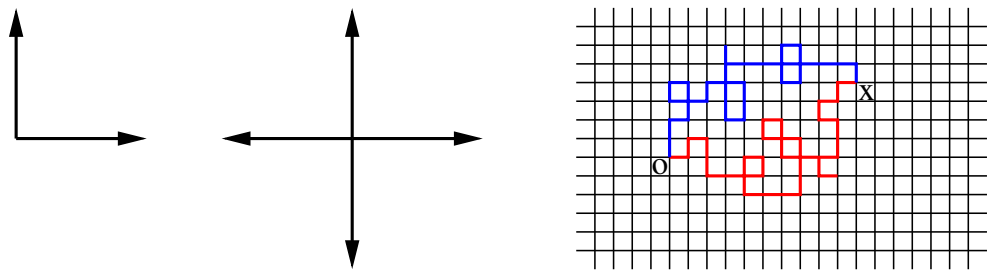


FIG. 1 – *Illustration pour* $d = 2$ *: la base* (e_1, e_2)*, l'ensemble* D_2*, et une portion de* $\mathbb{L}_2(a)$ *avec deux chemins sur le réseau joignants* o *to* x*.*

transformée de Fourier $\hat{f}(k), k \in \mathbb{R}^d$ est définie par :

$$\hat{f}(k) \equiv \sum_{x \in \mathbb{L}_d(a)} f(x) e^{ik.x}.$$

C'est une fonction périodique dont les périodes forment le réseau $\mathbb{L}_d(2\pi/a)$ et la formule réciproque est

$$f(x) \equiv \int \cdots \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d k}{(2\pi/a)^d} e^{-ik.x} \hat{f}(k).$$

– Formule d'Euler : pour $\epsilon \to 0$

$$(1 + \alpha\epsilon)^{\beta/\epsilon} \sim e^{\alpha\beta}.$$

– Intégrale gaussienne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2 + iu\nu} = e^{-\nu^2/2}.$$

– Symbole de Krönecker : $\delta_{.,.}$ vaut 1 si ses deux arguments sont égaux et 0 sinon.

Le propagateur de Feynman comme intégrale de chemin

Partie A : Introduction[1]

On peut, comme l'a découvert Richard Feynman, reformuler les lois de la mécanique quantique via des sommes sur les histoires. Nous nous restreignons ici au cas d'une particule relativiste sans spin de masse m dans l'espace-temps $\mathbb{R}^4$.

L'action d'une trajectoire paramétrée par le temps $\gamma \equiv \{\vec{x}(t),\ t \in [t_i, t_f]\}$ est

$$S(\gamma) = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - |\vec{v}(t)|^2/c^2},\ \text{où } \vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{x}(t)}{dt}.$$

L'amplitude de probabilité pour la particule d'aller de $\vec{x}(t_i)$ à $\vec{x}(t_f)$ en suivant le chemin γ est proportionnelle à $e^{iS(\gamma)/\hbar}$, et si $\mathcal{A}(\vec{x}_i, t_i, \vec{x}_f, t_f)$ désigne l'amplitude totale pour aller de $\vec{x}_i$ au temps t_i à $\vec{x}_f$ au temps t_f

$$\mathcal{A}(\vec{x}_i, t_i, \vec{x}_f, t_f) \propto \sum_{\gamma} e^{iS(\gamma)/\hbar} \tag{1}$$

où la somme porte sur tous les chemins γ allant de $\vec{x}_i$ au temps t_i à $\vec{x}_f$ au temps t_f.

