
Examen du cours “Fluides quantiques” M1 ICFP 2014-2015

A. Sinatra and K. Van Houcke

Durée 3 heures, calculatrices et téléphones portables interdits

1 Exercice I : Dynamique de phase dans une Jonction de Josephson bosonique

1.1 Distribution de phase relative

Nous avons introduit en cours des états, dits “états de phase” pour lesquels la phase relative de deux superfluides est bien définie. On appelle $|\varphi\rangle$ l’état défini ci-dessous, de phase relative égale à 2φ :

$$|\varphi\rangle = |N\rangle : \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\varphi} \phi_a + e^{-i\varphi} \phi_b) \quad (1)$$

où nous avons mis N particules toutes dans même état superposition de de deux fonctions d’onde ϕ_a et ϕ_b avec une phase relative 2φ . Dans tout l’exercice on suppose N paire.

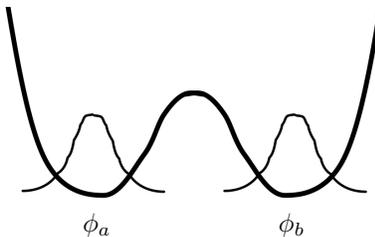


FIGURE 1 – Double puits de potentiel

Les fonctions d’onde ϕ_a et ϕ_b représentent ici respectivement l’état fondamental d’un condensat de Bose Einstein dans le puits de gauche et de droite d’un double puits de potentiel pour les atomes. Pour décrire le système à température nulle, dans tout l’exercice, nous allons nous restreindre à ces deux modes, si bien que les états de Fock $|N_a, N_b\rangle$, ayant exactement N_a particules dans la fonction d’onde ϕ_a et N_b particules dans la fonction d’onde ϕ_b , sont une base de l’espace de Hilbert qu’on considère.

En passant par la seconde quantification, on peut exprimer l’état de phase comme une superposition d’états de Fock

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\frac{e^{i\varphi} a^\dagger + e^{-i\varphi} b^\dagger}{\sqrt{2}} \right)^N |0\rangle = \sum_{N_a=0, N} c_{N_a} e^{i(N_a - N_b)\varphi} |N_a, N_b\rangle \quad (2)$$

où $N_b = N - N_a$ et les coefficients c_{N_a} font intervenir les coefficients binomiaux $c_{N_a} = \sqrt{\frac{1}{2^N} \binom{N}{N_a}}$.

1. Soit $\hat{n} = \hat{N}_a - \hat{N}_b$ l’opérateur différence du nombre de particules entre les deux puits. Montrer que

$$e^{i\alpha\hat{n}} |\varphi\rangle = |\varphi + \alpha\rangle \quad (3)$$

Que peut-on déduire de cette relation ?

2. Contrairement à ce que nous avons fait en cours, nous n’allons pas définir ici un opérateur phase, mais nous allons introduire une distribution de phase pour différents états des deux condensats. Montrer d’abord que

$$\langle \varphi | \varphi' \rangle = [\cos(\varphi - \varphi')]^N \quad (4)$$

Que peut-on en déduire sur la largeur en phase d’un état de phase dans la limite des grands N ? Autrement dit, quelle est la dépendance en $(\varphi - \varphi')$ de $\langle \varphi | \varphi' \rangle$ pour N grand ?

3. Chaque état à N particules des deux condensats peut s'exprimer sur la base sur-compète des états de phase

$$|\psi\rangle = \mathcal{A} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\pi} c(\varphi) |\varphi\rangle \quad (5)$$

où \mathcal{A} est un coefficient de normalisation.

