Hydrodynamique pour un condensat de Bose-Einstein

Devoir à la maison pour le cours “Fluides quantiques" M1 ICFP 2014-2015

à rendre pour le vendredi 9 janvier 2015

A. Sinatra and K. Van Houcke

1 Derivation des équations hydrodynamiques

Nous avons dérivé l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps pour un condensat de Bose-Einstein atomique gazeux. En introduisant $\Psi = \sqrt{N}\phi$,

$$i\,\hbar\,\partial_t \Psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r}) + g|\Psi(\vec{r},t)|^2\right]\Psi(\vec{r},t)\,. \tag{1}$$

où ϕ est la fonction d'onde du condensat supposé pur, N est le nombre d'atomes, g est la constante de couplage caractérisant les interactions entre atomes et U est un potentiel extérieur de piégeage.
Nous allons récrire cette équation sous forme hydrodynamique en posant

$$\Psi = \sqrt{\rho}\,e^{iS/\hbar} \tag{2}$$

où ρ sera la densité et

$$\vec{v} = \frac{\vec{\mathrm{grad}} S}{m} \tag{3}$$

sera le champ de vitesse du superfluide.

1.1 Équation de continuité

En mécanique quantique on définit un courant de probabilité

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im}\left[\Psi^* \vec{\mathrm{grad}}\Psi - c.c.\right]. \tag{4}$$

L'équation de Schrödinger est telle que la probabilité est “conservée"

$$\partial_t|\Psi|^2 + \mathrm{div}[\,\vec{j}\,] = 0\,. \tag{5}$$

1. En utilisant les (2),(3),(4) montrer que $\vec{j} = \rho\,\vec{v}$.
2. À partir de (5) dérivez l'équation de continuité pour le superfluide.

1.2 Équation d'Euler

On va remplacer la (2) dans l'équation de Schrödinger non linéaire.

1. Montrer que la partie imaginaire de l'équation (1) redonne l'équation de continuité. Pour cela exprimer d'abord le terme d'énergie cinétique $-\hbar^2\Delta\Psi/(2m)$ en fonction de :
   $\Delta\sqrt{\rho}\,,\ \ (\vec{\mathrm{grad}}\,\rho)\cdot(\vec{\mathrm{grad}} S)\,,\ \ \Delta S\,,\ \ (\vec{\mathrm{grad}}\,S)^2$
   et utiliser le formulaire donné à la fin de l'énoncé.
2. Montrer que la partie réelle de (1) donne

$$m\partial_t\vec{v} + \vec{\mathrm{grad}}\left[\frac{1}{2}mv^2 + U + \rho g - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right] = 0 \tag{6}$$

3. Montrer que
$$\vec{\text{grad}}\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = m(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v} \tag{7}$$
si bien que l'on retrouve la dérivée convective de $\vec{v}$.
4. Le terme en $\Delta\sqrt{\rho}/\sqrt{\rho}$ est négligeable pour un condensat dans la limite de Thomas-Fermi et on obtient
$$m\left[\partial_t + (\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\right]\vec{v} = -\vec{\text{grad}}\left[U+\rho g\right] \tag{8}$$
5. Donnez une interprétation à chaque terme de cette équation. En particulier pour $U = 0$ (et $T = 0$) calculer l'énergie libre du gaz dans l'approximation de Thomas-Fermi et récrire l'équation d'Euler en faisant apparaître explicitement le terme de pression du gaz.

2 Linérisation des équations et vitesse du son

1. On suppose qu'on perturbe faiblement le potentiel de piégeage par rapport à sa valeur stationnaire :
$$U(\vec{r},t) = U_0(\vec{r}\,) + \delta U(\vec{r},t). \tag{9}$$
Cette perturbation entraîne de faibles déviations de la densité et du champ de vitesse du gaz de leurs valeurs stationnaires :
$$\begin{aligned}\rho(\vec{r},t) &= \rho_0(\vec{r}\,) + \delta\rho(\vec{r},t) & (10)\\ \vec{v}(\vec{r},t) &= \vec{0} + \delta\vec{v}(\vec{r},t). & (11)\end{aligned}$$
En négligeant les termes non linéaires en $\delta\rho$ et $\delta\vec{v}$ dans l'équation d'Euler et dans l'équation de continuité, obtenir deux équations d'évolution linéaires pour $\delta\rho$ et $\delta\vec{v}$.
2. On dérive une fois par rapport au temps l'équation linéaire sur $\delta\rho$. Montrer que l'on peut alors éliminer $\delta\vec{v}$ dans l'équation résultante. On obtient ainsi une équation fermée sur $\delta\rho$ que l'on précisera.
3. On se place aux instants postérieurs à la perturbation appliquée au gaz, si bien que $\delta U(\vec{r},t) = 0$ en tout point $\vec{r}$. Montrer que la perturbation de densité induite dans le gaz se propage selon l'équation
$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - \text{div}\left[\frac{g\rho_0(\vec{r}\,)}{m}\vec{\text{grad}}\,\delta\rho\right] = 0. \tag{12}$$
4. Si le condensat avait une densité au repos ρ_0 uniforme dans tout l'espace, quel serait le type d'ondes se propageant dans le gaz à l'issue de la perturbation δU ? On pourra préciser la relation de dispersion de ces ondes. Comment s'exprimerait la vitesse c de ces ondes en fonction de ρ_0 et de g ?
5. Application numérique : Calculer la vitesse c pour des atomes de ^{23}Na pour une densité de $4\times10^{20}/\text{m}^3$. On a $g = 1.1\times10^{-50}$ en unités du système international. (1 u.m.a. $= 1,56\times10^{-27}$kg).

