Excitations à impulsion fixée dans un gaz de Bose à 1D

Examen du cours “Fluides quantiques” M1 ICFP 2015-2016

Alice Sinatra et Kris Van Houcke

Dans tout l'examen nous considérons un gaz homogène unidimensionnel composé de bosons de masse m, non relativistes et sans spin. Nous allons étudier les excitations du gaz avec un modèle de champ classique avec interactions de contact dans l'ensemble grand canonique, ce qui revient à utiliser le hamiltonien (grand canonique) :

$$H = \int_{\mathbb{R}} dx \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 + \frac{g}{2}|\psi|^4 - \mu|\psi|^2 \right\} \tag{1}$$

et l'équation du mouvement

$$i\hbar\partial_t \psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + g|\psi|^2 - \mu \right] \psi \tag{2}$$

dont on remarquera l'identité formelle avec l'équation de Gross-Pitaevskii étudiée en cours. Dans tout l'examen on se limite au cas $g > 0$.

1 Etat fondamental

1. On veut trouver le champ $\psi(x)$ qui minimise l'énergie H. En imposant $\delta H = 0$ pour chaque variation $\delta\psi$, $\delta\psi^*$

$$\delta H = \int \delta\psi^* \frac{\partial H}{\partial \psi^*} + \delta\psi \frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \qquad \forall \quad \delta\psi,\ \delta\psi^* \tag{3}$$

   trouver une équation différentielle pour ψ. On reconnaîtra l'équation de Gross-Pitaevskii indépendante du temps.
2. Montrer que le champ uniforme $\psi_0 = \sqrt{\rho}$, où ρ est la densité du gaz, est solution de l'équation et calculer μ en fonction de ρ (équation d'état).
3. Calculer l'impulsion $P_0 = -i\hbar \int \psi_0^* \frac{d\psi_0}{dx}$ de cette solution.

2 Etat qui minimise l'énergie à impulsion fixée

On veut trouver le champ $\psi(x)$ qui minimise l'énergie $(H - E_0)$ pour une impulsion moyenne fixée, où $E_0 = H[\psi_0]$ est l'énergie de l'état fondamental. Pour cela nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange, et chercher les extrema de

$$F = (H - E_0) - vP \qquad \text{avec} \qquad v \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \quad P = -i\hbar \int \psi^* \frac{d\psi}{dx} \tag{4}$$

1. Trouver l'équation différentielle satisfaite par le minimiseur ψ en imposant $\delta F = \int \delta\psi^* \frac{\partial F}{\partial \psi^*} + \delta\psi \frac{\partial F}{\partial \psi} = 0$ pour chaque variation $\delta\psi$ et $\delta\psi^*$.
2. Adimensionner l'équation en prenant la longueur de relaxation $\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{m\mu}}$ comme unité de longueur $\bar{x} = \frac{x}{\xi}$ et en introduisant le champ normalisé $\bar{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\rho}}$. On cherche des excitations localisées si bien que, pour notre système infini à la limite thermodynamique

$$\lim_{x\to\pm\infty} |\bar{\psi}| = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{d\bar{\psi}}{dx} = 0\,. \tag{5}$$

   Montrer que l'équation de Schrödinger non linéaire obtenue (SNL) sur $\bar{\psi}$ dépend seulement du paramètre $s \equiv \frac{v}{c}$ où $c = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$ est la vitesse du son. Dans toute la suite on suppose que $|s| \leq 1$.