Montrer que à la limite des grands N on obtient les coefficients $c(\varphi)$ par la formule

$$c(\varphi) = \mathcal{A}^{-1} \sum_{N_a=0, N} (c_{N_a})^{-1} e^{-i(N_a - N_b)\varphi} \langle N_a, N_b | \psi \rangle \quad (6)$$

On utilisera la relation

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{imx} = 2\pi \delta(x) \quad \text{pour } x \in [-\pi, \pi] \quad (7)$$

4. En approximant $\langle \varphi | \varphi' \rangle \simeq \sqrt{2\pi/N} \delta(\varphi - \varphi')$ pour N grand, montrer que pour avoir

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\pi} |c(\varphi)|^2 = 1 \quad (8)$$

le coefficient de normalisation \mathcal{A} vaut

$$\mathcal{A} \simeq \left(\frac{N\pi}{2} \right)^{1/4} \quad (9)$$

Nous allons interpréter $|c(\varphi)|^2$ comme une distribution de probabilité de la phase relative entre les deux condensats.

5. En utilisant le développement asymptotique des coefficients binomiaux pour grand N

$$\binom{N}{N_a} \simeq \frac{2^N}{\sqrt{\pi N/2}} e^{-\frac{(N_a - N_b)^2}{2N}} \quad (10)$$

calculer la distribution $P(n)$ du nombre relatif de particules $n = (N_a - N_b)$ dans l'état de phase (2). Calculer la valeur moyenne de n et l'écart type.

1.2 Brouillage de phase après interruption du couplage tunnel

Supposons qu'initialement, grâce à l'effet tunnel, les deux condensats sont préparés dans un état $|\psi(0)\rangle$ où la distribution de phase relative est donnée par une Gaussienne de largeur $\Delta\varphi$

$$c(\varphi, 0) = \mathcal{G}_0 \exp\left(-\frac{\varphi^2}{4\Delta\varphi^2}\right) \quad \text{avec } \frac{1}{\sqrt{N}} \ll \Delta\varphi \ll 1 \quad (11)$$

1. En négligeant la largeur en phase de l'état de phase par rapport à $\Delta\varphi$ puisque $\Delta\varphi \gg 1/\sqrt{N}$, montrer que le choix (11) correspond à prendre une distribution Gaussienne pour le nombre relatif de particules

$$\langle N_a, N_b | \psi(0) \rangle = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{(N_a - N_b)^2}{4\Delta n^2}\right) \quad (12)$$

avec $\Delta n \Delta\varphi = 1/2$. On changera la somme en une intégrale dont on étendra les bornes jusqu'à l'infini. On donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2 + bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/(4a)} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(a) > 0 \quad (13)$$

2. À $t = 0$ on interrompt le couplage tunnel entre les deux condensats, par exemple en levant la barrière entre les deux puits. Comme nous le montrerons plus tard dans la section 1.4, le système initialement dans l'état $|\psi(0)\rangle$ évolue alors avec le Hamiltonien

$$H = \frac{\hbar\chi}{4} (\hat{N}_a - \hat{N}_b)^2 \quad (14)$$

où on a supposé que les interactions entre atomes sont répulsives.

Exprimer le coefficient $\langle N_a, N_b | \psi(t) \rangle$ en fonction de $\langle N_a, N_b | \psi(0) \rangle$, puis calculer $|c(\varphi, t)|^2$ à une constante de normalisation près, en changeant la somme en une intégrale dont on étendra les bornes jusqu'à l'infini.

3. Montrer que la distribution de phase $|c(\varphi, t)|^2$ reste Gaussienne, et que la variance $\Delta\varphi^2$ en fonction du temps a la forme

$$\Delta\varphi^2(t) = \Delta\varphi^2(0) + \alpha \Delta n^2 t^2 \quad (15)$$

Donner l'expression du coefficient α .

4. Mettre en correspondance notre problème avec le problème de l'étalement d'un paquet d'onde Gaussien pour une particule libre. Que vaut pour nous la "masse effective" de la particule ?
Evaluer le temps de brouillage de la phase relative t_{br} au bout duquel

$$\Delta\varphi^2(t_{\text{br}}) \simeq 1 \quad (16)$$

en fonction de χ et de Δn^2 .

