FIP master 1ère année
vendredi 28 septembre 2007

M2 - Théorie quantique des champs

TD 1

Théorie classique des champs

I. Analogue mécanique de l'équation de Klein–Gordon

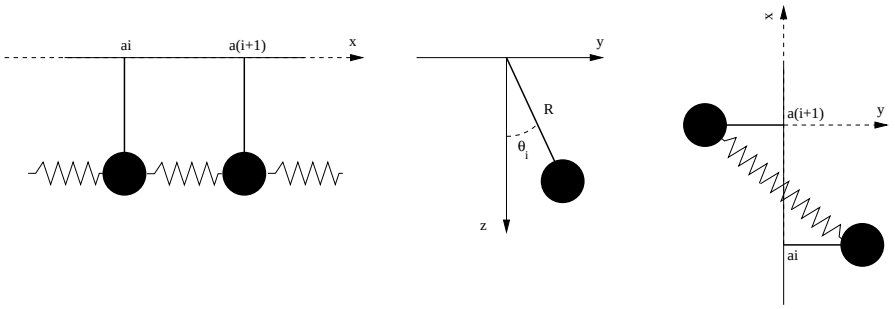
Ce problème a pour objectif la réalisation d'un analogue mécanique de l'équation de Klein–Gordon. C'est aussi l'occasion de manipuler la notion de dérivée fonctionnelle.

L'équation de Klein-Gordon décrit une particule de spin nul et de masse M. Pour une particule libre, elle se met sous la forme

$$\left(\Box + M^2\right)\Phi \quad = \quad 0$$

où $\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2$ et avec le choix d'unité $\hbar = c = 1$.

Soit une chaîne de pendules de masse m de longeur R et couplés à leurs plus proches voisins par des ressorts de raideur k et de longueur au repos nulle. Chaque pendule est contraint de se déplacer dans un plan perpendiculaire à l'axe (Ox) situé en $x = a\ i$ (i est un entier). Il fait un angle θ_i avec la verticale (axe (Oz)). On notera g l'accélération de la pesanteur et on se placera dans la limite des faibles oscillations.



1) Montrez que le lagrangien du système peut se mettre sous la forme

$$L \quad = \quad \sum_i \left[\frac{mR^2}{2} \left(\frac{d\theta_i}{dt} \right)^2 - \frac{mgR}{2} \theta_i^2 - \frac{kR^2}{2} \left(\theta_{i+1} - \theta_i \right)^2 \right]$$

En déduire les équations du mouvement ainsi que l'expression de l'action.

2) Quelle est la limite continue de ces équations du mouvement? On posera $x = ai$, $\theta(x) = \theta_i$, $\mu = m/a$ la masse linéïque et $\kappa = ka$ le module d'Young. Faire le lien avec Klein–Gordon.

3) Même question pour l'action. Mettez le résultat sous la forme

$$L \quad = \quad \int dx \, \mathcal{L}$$

où $\mathcal{L}$ est la densité de Lagrangien.

4) Soit $S[\phi]$ une fonctionnelle (comme l'action par exemple). La dérivée fonctionnelle est définie par

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x,t)} \quad = \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{S[\phi(x',t') + \epsilon \delta(x-x')\,\delta(t-t')] - S[\phi(x',t')]}{\epsilon}$$

ce qui permet d'écrire :

$$S[\phi + \delta\phi] - S[\phi] \quad = \quad \int dxdt \, \frac{\delta S}{\delta \phi(x,t)} \delta\phi(x,t) + O\left(\delta\phi^2\right)$$

En particulier, les équations du mouvement s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x,t)} \quad = \quad 0$$

Calculez les dérivées fonctionnelles par rapport à $\phi(x',t')$ des fonctionnelles suivantes

$$\int dxdt \; \phi(x,t) \; , \qquad \int dxdt \; \left(\phi(x,t)\right)^n$$

$$\int dxdt \; \phi(x,t) \, \frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi(x,t) \quad \text{et} \quad \int dxdt \; \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}\right)^2$$

5) Retrouvez ces résultats en utilisant la règle suivante :

$$\frac{\delta \phi(x,t)}{\delta \phi(x',t')} \quad = \quad \delta(x-x')\,\delta(t-t')$$

et en remarquant que la dérivée fonctionnelle agit dans l'espace des fonctions alors que les dérivées et intégrales par rapport à x et t agissent dans l'espace temps (i.e. ces opérations commutent).

6) A partir des résultats précédents, déterminez directement les équations du mouvement pour le modèle continu à partir l'expression de l'action.

7) Montrez que les équations du mouvement peuvent aussi de déduire de

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \theta)} \quad = \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

Faites le lien avec la mécanique lagrangienne.

II. Le champ électromagnétique

Soit le champ électromagnétique décrit par le potentiel vecteur A^μ. La densité de Lagrangien est définie dans ce cas par

$$\mathcal{L} \quad = \quad -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur champ électromagnétique et j^μ le quadrivecteur courant. On rappelle que la métrique Minkowskienne est donnée par le tenseur diagonal $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ avec $\eta_{00} = 1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$

1) Montrez que la densité de Lagrangien peut se réécrire sous la forme

$$\mathcal{L} \quad = \quad -\frac{1}{2}\left(\partial^\mu A^\nu\right)\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) - j_\mu A^\mu$$

2) Vérifiez que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu A^\nu\right)} \quad = \quad -F_{\mu\nu}$$

3) Déduisez-en les équations du mouvement. Les plus courageux pourront vérifier qu'il s'agit bien des équations de Maxwell.

4) On considère la transformation de jauge

$$A_\mu(x) \quad \longrightarrow \quad A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$$

Vérifiez que les équations du mouvement sont bien invariantes de jauge.

5) Montrez que la condition d'action invariante de jauge est reliée à condition de conservation du courant $\partial_\mu j^\mu = 0$. Le lien entre symétrie locale et conservation du courant est en fait une propriété générale découlant du théorème de Noether.