Une telle formule a un contenu intuitif séduisant dans les situations où l'on peut ne prendre en compte que quelques chemins (penser à une expérience de type «fentes d'Young» dans une limite presque classique). Mais il n'est pas facile de lui donner une sens précis, et le problème qui suit est une tentative en ce sens. La difficulté la plus évidente est la somme sur tous les chemins, qui forment un continuum. De plus, il faut décider si seuls les

[1] Cette partie ne contient pas de question.

chemins de genre espace[2] doivent être pris en compte. Les oscillations dues au caractère complexe de l'amplitude sont aussi source de complications. Notre approche est de commencer par une rotation de Wick, pour passer de l'espace de Minkovski à l'espace d'Euclide. On discrétise alors la somme sur les chemins sur un réseau. Il reste ensuite à analyser ce qui se passe quand la maille du réseau est petite, et à repasser à l'espace de Minkovski.

Ce problème illustre les liens intimes entre mécanique statistique et en théorie quantique des champs.

Il illustre aussi dans un cas très élémentaire un des grands thèmes de la théorie de la renormalisation. La quantification (au moins dans l'état actuel de nos connaissances) part de concepts classiques (action, hamiltonien) et notre interprétation des paramètres qui apparaissent dans ces fonctionnelles vient des notre compréhension des solutions des équations du mouvement associés. La prise en compte des fluctuations quantiques dans le continu mène à des divergences et cela suggère fortement de passer à une approximation discrète mieux contrôlée car elle élimine les fluctuations à courte distance. La discrétisation des solutions classiques mène à un lien naïf entre les paramètres du continus et ceux du discret. Mais en fait les fluctuations quantiques font intervenir des configurations très différentes des solutions classiques des équations du mouvement, et en conséquence les relations entre les paramètres du discret et les paramètres qui décrivent la physique à grande distance sont en général singulières quand on repasse à la limite continue après avoir tenu compte des fluctuations.

Dans tout le problème on suppose choisies des unités telles que $\hbar = c = 1$.

Partie B : Rotation de Wick

B.1 : Montrer que $S(\gamma)$ peut se récrire $S(\gamma) = m\int_{s_i}^{s_f} ds\sqrt{(\frac{dt}{ds})^2 - (\frac{|d\vec{x}|}{ds})^2}$, où s est un paramètre arbitraire qui croît de l'origine à la fin de $\gamma \equiv \{(t(s), \vec{x}(s)),\ s \in [s_i, s_f]\}$. ✎

En raison de cette invariance par reparamétrisation il ne serait pas habile de discrétiser le temps comme dans l'approche habituelle en mécanique

[2]Ceux pour lesquels $\left(\frac{|d\vec{x}(t)|}{dt}\right)^2 \leqslant c^2$.

quantique non-relativiste.

B.2 : On définit $\gamma_\vartheta \equiv \left\{(t(s)e^{-i\vartheta}, \vec{x}(s)),\, s \in [s_i, s_f]\right\}$ et on suit analytiquement $S(\gamma_\vartheta)$ pour $\vartheta \in [0, \pi/2]$. Montrer que $iS(\gamma_{\pi/2}) = -mL(\gamma)$ où $L(\gamma) \equiv \int_{s_i}^{s_f} ds \sqrt{(\frac{dt}{ds})^2 + (\frac{|d\vec{x}|}{ds})^2}$ est la longueur du chemin γ dans $\mathbb{R}^4$ muni de la métrique euclidienne. ✎

En conséquence, $e^{iS(\gamma_{\pi/2})} = e^{-mL(\gamma)}$.

B.3 : Soit un chemin γ qui sur $[s_i, s_f]$ vérifie $|d\vec{x}|^2 < dt^2$. Vérifier que par continuation analytique $e^{-mL(\gamma_{-\pi/2})} = e^{iS(\gamma)}$. ✎

B.4 : Soit un chemin γ qui sur $[s_i, s_f]$ vérifie $|d\vec{x}|^2 > dt^2$. Vérifier que par continuation analytique $e^{-mL(\gamma_{-\pi/2})} = e^{-m\int_{s_i}^{s_f} ds \sqrt{-(\frac{dt}{ds})^2 + (\frac{|d\vec{x}|}{ds})^2}}$. En conclure que par continuation analytique depuis l'euclidien, les tronçons où la particule va plus vite que la lumière donnent des contributions supprimées exponentiellement. ✎

B.5 : En prenant en compte des chemins arbitraires, quel autre changement important voyez vous par rapport au chemins considérés habituellement ? ✎

Partie C : Discrétisation

Pour peu qu'elle ait un sens, la somme $\sum_\gamma e^{-mL(\gamma)}$, portant sur tous les chemin de x à y, ne doit dépendre que de $y - x$; on peut donc se contenter d'analyser le cas où l'origine des chemins est 0.

