Quantification et espaces de Fock

Examen de théorie des champs, M1 2009-2010

Vendredi 29 janvier 2010

L'examen comprend trois parties A, B et C.

La partie A est une suite de questions de cours.

Les parties B et C utilisent quelques résultats énoncés explicitement dans la section A.I, et qui peuvent être utilisés dans la suite même s'ils n'ont pas été démontrés.

La partie B est un échauffement pour la partie C, mais cette dernière peut néanmoins être traitée presque indépendamment.

Les questions marquées d'un $\flat$ sont des questions indépendantes du reste du problème et que vous êtes invités à ne traiter qu'après avoir résolu (ou avoir essayé de résoudre) les autres.

À part pour la toute dernière question, on prend des unités où $\hbar = c = 1$.

Introduction

En théorie quantique des champs, les produits d'opérateurs aux même point sont singuliers, divergents. Le produit normal (ou produit de Wick) est une quantification des produits classiques qui évite ces divergences, au sens ou un produit normal a des éléments de matrice finis entre états de Fock ne contenant qu'un nombre fini d'excitations.

Le but du problème qui suit est d'analyser plus en profondeur dans un cas simple les vertus et les défauts du produit normal. Le contexte est le suivant : on ajoute à un hamiltonien de champ libre agissant dans l'espace de Fock usuel une perturbation quadratique et on étudie dans quelle mesure le système perturbé peut être décrit dans l'espace de Fock de départ. La réponse dépend de la dimension de l'espace-temps.

Même si l'étude qui suit ne va pas jusque là, un cas concret où les calculs proposés sont pertinents est le calcul de la réponse (par exemple la matrice $\hat{S}$) d'un champ libre soumis à une source extérieure (ne dépendant que du temps) couplée non pas au champ lui même mais à son carré. La création de paires électrons-positrons par un champ électromagnétique relève de cette problématique.

Partie A : Questions de cours.

A.I Théorème de Wick

Soient $\hat{c}$ et $\hat{d}$ deux opérateurs tels que $[\hat{c}, \hat{d}] = h$ où $[h, \hat{c}] = [h, \hat{d}] = 0$. Les symboles λ et ρ désignent des paramètres commutants (par exemple des nombres complexes).

A.1 : Montrer que

$$e^{\lambda\hat{c}}\hat{d}e^{-\lambda\hat{c}} = \hat{d} + \lambda h.$$

Établir sans calcul supplémentaire que

$$e^{-\rho\hat{d}}\hat{c}e^{\rho\hat{d}} = \hat{c} + \rho h.$$

Conclure que $\hat{c}\hat{d}^n = \hat{d}^n\hat{c} + nh\hat{d}^{n-1}$, $n = 2, 3, \cdots$. ✎

A.2 : ♭ Utiliser la question précédente pour montrer, par exemple en dérivant par rapport à λ, que

$$e^{-\rho\hat{d}}e^{\lambda\hat{c}}e^{\rho\hat{d}} = e^{\lambda\rho h}e^{\lambda\hat{c}}.$$

✎

A.3 : ♭ Soit la fonction $F(t) \equiv e^{-t\rho\hat{d}}e^{t(\rho\hat{d}+\lambda\hat{c})}e^{-t\lambda\hat{c}}$. Vérifier que

$$\begin{aligned} F'(t) &= e^{-t\rho\hat{d}}(-\rho\hat{d})e^{t(\rho\hat{d}+\lambda\hat{c})}e^{-t\lambda\hat{c}} \\ &+ e^{-t\rho\hat{d}}e^{t(\rho\hat{d}+\lambda\hat{c})}(\rho\hat{d} + \lambda\hat{c})e^{-t\lambda\hat{c}} \\ &+ e^{-t\rho\hat{d}}e^{t(\rho\hat{d}+\lambda\hat{c})}(-\lambda\hat{c})e^{-t\lambda\hat{c}} \end{aligned}$$

En utilisant $[\lambda\hat{c} + \rho\hat{d}, \hat{d}] = \lambda h$ déduire des questions précédentes que $F'(t) = t\lambda\rho h F(t)$. ✎

A.4 : ♭ Conclure que

$$e^{\rho\hat{d}+\lambda\hat{c}} = e^{\rho\lambda h/2}e^{\rho\hat{d}}e^{\lambda\hat{c}}.$$

✎

A.II Espace de Fock d'un oscillateur

Soit $\mathcal{F}$ l'espace de Fock associé à la paire d'opérateurs $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ tels que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. On rappelle que cet espace a une base orthonormée

$\{|n\rangle; n = 0, 1, \cdots\}$ telle que $\hat{a}|0\rangle = 0$, $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ pour $n = 1, 2, \cdots$ et $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ pour $a = 0, 1, \cdots$.