1.3 Evolution au temps longs : chats de Schrödinger

Dans cette section nous prenons comme état initial un état de phase, défini dans la section 1.1

$$|\psi(0)\rangle = |\varphi\rangle \quad (17)$$

On suppose que immédiatement après avoir préparé l'état (17), à $t = 0$, on interrompt le couplage tunnel si bien que système évolue avec le Hamiltonien (14) :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\chi}{4}\hat{n}^2 t} |\psi(0)\rangle \quad \text{avec} \quad \hat{n} = \hat{N}_a - \hat{N}_b \quad (18)$$

1. Montrer que, pour tout n paire, on a l'identité

$$e^{-i\frac{\pi}{8}n^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{2}(n+\frac{1}{2})} \right) \quad (19)$$

2. Montrer que pour in temps t_c

$$t_c = \frac{\pi}{2\chi} \quad (20)$$

l'état de phase initial évolue dans un état chat de Schrödinger, superposition de deux états de phase différents. On rappelle que N est paire.

3. Représenter schématiquement la distribution de phase $|c(\varphi)|^2$, avec $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, aux trois temps : $t = 0$, $t = t_c$ et $t = 2t_c$. Quel état obtient-on à $t = 2t_c$?

1.4 Hamiltonien non linéaire et application numérique

Dans cette section nous dérivons l'expression (14) du Hamiltonien, pour les deux condensats sans couplage tunnel, et en présence d'interactions répulsives entre atomes. On suppose que les deux puits a et b sont identiques et on appelle $H_a(\hat{N}_a)$ le Hamiltonien d'un condensat pur de N_a atomes dans le puits a , et la même chose pour b .

1. Expliquer pourquoi, en absence de couplage tunnel, on peut écrire pour le système décrivant les deux condensats

$$H(\hat{N}_a, \hat{N}_b) = H_a(\hat{N}_a) + H_b(\hat{N}_b) \quad (21)$$

2. On considère des états $|\psi\rangle$ des deux condensats, avec le même nombre moyen de particules dans chaque puits et avec des faibles fluctuations relatives du nombre de particules

$$\frac{\Delta N_a}{\langle N_a \rangle} = \frac{\Delta N_b}{\langle N_b \rangle} \ll 1 \quad \text{et} \quad \langle N_a \rangle = \langle N_b \rangle = \frac{N}{2} \quad (22)$$

Montrer soigneusement que les deux états initiaux considérés respectivement dans la section 1.2 et dans la section 1.3 satisfont cette contrainte, et expliquez pour quoi la chose reste vraie à tout temps si le système évolue avec le Hamiltonien (14).

3. On développe le Hamiltonien (21) autour de $N_a = \langle N_a \rangle = N/2$ et $N_b = \langle N_b \rangle = N/2$ à l'ordre deux. Expliquer comment on obtient

$$H(\hat{N}_a, \hat{N}_b) = E_0 + \frac{\hbar\chi}{4}\hat{n}^2 \quad \text{avec} \quad \hat{n} = \hat{N}_a - \hat{N}_b \quad (23)$$

et relier le coefficient χ à une dérivée du potentiel chimique μ_a (ici $\mu_a = \mu_b$) d'un condensat dans le puit a ou b .

4. Dans la limite de Thomas-Fermi, dans un puits harmonique isotrope de pulsation ω , on a

$$\mu_a(N_a) = \frac{\hbar\omega}{2} \left(15N_a \frac{a_s}{a_{\text{ho}}} \right)^{2/5} \quad (24)$$

où a_s est la longueur de diffusion en onde s caractérisant l'interaction entre deux atomes, a_{ho} est l'estension de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique dans le puits et N_a le nombre d'atomes.

Calculer le temps t_c (20) auquel on obtient un chat pour $\langle N_a \rangle = \langle N_b \rangle = 500$, $a_s = 5$ nm correspondant à des atomes de rubidium et $\omega/(2\pi) = 50$ s⁻¹. On rappelle que $a_{\text{ho}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ où m est la la masse d'un atome de rubidium $m = 87 \times 1,66 \times 10^{-27}$ kg et $\hbar \simeq 10^{-34}$ m² kg s⁻¹.