Pour donner un sens à $\sum_\gamma e^{-mL(\gamma)}$, on discrétise l'espace en ne considérant que des chemins fait d'arêtes successives du réseau $a\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4$ où a est une longueur microscopique.

Il n'est pas plus difficile de travailler en dimension d arbitraire avec des chemins faits d'arêtes successives de $\mathbb{L}$, le réseau (hyper)cubique de maille a dans $\mathbb{R}^d$.

C.1 : Quelles symétries de la formulation continue la discrétisation brise-t-elle ? Montrer que la longueur des approximation du segment de droite joignant $(0,0)$ à $(1,1)$ dans $\mathbb{R}^2$ par des chemins sur le réseau carré de maille a ne converge pas vers la longueur du segment quand $a \to 0$. ✎

Malgré cette observation décourageante, on décide de remplacer la somme

continue $\sum_\gamma e^{-mL(\gamma)}$ où γ est un chemin arbitraire de 0 à x par la somme discrète

$$Z(x) \equiv \sum_\Gamma e^{-\nu n(\Gamma)} \tag{2}$$

où ν est un paramètre réel. La somme porte sur l'ensemble des chemins Γ de 0 à $x \in \mathbb{L}$ fait d'arêtes successives de $\mathbb{L}$ et $n(\Gamma)$ est le nombre d'arêtes parcourues par Γ. On admettra provisoirement que pour ν assez grand la somme définissant $Z(x)$ est convergente.

C.2 : Quel lien entre m et ν suggère la discrétisation ?

La notation Z est la notation traditionnelle des fonctions de partition. Un polymère sur réseau est une chaîne de monomères contigus, chaque monomère étant astreint à se positionner le long d'une arête du réseau. Dans la modèlisation la plus simple, les monomères n'ont pas d'interaction mutuelle (en particulier plusieurs monomères peuvent occupper la même arête), et l'énergie d'une configuration est simplement le nombre de monomères.

C.3 : Montrer que $Z(x)$ est aussi la fonction de partition d'un polymère fixé à ses deux extrémités en 0 et x à une température telle que $kT\nu = 1$.

Dans ce modèle de polymère $e^{-\nu n(\Gamma)}$ s'interpète comme le poids de Boltzman d'un chemin, et nous utilisons librement cette terminologie de mécanique statistique dans la suite.

C.4 : Soit $\varepsilon \in D$. Montrer que la fonction de partition d'un polymère fixé à ses deux extrémités en 0 et x et dont le dernier monomère est astreint à couvrir l'arête liant $x - a\varepsilon$ à x est $Z(x - a\varepsilon)e^{-\nu}$.

C.5 : En déduire (sans calcul) que $Z(x)$ satisfait l'équation aux différences

$$Z(x) = \delta_{x,0} + \sum_{\varepsilon \in D} Z(x - a\varepsilon)e^{-\nu}. \tag{3}$$

Remarquer que $Z(x)$ est une somme de termes positifs, donc que l'on peut permuter et grouper arbitrairement ses termes pour décider de sa convergence/divergence, et éventuellement la calculer.

Soit $W_n(x)$ le nombre de chemins Γ fait d'arêtes de $\mathbb{L}$ et joignant 0 à $x \in \mathbb{L}$ en n pas. Ce nombre est fini, donc $Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu n} W_n(x)$.