On désigne par a^* et a des variables commutantes et on définit l'ordre normal d'une fonction de a^* et a développable en série $f = \sum_{m,n=0,1,\cdots} f_{m,n}(a^*)^m a^n$ par

$$:f: \equiv \sum_{m,n=0,1,\cdots} f_{m,n}(\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n.$$

On définit

$$q \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a^* + a) \quad \hat{q} \equiv :q: \quad p \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2}}i(a^* - a) \quad \hat{p} \equiv :p:,$$

où ω est une constante > 0.

A.5 : Calculer $[\hat{q}, \hat{p}]$. ✎

Soit $\hat{H}_0 \equiv :\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2):$.

A.6 : Écrire $\hat{H}_0$ en fonction de $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$. Donner une base orthonormée d'états propres de $\hat{H}_0$ et les niveaux d'énergie correspondants. Comparer $\hat{H}_0$ à $\frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2)$. ✎

A.III Espace de Fock d'un champ libre réel

On travaille en dimension d'espace d générique [1].

On dit d'une fonction $f(x_1, \cdots, x_d)$ définie sur $\mathbb{R}^d$ qu'elle est périodique de période L si f est périodique de période L indépendamment suivant les d composantes $x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_d$, donc si f est invariante sous l'action des translations par tous les vecteurs de $I^* \equiv (L\mathbb{Z})^d$. On rappelle que $I \equiv (\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z})^d$ est l'ensemble des vecteurs qui interviennent dans le développement de Fourier des fonctions de période L sur $\mathbb{R}^d$, et que pour $\vec{k} \in I$,

$$\int_{[0,L]^d} d^d\vec{x}\, e^{i\vec{k}\vec{x}} = L^d \delta_{\vec{k},\vec{0}}.$$

1. À part cette généralisation, les définitions et notations qui suivent sont celles du cours et devraient être familières. Pour mémoire, $d \simeq 3$ dans le monde réel.

Soit $\mathcal{F}_{QFT}$ l'espace de Fock associé aux paires d'opérateurs $\hat{a}_{\vec{k}}$, $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$, $\vec{k} \in I$ tels que

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{l}}] = \delta_{\vec{k},\vec{l}} \qquad [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{l}}] = [\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{l}}] = 0$$

pour $\vec{k}, \vec{l} \in I$. On rappelle que cet espace a une base orthonormée $\{|\,\overline{n}\,\rangle\}$ où $\overline{n} \equiv (n_{\vec{k}})_{\vec{k}\in I} \in \mathbb{N}^I$ parcourt l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{N}$ telles que $\sum_{\vec{k}\in I} n_{\vec{k}} < +\infty$. L'état $|\,\overline{0}\,\rangle$ est le vide, annihilé par tous les $\hat{a}_{\vec{k}}$, $\vec{k} \in I$ et

$$|\,\overline{n}\,\rangle \equiv \prod_{\vec{k}\in I} \frac{(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}})^{n_{\vec{k}}}}{n_{\vec{k}}!} |\,\overline{0}\,\rangle.$$

On désigne par $a^*_{\vec{k}}$ et $a_{\vec{k}}$ pour $\vec{k} \in I$ des variables commutantes et on définit l'ordre normal d'une fonction des $a^*_{\vec{k}}$ et $a_{\vec{k}}$ développable en série $f = \sum_{\overline{m},\overline{n}} f_{\overline{m},\overline{n}} \prod_{\vec{k}\in I} (a^*_{\vec{k}})^{m_{\vec{k}}} (a_{\vec{k}})^{n_{\vec{k}}}$ par

$$:f: \equiv \sum_{\overline{m},\overline{n}} f_{\overline{m},\overline{n}} \prod_{\vec{k}\in I} (\hat{a}^\dagger_{\vec{k}})^{m_{\vec{k}}} (\hat{a}_{\vec{k}})^{n_{\vec{k}}}.$$

