

Stage de recherche, MIP 2^{me} anne

Thierry MORA

sous la direction d'Arezki BOUDAUD

Plaques élastiques minces : étude du cœur des singularités

Groupe d'Yves Couder

Laboratoire de Physique Statistique

École normale supérieure

24, rue Lhomond

75231 Paris Cedex 05

Table des matières

1	Sur les plaques minces élastiques	7
1.1	Traction et flexion	7
1.2	Le d-cône	9
2	Dispositif expérimental	11
2.1	Principe	11
2.2	Réalisation pratique de l'expérience	11
2.3	Résultats connus	13
3	Des petits trous	17
3.1	Principe de l'expérience	17
3.2	Premières observations	17
3.3	Résultats	17
3.4	Estimation théorique de l'ordre de l'énergie du cœur	19
4	Des plaques de bronze	23
4.1	Modèle de mémoire résiduelle	23
4.2	Principe de l'expérience	23
4.3	Premières observations	24
4.4	Résultats	24
4.4.1	Vérification du seuil de mémoire	26
4.4.2	Expression de l'énergie	27

Introduction

Que se passe-t-il quand on froisse une feuille de papier ? Comment se comporte une canette de soda quand on l'écrase ? Sous quelles contraintes les revêtements d'avion finissent-t-ils par se déformer ? Les toitures futuristes dont sont parés nos plus glorieux bâtiments (centres commerciaux, aéroports) peuvent-t-elles résister à tous les vents ? Comment la carrosserie d'une voiture se déforme-t-elle lors d'un accident ? Voilà autant de scénarios catastrophiques auxquels se consacre l'étude des coques minces, en tentant de caractériser les déformations subies par une structure sous certaines contraintes.

Les enjeux liés à ces études sont divers : parfois il s'agira, pour l'industriel, de concevoir des coques à la fois solides et esthétiques. Parfois, à l'inverse, le cahier des charges prévoira des déformations réparties dont le but sera "d'absorber" les chocs, comme pour la partie avant d'une voiture par exemple.

Ces problèmes relèvent de l'élasticité, et plus particulièrement de l'élasticité des coques. Ce domaine, consacré à l'étude des structures déformables surfaciques, est encore largement inexploré malgré les nombreux efforts entrepris dans cette voie. Naturellement, les équations qui régissent la forme de telles structures sont difficilement solubles analytiquement, et présentent une forte sensibilité aux conditions expérimentales. Avant la dernière décennie, on se contentait donc de résoudre le problème dans le cas de faibles contraintes, à l'aide de développements linéaires. Mais depuis dix ans, on s'efforce de mieux caractériser les régimes à fortes contraintes. On notera que pour le métal, le caractère partiellement irréversible des déformations ajoute un peu de piment à l'affaire.

L'objet de notre étude consiste principalement en l'étude des caractéristiques des singularités qui apparaissent dans les régimes fortement contraints. Ces singularités, qui s'étendent sur des surfaces négligeables, concentrent des énergies élastiques considérables, et présentent un intérêt majeur pour l'étude des déformations.

Dans un premier temps, nous pensions, en reprenant les travaux déjà effectués par Arezki Boudaoud [3] sur les plaques fléchies soumises à une contrainte centrale et ponctuelle, tenter des expériences de *piégeage* sur les singularités nées des régimes fortement contraints. Deux expériences semblaient alors intéressantes :

- la première consistait à utiliser des matériaux métalliques, pour lesquels les déformations peuvent être irréversibles, à la place du mylar.

On pensait alors étudier les caractéristiques d'une *deuxième* déformation qui différerait de la première à cause les "cicatrices" que cette dernière aurait laissées. On s'attendait alors à ce que la seconde déformation soient influencée par la première, notamment au niveau des singularités.

- la seconde expérience, quant à elle, consistait à percer des trous à même la plaque dans le but de piéger ces mêmes singularités.

Dépassant nos espérances, ces expériences se sont révélées plus fructueuses que prévues. Elles nous ont permis, entre autres, de proposer une évaluation de l'énergie contenue dans le cœur des singularités.