C.6 : Établir que

$$W_n(x) = \sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n \in D} \delta_{x,a(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)}. \tag{4}$$

✎

C.7 : Établir la représentation intégrale

$$W_n(x) = \int\cdots\int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d k}{(2\pi/a)^d} e^{-ik.x} \left(2(\cos ak_1 + \cdots + \cos ak_d)\right)^n. \tag{5}$$

On pourra utiliser la représentation (4) pour calculer explicitement la transformée de Fourier $\hat{W}_n(k)$ de $W_n(x)$ et en déduire le résultat par transformation de Fourier inverse.

✎

C.8 : Que vaut $\hat{W}_n(0) \equiv \sum_x W_n(x)$? En déduire que pour $\nu > \nu_{cr} \equiv \log 2d$ la somme $\sum_{x\in\mathbb{L}} Z(x)$ est convergente et la calculer.

✎

Pour la suite du problème on supposera TOUJOURS vérifiée l'inégalité $\nu > \nu_{cr}$.

C.9 : Déduire de la question précédente que $Z(x)$ est fini et tend vers 0 pour $|x|$ grand ($|x|$ désigne la norme euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^d$).

✎

C.10 : Montrer que

$$Z(x) = \int\cdots\int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d k}{(2\pi/a)^d} \frac{e^{-ik.x}}{1 - 2(\cos ak_1 + \cdots + \cos ak_d)e^{-\nu}}. \tag{6}$$

✎

Partie D : Le cas particulier de la dimension $d = 1$

Dans toute cette partie on suppose $d = 1$.

D.1 : Écrire l'équation (3) dans le cas particulier $d = 1$. On cherche la solution décroissant pour $|x|$ grand sous la forme[3] $Z(x) = Ce^{-\mu|x|}$. Exprimer C et ν en fonction de a et μ.

✎

L'objectif des questions D.2 à D.7 est de passer à la limite continue $a \to 0$.

[3] C'est une équation aux différences à coefficients constants, elle se résout comme une équation différentielle à coefficient constants.

D.2 : Vérifier que pour ν fixé $\lim_{a\to 0} \mu = +\infty$ et en conclure qu'il n'y a pas de physique macroscopique dans cette limite. ✎

D.3 : Remarquer que $1/\mu$ est la distance typique sur laquelle $Z(x)$ varie significativement, et qu'en conséquence la physique macroscopique est décrite en fixant μ à une valeur finie. Il faut donc ajuster ν en fonction de a lorsque $a \to 0$ pour que μ reste inchangé. Comment se comporte alors $\nu(a) - \nu_{cr}$ pour a petit ? ✎

D.4 : Vérifier que, pour a petit à μ fixé, $Z(x) \sim \frac{2}{a} G_1(x, \mu)$ où $G_1(x, \mu)$ est une fonction dont on donnera la formule explicite, mais aussi (à partir de (3)) l'équation qu'elle satisfait et (à partir de (6)) une représentation intégrale. ✎

D.5 : Reconnaissez vous $G_1(x, \mu)$? Quelle est l'interprétation de μ ? ✎

La relation liant le paramètre sur le réseau ν à la masse μ en fonction de a contraste fortement avec la formule naïve $\nu = am$ obtenue plus haut. La relation naïve est clairement la bonne pour un chemin ayant une longueur bien définie (i.e. finie). Pour comprendre pourquoi la relation naïve est en défaut, on calcule la taille typique des chemins contribuant à $Z(x)$.