Calculer aussi le temps de brouillage t_{br} (16) en prenant $\Delta n(0) = \sqrt{N}$.

2 Exercice II : Fluctuations dans un gaz de bosons coupé en deux

On considère un gaz parfait de bosons de masse m , piégés dans un potentiel harmonique isotrope à trois dimensions. Le hamiltonien à une particule a la forme

$$\hat{h}_1 = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{r}^2. \quad (25)$$

On coupe le gaz piégé en deux (à gauche et à droite du plan $x = 0$) et on mesure les fluctuations de la différence du nombre de particules $N_G - N_D$ (voir Figure 2). On décrit le système dans l'ensemble grand canonique.

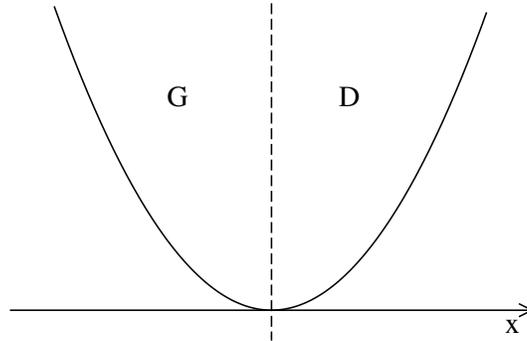


FIGURE 2 – On coupe le gaz piégé en deux (à gauche et à droite du plan $x = 0$) et on mesure les fluctuations de la différence du nombre de particules $N_G - N_D$.

2.1 Solution exacte

1. L'opérateur à un corps dont la moyenne donne la densité spatiale du gaz peut s'écrire comme suit

$$\hat{A}(\mathbf{r}) = \sum_i |i : \mathbf{r}\rangle \langle i : \mathbf{r}| \quad (26)$$

où l'indice i somme sur toutes les particules du le système. Il est sous-entendu que $|i : \mathbf{r}\rangle\langle i : \mathbf{r}|$ est l'opérateur $|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|$ pour la particule i et l'identité pour les autres particules.

Exprimer les opérateurs \hat{N}_G et \hat{N}_D qui comptent le nombre de particules dans le demi-espace à gauche ou à droite du plan $x = 0$ comme des intégrales de $\hat{A}(\mathbf{r})$.

2. Expliquer pourquoi $\langle N_G - N_D \rangle = 0$.
3. Les fonctions de corrélation $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, opérateurs à un corps et à deux corps respectivement, sont définies par

$$g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left\langle \sum_{i=1} |i : \mathbf{r}\rangle\langle i : \mathbf{r}'| \right\rangle \quad (27)$$

$$g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left\langle \sum_{i=1} \sum_{j \neq i} |i : \mathbf{r}\rangle\langle i : \mathbf{r}| \otimes |j : \mathbf{r}'\rangle\langle j : \mathbf{r}'| \right\rangle. \quad (28)$$

Physiquement, $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ représente la cohérence spatiale entre les points \mathbf{r} et \mathbf{r}' dans le gaz et $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ donne la probabilité de trouver une particule en \mathbf{r} et une en \mathbf{r}' .

Montrer que

$$\text{Var}(N_G - N_D) = \langle N \rangle + 2 \left[\int_G d^3\mathbf{r} \int_G d^3\mathbf{r}' g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \int_G d^3\mathbf{r} \int_D d^3\mathbf{r}' g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \quad (29)$$

où \int_G et \int_D indiquent les intégrales dans les demi-espaces de gauche et de droite et où $\hat{N} = \hat{N}_G + \hat{N}_D$ est l'opérateur nombre total de particules.

4. Soit $\{|\lambda\rangle\}$ la base propre de \hat{h}_1 avec $\hat{h}_1|\lambda\rangle = \epsilon_\lambda|\lambda\rangle$. Dans l'ensemble grand canonique on montre que la valeur moyenne d'une observable à un corps $\hat{A} = \sum_i A(i)$ est

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \sum_\lambda \langle N_\lambda \rangle \langle \lambda | \mathcal{A} | \lambda \rangle \quad (30)$$

où $\langle N_\lambda \rangle$ est les nombre moyen d'occupation de l'état λ .