Soit $m > 0$. Pour $\vec{k} \in I$ on pose $\omega_{\vec{k}} \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. On définit

$$\Phi(\vec{x}) \equiv \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{\vec{k}\in I} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} (a^*_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{x}} + a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}}) \qquad \hat{\Phi}(\vec{x}) \equiv :\Phi(\vec{x}):,$$

$$\Pi(\vec{x}) \equiv \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{\vec{k}\in I} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}}\, i(a^*_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{x}} - a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}}) \qquad \hat{\Pi}(\vec{x}) \equiv :\Pi(\vec{x}):.$$

Ces fonctions et les opérateurs associés sont périodiques de période L sur $\mathbb{R}^d$.

A.7 : Rappeler (sans refaire le calcul) la valeur de $[\hat{\Phi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{y})]$. ✎

Soit

$$\hat{H}_0 \equiv : \int_{[0,L]^d} d^d\vec{x}\, \frac{1}{2} (\Pi^2 + (\vec{\nabla}\Phi)^2 + m^2\Phi^2) :.$$

A.8 : Écrire $\hat{H}_0$ en fonction des opérateurs $\hat{a}_{\vec{k}}$ et $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$. Donner une base orthonormée d'états propres de $\hat{H}_0$ et les niveaux d'énergie correspondants.

Sans calculs, rappeler en quoi $\hat{H}_0$ diffère de $\int_{[0,L]^d} d^d\vec{x}\, \frac{1}{2}(\hat{\Pi}^2 + (\vec{\nabla}\hat{\Phi})^2 + m^2\hat{\Phi}^2)$ et pourquoi il lui est préférable. ✎

Partie B : Oscillateur harmonique.

On reprend les notations de la section A.II.

Soit $\hat{H} = :\frac{1}{2}(p^2 + \Omega^2 q^2):$, où Ω est une constante > 0.

B.1 : Écrire $\hat{H}$ en fonction de $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$. Expliquer, de préférence sans aucun calcul, pourquoi $\langle 0|\hat{H}|0\rangle = 0$. ✎

On définit des opérateurs $\hat{b}$ et $\hat{b}^\dagger$ agissant sur $\mathcal{F}$ par

$$\hat{b} \equiv \frac{(\Omega+\omega)\hat{a} + (\Omega-\omega)\hat{a}^\dagger}{2\sqrt{\omega\Omega}} \qquad \hat{b}^\dagger \equiv \frac{(\Omega+\omega)\hat{a}^\dagger + (\Omega-\omega)\hat{a}}{2\sqrt{\omega\Omega}}.$$

B.2 : Vérifier (en utilisant que $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ sont adjoints l'un de l'autre) que $\hat{b}$ et $\hat{b}^\dagger$ sont adjoints l'un de l'autre et calculer$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger]$. ✎

B.3 : Montrer que

$$\hat{H} = \Omega\hat{b}^\dagger\hat{b} - E_0(\Omega,\omega)$$

et donner l'expression de $E_0(\Omega,\omega)$. En déduire le spectre formel de $\hat{H}$. Par « spectre formel » on entend « spectre dans l'espace de Fock de $\hat{b}$ et $\hat{b}^\dagger$ » (dont la relation avec $\mathcal{F}$ n'est pas tout-à fait évidente). ✎

B.4 : On constate que $E_0(\Omega,\omega)$ est toujours positive, et on on veut l'interpréter. À partir des questions B.1 et B.3, montrez que

$$E_0(\Omega,\omega) = \Omega\|\hat{b}|0\rangle\|^2.$$

✎

Pour aller au delà du spectre formel, on cherche une base d'états propres de $\hat{H}$ sur $\mathcal{F}$. On rappelle que, pour $|u| < 1$, on a

$$(1-u)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \frac{(2n)!}{4^n n!^2} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}.$$

B.5 : Montrer qu'il existe dans $\mathcal{F}$ un unique état normalisé, qu'on notera $|0\rangle_\Omega$, annihilé par $\hat{b}$ et dont la composante sur $|0\rangle$ soit réelle positive. Quelle est l'énergie (pour $\hat{H}$) de cet état ?