3 Modes hydrodynamiques dans un piège harmonique isotrope

1. Considérons le cas d'un potentiel harmonique isotrope
$$U_0(\vec{r}\,) = \frac{1}{2}m\omega^2r^2. \tag{13}$$
La densité au repos ρ_0 du gaz vérifie $\rho_0(\vec{r}\,)g + U_0(\vec{r}\,) = \mu$ où μ est le potentiel chimique du gaz (on retrouve la limite de Thomas Fermi). En déduire que, par des changements d'échelle λ_i appropriés sur les variables de position, $r_i = \lambda_i u_i$, $i = 1,2,3$, l'équation de propagation (12) prend la forme
$$\frac{\partial^2 f(\vec{u},t)}{\partial t^2} - \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1,2,3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left[(1-u^2)\frac{\partial}{\partial u_i}f(\vec{u},t)\right] = 0 \tag{14}$$
avec $u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.
2. Comme le gaz est de taille finie, les fréquences propres Ω des modes de l'équation de propagation (12) constituent en fait un ensemble discret. Quelle équation aux valeurs propres doit satisfaire toute fréquence propre Ω ? On utilisera la forme réduite (14) de l'équation de propagation.

3. Nous cherchons une solution de l'équation aux valeurs propres sous la forme

$$f(\vec{u}\,) = F_l(u) Y_l^m(\theta, \phi) \tag{15}$$

où u est le module de $\vec{u}$, les angles θ, ϕ sont les angles polaire et azimutal du système de coordonnées sphériques d'axe z, et où $Y_l^m(\theta, \phi)$ est une harmonique sphérique. Quelle est la propriété du problème nous autorisant à choisir cette forme ? Obtenir l'équation aux valeurs propres sur $F_l(u)$. On rappelle l'action du laplacien en coordonnées sphériques sur une fonction f de la forme (15) :

$$\Delta f(\vec{u}\,) = \frac{\partial^2 f(u,\theta,\phi)}{\partial u^2} + \frac{2}{u}\frac{\partial f(u,\theta,\phi)}{\partial u} - \frac{l(l+1)}{u^2} f(\vec{u}\,). \tag{16}$$

4. On cherche une solution $F_l(u)$ sous la forme d'un développement en série en la variable u :

$$F_l(u) = u^s(a_0 + a_2\, u^2 + \ldots + a_{2k}\, u^{2k} + \ldots) \tag{17}$$

où s est un entier positif. Lorsqu'on injecte cette forme dans l'équation aux valeurs propres sur $F_l(u)$, il ne faut pas qu'un terme en u^{s-2} apparaisse. En déduire que $s = l$.

5. Etablir la relation de récurrence suivante sur les coefficients a_{2k}, en exprimant l'annulation du coefficient du terme en u^{l+2k} :

$$\begin{aligned} a_{2k+2}[(l+2k+2)(l+2k+1) + 2(l+2k+2) - l(l+1)] &= \\ a_{2k}\left[(l+2k)(l+2k-1) + 4(l+2k) - l(l+1) - 2\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right] &. \end{aligned} \tag{18}$$

6. On peut montrer que la série diverge en $u = 1$ si elle comporte un nombre infini de coefficients a_{2k} non nuls. Expliquer pourquoi ce n'est pas acceptable physiquement. On doit donc avoir un nombre fini de coefficients non nuls, et l'on appelle n le plus petit des indices k tels que $a_{2k+2} = 0$. En déduire que

$$\Omega^2 = \omega^2(2n^2 + 2n\,l + 3n + l). \tag{19}$$

7. Calculer la fréquence du mode de respiration $n = 1$, $l = 0$ et du mode dipolaire $n = 0$, $l = 1$ en fonction de ω.

4 Formulaire

$$\mathrm{div}\,(b\,\vec{a}) = \vec{a}\cdot \vec{\mathrm{grad}}\, b + b\,\mathrm{div}\,\vec{a} \tag{20}$$

$$\vec{\mathrm{grad}}\,(\vec{a}\cdot\vec{a}) = 2\,(\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{grad}})\,\vec{a} + 2\,\vec{a}\times(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) \tag{21}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{\mathrm{grad}}\, b) = 0 \tag{22}$$