Monter que la densité spatiale $\rho(\mathbf{r})$ et la fonction $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ s'obtiennent en prenant des éléments de matrice de l'opérateur densité à un corps $\hat{\rho}^{(1)}$ introduit dans le cours

$$\hat{\rho}^{(1)} = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\hat{h}_1} - 1} \quad (31)$$

où $z = e^{\beta\mu}$ est la fugacité.

5. Dans l'ensemble grand canonique on montre que

$$g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r})g^{(1)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \quad (32)$$

Nous allons donc calculer la fonction $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Exprimer $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ comme une série en puissances de la fugacité z .

6. L'expression

$$g_{1P}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r}' | \frac{e^{-\beta\hat{h}_1}}{\mathcal{Z}} | \mathbf{r} \rangle \quad (33)$$

représente la fonction $g^{(1)}$ pour une seule particule dans un potentiel harmonique où \mathcal{Z} est la petite fonction de partition.

- (a) Calculer \mathcal{Z} pour une particule dans un potentiel harmonique isotrope à 3D. On exprimera le résultat en fonction de

$$\eta \equiv \beta\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad (34)$$

- (b) On donne l'expression de la fonction $g_{1P}^{(1)}$ pour une seule particule dans un potentiel harmonique (voir Landau vol. V, § 30)

$$g_{1P}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta x} \right)^3 e^{-\frac{1}{2\Delta x^2} \left(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2} \right)^2} e^{-\frac{\Delta p^2}{2\hbar^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \quad (35)$$

avec

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{1}{\sqrt{2\text{th}\frac{\eta}{2}}}; \quad \Delta p = \sqrt{\hbar m\omega} \frac{1}{\sqrt{2\text{th}\frac{\eta}{2}}} \quad (36)$$

Utiliser ces résultats pour exprimer la fonction $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ du système à $\langle N \rangle$ particules comme une série de puissance de la fugacité z .

7. Après avoir judicieusement redéfini la fugacité $z \rightarrow \tilde{z}$, montrer que

$$\langle N \rangle = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{z}^l \left(\frac{1 + \coth\frac{\eta}{2}}{2} \right)^3 \quad (37)$$

Expliquez l'intérêt de la nouvelle définition de la fugacité.

De façon similaire (on ne cherchera pas à le montrer) on obtient :

$$\text{Var}(N_G - N_D) = \langle N \rangle + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \tilde{z}^s \quad (38)$$

avec

$$c_s = \sum_{l=1}^{s-1} \frac{1 - \frac{4}{\pi} \arctan \left[\text{th} \frac{l\eta}{2} \text{th} \frac{(s-l)\eta}{2} \right]^{1/2}}{(1 - e^{-\eta s})^3} \quad (39)$$

et $c_1 = 0$.

Les équations (37), (38) et (39) constituent la solution exacte de notre problème. Nous utiliserons ces résultat plus tard dans la section 2.3.

2.2 Régime du condensat pur $T = 0$

A température nulle toutes les particules sont dans le condensat. Nous avons alors $\langle N_0 \rangle = \langle N \rangle$ et $\langle N_{\lambda \neq 0} \rangle = 0$.

1. A partir des équations (30) et (32), calculer les fonctions $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dans l'ensemble grand canonique dans ce régime en fonction de la fonction d'onde du fondamental ϕ_0 .
2. Calculer $\text{Var}(N_G - N_D)$ dans ce régime.
3. Expliquer pourquoi nous pouvons utiliser l'ensemble grand canonique pour étudier notre problème bien que dans cet ensemble le condensat aie des fluctuations anormales.