On cherchera cet état sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$, on donnera une relation de récurrence sur les c_n que l'on résoudra. On en déduira la normalisation.

Vérifier que $|0\rangle_\Omega$ peut se récrire sous la forme compacte :

$$|0\rangle_\Omega = \sqrt[4]{\frac{4\omega\Omega}{(\omega+\Omega)^2}}\, e^{\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger)^2\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}}|0\rangle.$$

✎

On définit

$$|n\rangle_\Omega \equiv \frac{(\hat{b}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle_\Omega, \quad n = 0, 1, \cdots .$$

B.6 : Expliquer sans nouveaux calculs pourquoi les états $\{|n\rangle_\Omega\}_{n=0,1,\cdots}$ forment une base orthonormée de $\mathcal{F}$. ✎

Les calculs de la question B.5 montrent en particulier que le développement de $|0\rangle_\Omega$ sur les états $|n\rangle$ ne fait intervenir que les n pairs. On cherche à l'interpréter. On définit un opérateur linéaire $\hat{U}$ sur $\mathcal{F}$ par $\hat{U}|n\rangle = (-1)^n|n\rangle$

B.7 : Vérifier que $\hat{U} = \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$, puis que, en tant qu'opérateurs sur $\mathcal{F}$,

$$\hat{U}\hat{a}\hat{U}^{-1} = -\hat{a} \quad \hat{U}\hat{a}^\dagger\hat{U}^{-1} = -\hat{a}^\dagger.$$

En déduire que

$$\hat{U}\hat{b}\hat{U}^{-1} = -\hat{b} \quad \hat{U}\hat{b}^\dagger\hat{U}^{-1} = -\hat{b}^\dagger.$$

puis que $\hat{U}$ commute avec $\hat{H}_0$ et $\hat{H}$. Conclure sur les états propres de $\hat{H}$ et en particulier sur $|0\rangle_\Omega$. ✎

Partie C : Théorie quantique des champs.

On reprend les notations de la section A.III.

Soit

$$\hat{H} \equiv : \int_{[0,L]^d} d^d\vec{x}\, \frac{1}{2}(\Pi^2+(\vec{\nabla}\Phi)^2+M^2\Phi^2) : = \hat{H}_0 + : \int_{[0,L]^d} d^d\vec{x}\, \frac{M^2-m^2}{2}\Phi^2 :.$$

où M est une constante > 0. Pour $\vec{k} \in I$ on pose $\Omega_{\vec{k}} \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}$.

C.1 : Exprimer $\hat{H}$ en fonction des $\hat{a}_{\vec{k}}$ et $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$. Écrire le résultat comme une somme sur $\vec{k} \in I$ de hamiltoniens $\hat{H}^{(\vec{k})}$ tels que $\hat{H}^{(\vec{k})} = \hat{H}^{(-\vec{k})}$ ne soit fonction que de $\hat{a}_{\vec{k}}$, $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$, $\hat{a}_{-\vec{k}}$ et $\hat{a}^\dagger{}_{-\vec{k}}$. Justifier que $\left[\hat{H}^{(\vec{k})}, \hat{H}^{(\vec{l})}\right] = 0$ pour $\vec{k}, \vec{l} \in I$. ✎

On définit des opérateurs $\hat{b}_{\vec{k}}$ et $\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}$ agissant sur $\mathcal{F}_{QFT}$ par

$$\hat{b}_{\vec{k}} \equiv \frac{(\Omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}})\hat{a}_{\vec{k}} + (\Omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}}}{2\sqrt{\omega_{\vec{k}}\Omega_{\vec{k}}}} \qquad \hat{b}^\dagger_{\vec{k}} \equiv \frac{(\Omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}})\hat{a}^\dagger_{\vec{k}} + (\Omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})\hat{a}_{-\vec{k}}}{2\sqrt{\omega_{\vec{k}}\Omega_{\vec{k}}}}.$$

C.2 : Montrer que la transformation est canonique, i.e. telle que les $\hat{b}_{\vec{k}}$ et $\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}$ sont adjoints l'un de l'autre et vérifient

$$[\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{l}}] = \delta_{\vec{k},\vec{l}} \quad \vec{k}, \vec{l} \in I.$$

✎

On admettra que $[\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{l}}] = [\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{l}}] = 0$ pour $\vec{k}, \vec{l} \in I$.