3. Dans les questions qui suivent nous allons intégrer SNL. L'idée est de reconnaître formellement une équation de Newton pour une particule fictive à 1D dans un potentiel, équation que l'on intègre aisément en utilisant la conservation de l'énergie de la particule fictive.
   (a) Introduisez dans SNL précédemment obtenue la décomposition module phase du champ
   $$\bar{\psi}(\bar{x}) = \phi(\bar{x})e^{i\theta(\bar{x})} \qquad \text{avec} \qquad \phi(\bar{x}), \theta(\bar{x}) \in \mathbb{R} \tag{6}$$
   (b) Prendre la partie imaginaire de SNL, reconnaître une dérivée totale et obtenir
   $$\phi^2(\theta' - s) = \text{constante} \tag{7}$$
   où $\theta' \equiv \frac{d\theta}{d\bar{x}}$.
   (c) En imposant $\lim_{x\to\pm\infty}\theta' = 0$ et $\lim_{x\to\pm\infty}\phi = 1$ (excitation localisée) trouver la valeur de la constante et exprimer θ' en fonction de s et ϕ.
   (d) Prendre la partie réelle de SNL et montrer qu'on obtient pour ϕ l'équation de Newton suivante (où notre $\bar{x}$ joue le rôle d'un temps t et notre $\phi(\bar{x})$ joue le rôle de $x_{\text{Newt}}(t)$)
   $$\phi^{''} = -\frac{dU_{\text{New}}(\phi)}{d\phi} \quad \text{avec} \quad U_{\text{Newt}}(\phi) = \frac{s^2}{2\phi^2} + \frac{s^2\phi^2}{2} - \frac{\phi^4}{2} + \phi^2 \tag{8}$$
   (e) La conservation de l'énergie pour le problème de Newton équivalent s'écrit
   $$\frac{1}{2}\phi'^2 + U_{\text{Newt}}(\phi) = E_{\text{Newt}} \tag{9}$$
   En utilisant la condition de perturbation localisée : $\lim_{\bar{x}\to\pm\infty}\phi' = 0$ et $\lim_{\bar{x}\to\pm\infty}\phi = 1$, exprimer E_{Newt} en fonction de s et écrire explicitement l'équation
   $$\frac{d\phi}{\sqrt{2(E_{\text{Newt}} - U_{\text{New}}(\phi))}} = d\bar{x} \tag{10}$$
   en y remplaçant E_{Newt} et $U_{\text{New}}(\phi)$ par leur valeur.
   (f) Montrer qu'après le changement de variable $F = \phi^2$ (on supposera $\phi^2 < 1$) on obtient l'équation
   $$\frac{dF}{2(1-F)\sqrt{F-s^2}} = d\bar{x} \tag{11}$$
   (g) On donne une primitive
   $$\int \frac{dF}{2(1-F)\sqrt{F-s^2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1-s^2} - \sqrt{F-s^2}}{\sqrt{1-s^2} + \sqrt{F-s^2}}\right) \tag{12}$$
   En déduire que
   $$\phi_s^2(\bar{x}) = s^2 + (1-s^2)\,\text{th}^2(\sqrt{1-s^2}\,\bar{x}) \tag{13}$$
   est solution de l'équation sur le module carré de $\bar{\psi}$. On trouve en fait un nombre infini de solutions dégénérées qui diffèrent par une translation $\bar{x} \to \bar{x} - \bar{x}_0$.
   (h) Montrer que
   $$\theta_s = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{1-s^2}\,\text{th}(\sqrt{1-s^2}\,\bar{x})}{s}\right) \tag{14}$$
   est solution de l'équation (7) sur la phase de $\bar{\psi}$. On utilisera l'équation (13). Dans la suite, on appellera $\bar{\psi}_s(x)$ le champ solution.
4. Représenter sur une figure le module au carré $\phi_s^2(x)$ et la phase $\theta_s(x)$ du champ solution en fonction de $\bar{x}$ dans le cas particulier $s = 0^+$. Montrer que la perturbation en densité s'étend sur une longueur caractéristique que l'on précisera et que la phase varie brusquement sur le même intervalle.
5. Donner la valeur du saut de phase pour s quelconque ($|s| \le 1$),
   $$\Delta\theta_s \equiv \lim_{x\to-\infty}\theta_s(x) - \lim_{x\to+\infty}\theta_s(x) \tag{15}$$
6. Montrer que pour $s = 1$, $\psi_s(x)$ redonne l'état fondamental ψ_0 à un facteur de phase constant près.

3 Evolution temporelle et interprétation de v (donc de s)

1. Montrer que si $\psi(x)$ est solution de l'équation de Schrödinger non linéaire
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+g|\psi|^2-\mu+i\hbar v\frac{d}{dx}\right)\psi(x)=0 \tag{16}$$
alors $\tilde{\psi}(x,t)\equiv\psi(x-vt)$ est solution de l'équation de Schrödinger non linéaire dépendant du temps (2).
2. Donner une interprétation physique de ce fait.
3. En déduire que la solution trouvée dans la section 2 pour $\psi(x)$ décrit une perturbation de phase et de densité qui se propage sans déformation (il s'agit d'un soliton gris) et donner une interprétation physique de v.

4 Energie et quantité de mouvement du soliton

1. On veut déterminer l'énergie du champ $\psi_s(x)$ de la section 2 par rapport à l'énergie du fondamental. En utilisant les résultats obtenus précédemment, montrer qu'on se ramène à une intégrale simple
$$\epsilon_s\equiv H[\psi_s]-E_0=\frac{c\,p_F}{\pi}\int_{\mathbb{R}}d\bar{x}(\phi_s(\bar{x})^2-1)^2 \tag{17}$$
où $p_F=\hbar\pi\rho$ est l'impulsion de Fermi pour un gaz unidimensionnel de fermions de même densité.
2. Calculer l'intégrale dans (17) et montrer que
$$\epsilon_s=\frac{c\,p_F}{\pi}\frac{4}{3}(1-s^2)^{3/2} \tag{18}$$
3. On va maintenant calculer la quantité de mouvement $p_s\equiv P[\psi_s]$ du champ $\psi_s(x)$. Comme ψ_s minimise $H[\psi]-E_0-vP[\psi]$, montrer que
$$\frac{d}{ds}\left[H[\psi_s]-E_0-csP[\psi_s]\right]=-c\,P[\psi_s] \tag{19}$$
En déduire que
$$\frac{dp_s}{ds}=\frac{1}{c\,s}\frac{d\epsilon_s}{ds} \tag{20}$$
4. Que vaut $p_{s=1}$? En intégrant l'équation précédente entre 1 et s,
$$p_s-p_{s=1}=-\frac{4p_F}{\pi}\int_1^s\sqrt{1-t^2}dt \tag{21}$$
montrer qu'on a finalement
$$p_s=\frac{2p_F}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-s\sqrt{1-s^2}-\arcsin s\right) \tag{22}$$
Avec les équations (22) et (18) on peut représenter paramétriquement la courbe $\epsilon_s(p_s)$ comme sur la figure 1.
5. A partir des formules (22) et (18) montrer analytiquement que $\epsilon_s(p_s)$ est symétrique par rapport à $p_s=p_F$.
6. Donner les valeurs des quantités ϵ_s, p_s et $\frac{d\epsilon_s}{dp_s}$ pour $s=0, s=1, s=-1$.