2.3 Formules approchées pour $k_B T \gg \hbar\omega$

Dans cette partie nous considérons la limite d'un grand nombre de particules et d'une température $k_B T \gg \hbar\omega$ ce qui est généralement le cas expérimentalement. Nous pourrions alors dériver des formules approchées simples qui nous permettrons de faire des prédictions analytiques et de comprendre la physique du problème.

2.4 Régime non condensé $T > T_c$

Dans cette sous-section nous verrons que pour $T > T_c$ la variance de la différence du nombre de particule à droite et à gauche est seulement légèrement super-poissonnienne.

1. En l'absence de condensat, pour $N \gg 1$ et $k_B T \gg \hbar\omega$, on peut développer les expressions de $\langle N \rangle$ et de $\text{Var}(N_G - N_D)$ en prenant la limite $\eta \rightarrow 0$ dans chaque terme de la somme. Montrer que à l'ordre le plus bas on obtient

$$\langle N \rangle = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(\tilde{z}) \quad (40)$$

avec $g_\alpha(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^\alpha}$ fonction de Bose d'indice α .

2. Déduire l'expression de la température critique de condensation T_c , en fonction de $\langle N \rangle$ et ω .
3. Prendre la même limite $\eta \rightarrow 0$ dans l'expression (38) de $\text{Var}(N_G - N_D)$. Garder l'ordre dominant et exprimer $\text{Var}(N_G - N_D)/\langle N \rangle$ en fonction de \tilde{z} et de T/T_c .
4. On donne $\zeta(2)/\zeta(3) \simeq 1,37$ où $\zeta(\alpha) = g_\alpha(1)$ est la fonction de Riemann d'argument α . Montrer que, pour $T = T_c$, $\text{Var}(N_G - N_D)/\langle N \rangle$ est légèrement supérieur à un, si bien que la variance de la différence du nombre de particule est seulement légèrement super-poissonnienne.

2.5 Régime condens e $T < T_c$

Dans cette sous-section nous verrons que pour $T < T_c$ la variance de la différence du nombre de particule à droite et à gauche est fortement super-poissonnienne.

1. Les résultats exacts (37)-(39) ne sont pas ais es à utiliser dans le régime condens e car, pour $\tilde{z} \simeq 1$ les sommes convergent très lentement. Montrer qu'on peut les r ecrire sous la forme équivalente suivante

$$\langle N \rangle = \langle N_0 \rangle + \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{z}^l \left[-1 + \left(\frac{1 + \coth(l\eta/2)}{2} \right)^3 \right]. \quad (41)$$

et

$$\text{Var}(N_L - N_R) = \langle N \rangle + c_\infty \langle N_0 \rangle + \sum_{s=1}^{\infty} (c_s - c_\infty) \tilde{z}^s \quad (42)$$

où $\langle N_0 \rangle$ est le nombre moyen de particules dans le condensat et où nous avons introduit $c_\infty \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} c_s$. On ne cherchera pas à montrer que

$$c_\infty \simeq \frac{2 \ln 2}{\eta}. \quad (43)$$

2. S'assurer que le terme entre crochets, qui apparaît dans la somme en (41), tend bien vers zéro pour $l \rightarrow \infty$.
3. Dans l'équation (41), nous pouvons maintenant poser $\tilde{z} = 1$ et prendre la limite $\eta \rightarrow 0$ dans chaque terme de la somme. Garder le terme dominant en $1/\eta$ et montrer qu'on retrouve l'expression habituelle pour la fraction condensée

$$\frac{\langle N_0 \rangle}{\langle N \rangle} \simeq 1 - \frac{T^3}{T_c^3}. \quad (44)$$

4. La même procédure peut être utilisée pour traiter la somme (dernier terme) en (42). Le calcul est similaire à celui de la question 3 de la partie 2.4. En effet le terme rajout e c_∞ est sub-dominant en $1/\eta$ par rapport à c_s . Montrer que pour $\eta \rightarrow 0$ l'on obtient

$$\sum_{s=1}^{\infty} (c_s - c_\infty) \sim \langle N \rangle \frac{\zeta(2) - \zeta(3)}{\zeta(3)} \frac{T^3}{T_c^3} \quad (45)$$