D.6 : Par analogie avec la mécanique statistique des polymères, montrer que $\overline{L} \equiv -a \frac{d\, Log Z(x)}{d\nu}$ est la longueur moyenne des chemins contribuant à $Z(x)$. Calculer $\overline{L}$ en utilisant le résultat de la question D.1. ✎

D.7 : Vérifier que $\overline{L} \sim \frac{1}{a\mu^2}(1 + \mu|x|)$ quand $a \to 0$ avec x et μ fixés. En conclure que les chemins qui contribuent à la physique macroscopique ont une longueur qui diverge comme a^{-1} donc un nombre de pas qui diverge comme a^{-2} quand $a \to 0$. ✎

Partie E : Limite continue

Revenant à une dimension d arbitraire, auquel cas il n'y a pas de formule analytique simple pour $Z(x)$, on veut prendre la limite continue en examinant le comportement de $W_n(x)$ et $Z(x)$ quand $a \to 0$.

E.1 : En passant à la limite dans (6) montrer que pour ν fixé et $a \to 0$

$$Z(x) \sim \frac{a^d}{1 - 2de^{-\nu}} \delta^d(x)$$

où $\delta^d(x)$ est la distribution de Dirac en d dimensions. ✎

En particulier, il n'y a pas de physique macroscopique dans cette limite, confirmant le résultat obtenu à une dimension.

Guidé par le résultat obtenu pour $d = 1$, on s'intéresse aux chemins dont le nombre de pas est s/a^2, et on examine la limite $a \to 0$ avec s fixé.

E.2 : Remarquer que

$$(2(\cos ak_1 + \cdots + \cos ak_d))^{s/a^2} \sim (2d)^{s/a^2} e^{-s|k|^2/(2d)} \text{ pour } a \to 0.$$

En conclure en utilisant (5) que

$$W_{s/a^2}(x) \sim a^d (2d)^{s/a^2} \left(\frac{d}{2\pi s}\right)^{d/2} e^{-d|x|^2/(2s)} \text{ pour } a \to 0.$$

✎

E.3 : Déduire de la question précédente que

$$Z(x) \sim a^{d-2} \sum_{s \in a^2\mathbb{N}} \left(\frac{d}{2\pi s}\right)^{d/2} (2de^{-\nu})^{s/a^2} e^{-d|x|^2/(2s)} \delta s \text{ pour } a \to 0,$$

où $\delta s \equiv a^2$ est la différence entre deux valeurs successives de s. ✎

Si l'on fait tendre a vers 0 à ν fixé, tous les termes dans la somme deviennent petits sauf si $x = 0$, et on retrouve ainsi qu'il n'y a pas de physique à grande distance dans ce cas.

E.4 : Montrer que cependant en ajustant $\nu(a) - \nu_{cr} \sim \frac{(\mu a)^2}{2d}$ avec μ fixé quand $a \to 0$, la somme devient une somme de Riemann, et que dans cette limite

$$Z(x) \sim a^{d-2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{d}{2\pi s}\right)^{d/2} e^{-s\mu^2/(2d)} e^{-d|x|^2/(2s)} ds$$

pour $x \neq 0$. ✎

Remarquer que dans cette formule s s'interprète comme la longueur "renormalisée" des chemins.

Dans la suite, on appelle "limite continue" la limite $a \to 0$, avec μ fixé et $\nu(a) - \nu_{cr} \sim \frac{(\mu a)^2}{2d}$.

E.5 : Quelle symmétrie brisée par la discrétisation sont restaurées à la limite continue ?

✎

E.6 : Prenant $\ell \equiv s\mu/(d|x|)$ comme nouvelle variable, conclure que $Z(x) \sim 2da^{d-2}G_d(|x|,\mu)$ où

$$G_d(|x|,\mu) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{|x|}\right)^{d/2-1} \int_0^{+\infty} e^{-(\ell+1/\ell)\mu|x|/2} \frac{d\ell}{(2\pi\ell)^{d/2}}. \tag{7}$$

