FIP master 1ère année
vendredi 9 novembre 2007

M2 - Théorie quantique des champs

TD 4

Fonctions de Green

I. Fonction de Heaviside

On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ est définie par

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ f(t)e^{i\omega t} \tag{1}$$

et la transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \tilde{f}(\omega)e^{-i\omega t} \tag{2}$$

Soit la fonction $\theta_\varepsilon(t)$ définie par

$$\begin{aligned}\theta_\varepsilon(t) &= 0 \text{ si } t<0\\ \theta_\varepsilon(t) &= e^{-\varepsilon t} \text{ si } t\geq 0\end{aligned}$$

où ε est un paramètre réel positif.

1) Quelle est la limite de $\theta_\varepsilon(t)$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0^+$?

2) Calculez la transformée de Fourier $\tilde{\theta}_\varepsilon(\omega)$ de la fonction $\theta_\varepsilon(t)$. Où est le pôle dans le plan complexe ? Vérifier sur ce cas particulier que ceci est conforme à la notion de fonction de Green retardée.

3) Calculez la transformée de Fourier inverse au moyen du théorème des résidus. Quel contour d'intégration faut-il utiliser pour $t<0$? Idem pour $t>0$?

II. Propagateur de l'onde à une dimension

Le but de ce problème est de résoudre l'équation d'onde à une dimension avec un second membre

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) s(t,x) = j(t,x) \tag{3}$$

où $j(t,x)$ est une fonction donnée. Cette équation admet une infinité de solutions. Nous déterminerons la solution retardée qui s'annule pour $t \longrightarrow -\infty$. Dans tout le problème, nous supposerons que $j(t,x)$ s'annule à l'infini en x et t, ce qui nous permettra d'appliquer la transformée de Fourier.

1) Solution explicite

a) L'équation d'onde à une dimension se simplifie considérablement lorsqu'on l'écrit dans le système de coordonnées du cône de lumière (x^+, x^-) définies par

$$x^+ = \frac{t+x}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad x^- = \frac{t-x}{\sqrt{2}}$$

On notera S et J les expressions de s et j dans le nouveau système de coordonnées

$$\begin{aligned} S\left(x^+, x^-\right) &= s\left(\frac{x^+ + x^-}{\sqrt{2}}, \frac{x^+ - x^-}{\sqrt{2}}\right) \\ J\left(x^+, x^-\right) &= j\left(\frac{x^+ + x^-}{\sqrt{2}}, \frac{x^+ - x^-}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Montrez que l'équation (3) se réécrit dans le nouveau système de coordonnées

$$\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x^-} S\left(x^+, x^-\right) = \frac{1}{2} J\left(x^+, x^-\right) \tag{5}$$

b) Quelle est la solution générale de l'équation (5) lorsque $j(t,x) = 0$? Quelle en est l'interprétation physique?

c) Vérifiez que la solution retardée de l'équation (5) est

$$S\left(x^+, x^-\right) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} dx_1 \int_0^{+\infty} dx_2 \;\; J\left(x^+ - x_1, x^- - x_2\right) \tag{6}$$

d) Représentez le domaine d'intégration de l'équation (6) dans le plan (x^+, x^-) puis (t,x). Déduisez-en la solution correspondante $s(t,x)$ en fonction de $j(t,x)$.

2) fonction de Green

a) Mettez la solution précédente sous la forme

$$s(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \;\; G(t',x') j\left(t-t', x-x'\right) \tag{7}$$

où $G(t,x)$ est la fonction de Green de l'équation

$$G(t,x) = \frac{1}{2}\theta\left(t - |x|\right) \tag{8}$$

où $\theta(x)$ est la fonction d'Heaviside, nulle pour $x < 0$ et égale à 1 pour $x > 0$.

b) La fonction $G(t,x)$ ne s'annulant pas pour $t \longrightarrow +\infty$, il n'est pas possible de calculer directement sa transformée de Fourier. Par contre, on peut calculer la transformée de $G(t,x)e^{-\varepsilon t}$ où ε est un paramètre réel positif que ferons tendre vers 0 à la fin du calcul. Effectuez ce calcul et mettre le résultat sous la forme

$$\tilde{G}(\omega, k) = \frac{1}{k^2 - (\omega + i\varepsilon)^2}$$

où sont les pôles de $\tilde{G}$ dans le plan complexe de la variable ω?

c) Calculez $s(t,x)$ définie par l'équation (7) dans le cas particulier où $j(t,x) = \delta(t)\delta(x)$. Déduisez alors de l'équation (3) que $G(t,x)$ est solution de

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G \quad = \quad \delta(x)\delta(t)$$

Effectuez une transformée de Fourier de cette équation et montrez qu'on retrouve le résultat précédent au facteur $i\varepsilon$ près.