1 Sur les plaques minces élastiques

1.1 Traction et flexion

On ne s'intéresse ici qu'aux plaques minces, c'est-à-dire aux coques dont la forme au repos est un plan et dont l'épaisseur est négligeable devant les autres dimensions. Il existe deux types de contraintes qui s'exercent sur une plaque mince élastique. Le premier type, appelé traction, consiste en l'élongation ou la compression du matériau dans une ou plusieurs directions. Le second, appelé flexion, est propre aux plaques minces et résulte des contraintes qu'imposent la courbure de la plaque. Comme il semble naturel, la flexion requiert beaucoup moins d'énergie que la traction. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre une feuille de papier et de comparer les forces mises en jeu pour l'allonger d'une part, et pour la courber d'autre part : la seconde opération demande beaucoup moins d'efforts. Il est néanmoins important de noter que la flexion est elle-même un phénomène d'élongation élastique. En effet, quand on courbe une plaque d'épaisseur non nulle, on remarque que les longueurs à l'extérieur et à l'intérieur de la courbe diffèrent, alors que ces deux longueurs sont identiques au repos (voir la figure 10). Il s'agit donc bien là d'une élongation et d'une compression, mais proportionnées à l'épaisseur de la plaque : plus celle-ci est mince, moins l'élongation et la compression seront grandes.

Il convient donc de se munir d'un modèle décrivant les contraintes nées de l'élongation ou de la compression, ce qui nous permettra de décrire n'importe quel système de plaque mince élastique. Pour un système élastique tri-dimensionnel de longueur l et de section transverse S , on dira qu'à une élongation δl correspond une force d'intensité :

$$F = ES \frac{\delta l}{l}.$$

Cette élongation (resp. compression) aura pour effet de réduire (resp. augmenter) la surface du système de la façon suivante :

$$\frac{\delta S}{S} = \nu \frac{\delta l}{l}.$$

Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont des constantes propres à la nature du matériau considéré.

On décrit la forme d'une plaque mince d'épaisseur h par une équation de surface du type $z = \xi(x, y)$. Dans ces conditions, on montre ([1], [4]) que

l'énergie de la plaque s'écrit :

$$\mathcal{E} = \int dx dy \left(\frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} (\Delta\xi)^2 + \frac{hE}{2} (\Delta^{-1}[\xi, \xi])^2 \right), \quad (1)$$

$$\text{où} \quad [\xi, \xi] = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right)^2,$$

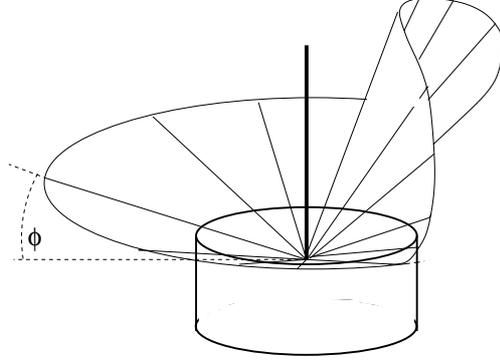
à laquelle viennent s'ajouter des termes de bords dont nous ne nous soucierons pas. Le premier terme de l'intégrale correspond à l'énergie de *flexion* E_f . Quant au second terme, qui fait intervenir le laplacien inverse (avec conditions nulles aux bords) de la courbure de Gauss $[\xi, \xi]$, il correspond à l'énergie de *traction* E_t . Si on appelle Z le déplacement transverse au plan d'équilibre et L la longueur de la plaque, un rapide calcul d'ordres de grandeur nous donne :

$$E_f \approx Eh^3 \frac{Z^2}{L^2} \quad \text{et} \quad E_t \approx Eh \frac{Z^4}{L^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{E_t}{E_f} \approx \left(\frac{Z}{h} \right)^2,$$

ce qui corrobore notre première intuition quant à la prépondérance de la traction sur la flexion. La forme prise naturellement par la plaque est *a priori* celle qui sera la moins coûteuse en énergie. Les formes à privilégier dans la recherche des minima seront donc celles qui ne présenteront pas de traction du tout. Ce sont les surfaces isométriques à un plan, dites *développables* : l'absence de toute élongation ou contraction a pour effet de conserver les longueurs le long de la surface. Cette situation correspond à une *courbure de Gauss* nulle : $[\xi, \xi] = 0$. On rappelle que la courbure de Gauss correspond au produit des deux courbures principales d'une surface (la plus petite et la plus grande des courbures en un point).