✎

E.7 : Montrer en utilisant la représentation intégrale (6) qu'à la limite continue

$$Z(x) \sim 2da^{d-2} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ik.x}}{|k|^2+\mu^2}$$

et conclure que G_d est le propagateur euclidien de masse μ en dimension d. Vérifier aussi qu'à la limite continue l'équation (3) devient

$$(-\Delta + \mu^2) G_d(|x|,\mu) = \delta^d(x).$$

✎

Pour faire des calculs sur ordinateur on est amené à discrétiser l'espace : a est petit mais non nul. On travaille alors avec le propagateur discrétisé $a^2/(e^\nu - 2(\cos ak_1 + \cdots + \cos ak_d))$ dans l'espace des impulsions, en remplacement du propagateur continu $1/(|k|^2+\mu^2)$. Les deux propagateurs coïncident jusqu'à l'ordre 2 en a i.e. juqu'à l'ordre 4 en $|k|$.

E.8 : Supposant qu'on s'intéresse à $d = 4$ à des processus où les impulsions k mises en jeu sont telle que $|k|^2 \lesssim \mu^2$. Pour que l'écart relatif entre $|k|^2+\mu^2$ et son pendant discret soit $\lesssim 10^{-3}$, quel doit être l'ordre de grandeur de $\nu - \nu_{cr}$? Celui de $a\mu$? On pourra supposer a petit et approcher le propagateur discret à l'ordre 4 dans les impulsions.

✎

Par rotation de Wick (inverse) le propagateur euclidien redonne le propagateur de Feynman (celui associé aux T-produits) de la théorie des champs :

$$G_d^F(x) = \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{ie^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i0^+}$$

où kx et k^2 réfèrent à l'espace minkovskien. On pose $x = (t, \vec{x})$.

La formule (7) est très commode pour faire la continuation analytique. On pose $x = (t, \vec{x})$. Comme $|x| = \sqrt{t^2+\vec{x}^2}$, la rotation de Wick revient à remplacer dans (7) $|x|$ par $\sqrt{t^2 e^{2i\vartheta} + \vec{x}^2}$ et à suivre par continuité pour ϑ de 0 à $\pi/2$.

E.9 : Montrer que si $t^2 > \vec{x}^2$

$$G_d^F(x) = \frac{e^{i\pi(2-d)/4}}{2}\left(\frac{\mu}{\sqrt{t^2-\vec{x}^2}}\right)^{d/2-1}\int_0^{+\infty} e^{-(\ell+1/\ell)(\mu/2)(i\sqrt{t^2-\vec{x}^2}+0^+)}\frac{d\ell}{(2\pi\ell)^{d/2}}.$$

✎

E.10 : Montrer que si $t^2 < \vec{x}^2$

$$G_d^F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\vec{x}^2-t^2}}\right)^{d/2-1}\int_0^{+\infty} e^{-(\ell+1/\ell)(\mu/2)\sqrt{\vec{x}^2-t^2}}\frac{d\ell}{(2\pi\ell)^{d/2}}.$$

✎

En conclusion, les considérations précédentes suggèrent que si dans la formule (1) on interprète la somme sur la chemins comme incluant des chemins où la vitesse peut dépasser celle de la lumière et/ou remonter le cours du temps, l'amplitude $\mathcal{A}(\vec{x}_i, t_i, \vec{x}_f, t_f)$ pour aller de $\vec{x}_i$ au temps t_i à $\vec{x}_f$ au temps t_f coïncide avec le propagateur de Feynman. En particulier, le propagateur de Feynman ne s'annulle pas lorsque son argument est un vecteur du genre espace, contrairement au propagateur avancé ou retardé.

Ce résultat est à la base d'une représentation de la théorie quantique des champs avec des marches aléatoires. Cette approche a en particulier servi à montrer des résultats rigoureux sur l'existence de limites continues non triviales en théorie constructive des champs.

Cependant la nécessité d'introduire une discrétisation rend subtil le lien entre la masse, que l'on pourrait dire "nue" car ne tenant pas compte des fluctuations, qui entre dans l'expression formelle (1) et la masse, dite renormalisée, qui est mesurable en faisant de la statistique sur les chemins, et qui apparaît dans le propagateur de Feynman.