5. Il reste à r ecrire le deuxième terme en (42) en éliminant $\langle N_0 \rangle$ en faveur de $\langle N \rangle$ et de T/T_c . Montrer qu'on obtient alors la formule simple suivante (valable pour $T < T_c$)

$$\text{Var}(N_L - N_R) \simeq \langle N \rangle \left[1 + \frac{\zeta(2) - \zeta(3)}{\zeta(3)} \frac{T^3}{T_c^3} + 2 \ln 2 \left(\frac{k_B T_c}{\hbar \omega} \right) \left(1 - \frac{T^3}{T_c^3} \right) \frac{T}{T_c} \right]. \quad (46)$$

6. Dites lesquelles des affirmations suivantes concernant les trois termes à l'intérieur des crochets dans l'expression (46) et $\text{Var}(N_L - N_R)$ vous semblent correctes :
 - (a) Le premier terme (i.e. le "1") est d'origine quantique.
 - (b) Le premier terme est présent même pour $T = 0$.
 - (c) Le deuxième terme est une contribution des seules particules non condensées.
 - (d) Le deuxième terme est inférieur à un.
 - (e) Le troisième terme est un terme est nul en absence du condensat.
 - (f) Le troisième terme diverge pour $T = T_c$.
 - (g) Le troisième terme est un terme est nul pour $T = 0$.

- (h) Le troisième terme met en jeu à la fois la fraction condensée et les particules non condensées.
- (i) Pour $T < T_c$ l'expression de $\text{Var}(N_L - N_R)$ donnée par (46) est positive.
- (j) Pour des fermions on aurait la même expression de $\text{Var}(N_L - N_R)$ sauf pour le premier terme qui aurait le signe opposé.
7. En Figure 3 nous montrons $\text{Var}(N_L - N_R)$ divisée par $\langle N \rangle$ en fonction de T/T_c . En gardant seulement le troisième terme dans les crochets dans (46) estimer pour quel valeur de T/T_c $\text{Var}(N_L - N_R)$ est maximum. Comparer avec la figure. On donne $2^{-2/3} \simeq 0.63$.
8. Toujours en gardant seulement le troisième terme dans les crochets dans (46) exprimer la valeur maximale de $\text{Var}(N_L - N_R)$ en fonction de $\hbar\omega$ et de $k_B T_c$.
9. Comment cette valeur maximale dépend-elle de $\langle N \rangle$?

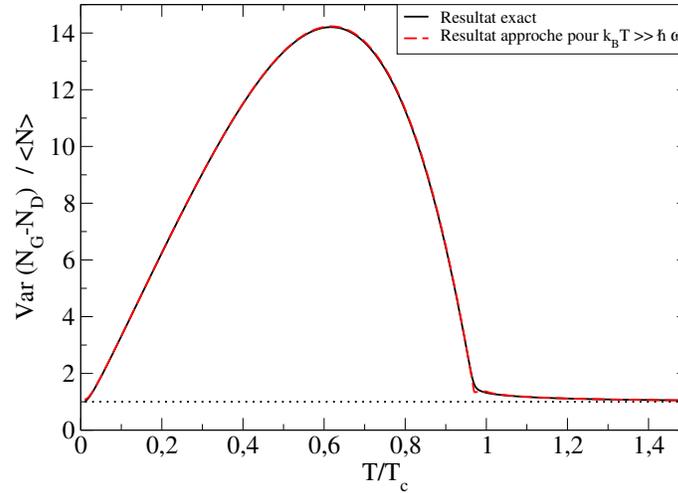


FIGURE 3 – Variance de $N_L - N_R$ (divisée par $\langle N \rangle$) en fonction de la température (divisée par T_c). $\langle N \rangle = 13000$. Ligne continue : résultat exact. Ligne tiretée : approximation pour $k_B T \gg \hbar\omega$. (Les deux courbes sont presque superposées).