5 Vitesse critique de Landau

1. Rappeler la définition de la vitesse critique de Landau pour un spectre d'excitation qui a une relation de dispersion $\epsilon(k)$.
2. Montrer que les excitations de la branche ψ_s représentée sur la figure 1 conduisent à une vitesse critique de Landau inférieure à celle de la branche d'excitation phononique et dont on précisera la valeur.
3. Contrairement à ce qu'on a fait jusqu'ici, dans ce groupe de questions on considère d'abord un système de taille finie L, de densité $\rho=N/L$, avec des conditions aux limites périodiques, et on prend la limite thermodynamique $N\to\infty$, $L\to\infty$ avec $N/L=\rho$, seulement dans un deuxième temps.

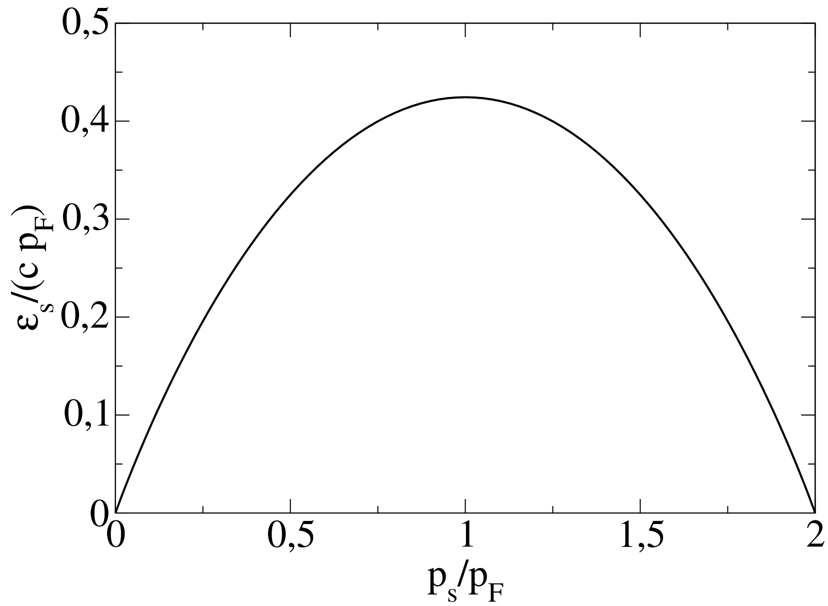

FIGURE 1 – Relation de dispersion $\epsilon_s(p_s)$ pour l'état d'énergie minimale à impulsion fixée dans un gaz de bosons à une dimension. Cette branche d'excitation qu'on a étudiée ici dans l'approximation d'un champ classique, existe aussi dans la solution exacte du problème quantique. Elle est appelée dans ce contexte la "deuxième branche de Lieb".

(a) Considérons, pour le système de taille finie, le champ ψ^L qui minimise l'énergie à l'impulsion fixée $p_s = 2p_F$. Que vaut l'impulsion par particule ?

(b) Par quelle transformation le champ ψ^L peut-il être obtenu à partir du fondamental ψ_0^L ? Que vaut son énergie d'excitation ϵ^L (différence d'énergie entre ψ^L et ψ_0^L) ?

(c) On admettra que la vitesse critique de Landau pour un système de taille finie assez grand est imposée par l'état ψ^L. Donner sa valeur (on n'a pas besoin de faire de calcul). Que vaut-elle à la limite thermodynamique ?

(d) Dans notre système à 1D l'énergie d'excitation et l'impulsion de l'état ψ^L restent finies à la limite thermodynamique. En va-t-il de même à 3D ?

6 Barrière de potentiel d'un supercourant

1. On a préparé le système dans l'état ψ_s avec $p_s = 2p_F$. Evaluer la hauteur de la barrière de potentiel qui sépare l'état ψ_s en question de l'état fondamental ψ_0 pour notre système à 1D à la limite thermodynamique.