C.3 : On pose $s_{\vec{k}} \equiv \frac{\omega_{\vec{k}} - \Omega_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}} + \Omega_{\vec{k}}}$. Montrer que (pour $\vec{k} \neq \vec{0}$ fixé) l'état

$$e^{s_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}}}|\,\overline{0}\,\rangle$$

est normalisable de norme carrée

$$\|e^{s_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}}}|\,\overline{0}\,\rangle\|^2 = \frac{(\omega_{\vec{k}} + \Omega_{\vec{k}})^2}{4\omega_{\vec{k}}\Omega_{\vec{k}}},$$

et est annihilé par $\hat{b}_{\vec{k}}$ et $\hat{b}_{-\vec{k}}$.

On pourra par exemple développer l'exponentielle en puissances de $s_{\vec{k}}$ et remarquer que $\hat{b}_{\vec{k}}$ est proportionnel à $\hat{a}_{\vec{k}} - s_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}}$. ✎

C.4 : Montrer que $\Omega_{\vec{k}} \left(\hat{b}^\dagger_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}} + \hat{b}^\dagger_{-\vec{k}} \hat{b}_{-\vec{k}} \right) = \hat{H}^{(\vec{k})} + \hat{H}^{(-\vec{k})} + 2E_0(\Omega_{\vec{k}}, \omega_{\vec{k}})$ où E_0 est donné par la même formule qu'à la question B.3.

En déduire en utilisant la question précédente le spectre de $\hat{H}^{(\vec{k})} + \hat{H}^{(-\vec{k})}$ agissant sur $\mathcal{F}_{QFT}$. ✎

Dans la suite du problème, on pourra utiliser sans justification[2] le résultat suivant. Si $(u_{\vec{k}})_{\vec{k} \in I}$ est une famille de réels indexée par I telle que $u_{\vec{k}} \sim C|\vec{k}|^{-\delta}$ pour $|\vec{k}| \to \infty$ alors la somme $\sum_{\vec{k} \in I} u_{\vec{k}}$ converge si et seulement si $\delta > d$. La notation $|\vec{k}|$ désigne la norme euclidienne de $\vec{k}$.

C.5 : Montrer que le produit infini $\prod_{\vec{k} \in I} \frac{(\omega_{\vec{k}} + \Omega_{\vec{k}})^2}{4\omega_{\vec{k}}\Omega_{\vec{k}}}$ converge si et seulement si $d < 4$. On pourra se ramener à une somme en considérant le logarithme. ✎

C.6 : Conclure à partir de la question C.3 que pour $d < 4$ l'état

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{\vec{k} \in I} \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{-\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}} - \Omega_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}} + \Omega_{\vec{k}}}} |\overline{0}\rangle$$

est normalisable et annihilé par tous les $\hat{b}_{\vec{k}}$. Donner sa norme. On notera $|\overline{0}\rangle_M$ l'état normalisé correspondant.

Que se passe-t-il pour $d \geqslant 4$? La représentation de Fock usuelle des $\hat{b}_{\vec{k}}$ et $\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}$, et leur représentation dans $\mathcal{F}_{QFT}$ sont-elles équivalentes ? ✎

C.7 : Montrer que $\sum_{\vec{k} \in I} \frac{(\Omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})^2}{4\omega_{\vec{k}}}$ converge si et seulement si $d < 3$. ✎

C.8 : Donner pour $d < 3$ la valeur de $\hat{H}$ agissant sur $|\overline{0}\rangle_M$, et en déduire que $\hat{H}$ est diagonalisable sur $\mathcal{F}_{QFT}$. Donner son spectre sans calculs supplémentaires.

Montrer que $\hat{H}$ n'est pas borné inférieurement si $d \geqslant 3$. ✎

C.9 : Pour $d < 3$, donner sous la forme d'une intégrale l'expression de la densité d'énergie (i.e. l'énergie par unité de volume) du fondamental de $\hat{H}$ agissant sur $\mathcal{F}_{QFT}$ dans la limite $L \to \infty$. ✎

C.10 : Évaluer cette intégrale explicitement pour $d = 2$. Restaurer les c et $\hbar$. ✎

2. Mais quand même de préférence en comprenant pourquoi c'est vrai !