Pourtant, quiconque a un jour froissé une feuille de papier sait que dans certains cas d'autres conformations sont possibles. En effet, quand les conditions limites deviennent irréalisables pour une surface développable régulière, des singularités apparaissent sur la surface développable. Le pli, par exemple, correspond à une zone de singularité linéique. On note à ce propos qu'une surface isométrique dans son ensemble doit nécessairement adopter une forme "cylindrique", c'est-à-dire invariante par translation dans une direction : en d'autres termes, si l'on prend une feuille de papier souple, il ne sera possible de la courber que dans une direction, à moins de la froisser.

Un autre exemple de singularité est le d-cône, ou cône développable, que nous allons étudier plus précisément.

FIG. 1 – Représentation d'un d-cône d'angle minimum imposé ϕ .

1.2 Le d-cône

Un d-cône est une surface conique (d'équation cylindrique $z = r\Psi(\theta)$) ayant la propriété d'être développable. La seule singularité se trouve au sommet du d-cône, le reste de la surface étant isométrique à un plan. Cette condition d'isométrie s'écrit :

$$\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) (\Psi''(\theta) + \Psi(\theta)) = 0.$$

En dehors du point de singularité, on s'attend à ne trouver que de l'énergie de flexion. Ainsi, dans la couronne de rayons R_1 et R_2 , cette énergie s'écrit ([4]) :

$$\mathcal{E} = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \int d\theta (\Psi(\theta) + \Psi''(\theta))^2. \quad (2)$$

Il reste alors, pour trouver la forme prise par la plaque, à minimiser le terme intégral. Sous des contraintes particulières (pointe verticale imposant la position du sommet du cône et pente minimale ϕ , cf. fig. 1), une méthode de résolution par multiplicateurs de Lagrange ([5]) donne la solution suivante :

$$\Psi(\theta) = \begin{cases} \phi \frac{\sin \theta_1 \cos \theta - a \sin \theta_1 \cos \theta}{\sin \theta_1 \cos \theta_1 - a \sin \theta_1 \cos \theta_1} & \text{si } \theta \in [-\theta_1, \theta_1] \\ \phi & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3)$$

où a et θ_1 sont des constantes numériques valant respectivement 3,8 et 1,21 radians. Nous utiliserons fréquemment cette expression par la suite.

Notons dès à présent que les contraintes imposées par le système que nous allons étudier ne sont pas du tout de même nature que celles énoncées ici. Cela n'enlève néanmoins rien à la généralité des résultats concernant la forme des d-cônes et leur énergie, du moins dans une première approximation.

Dans le cas d'une feuille infiniment mince, où seule la flexion joue un rôle, nous connaissons donc la forme du d-cône. Pourtant, un coup d'œil sur l'expression de l'énergie nous apprend que celle-ci diverge en son point de singularité. Cela tient au fait que, aussi fine la feuille soit-elle, il existe une zone, que l'on appellera le *cœur* du d-cône, dont la forme ne satisfait pas à l'équation de surface (3), et qui concentre en son sein des énergies de flexion et de traction irrésolues, sans doute de l'ordre de κ .

Les expériences que nous avons menées et dont nous présentons ici les résultats nous permettront de donner un ordre de grandeur de ces énergies.

2 Dispositif expérimental

2.1 Principe

Le système étudié consiste en une plaque de dimensions $L \times W = 350 \times 250$ mm et d'épaisseur variable. On utilisera deux types de matériaux : du mylar d'épaisseur 0,25 mm, et du bronze d'épaisseur 0,2 et 0,3 mm.

On contraint cette plaque à une certaine courbure selon la direction de la largeur en imposant aux bords longitudinaux un angle α avec l'horizontale, ainsi qu'une distance d entre ces deux bords, tel que représenté sur la figure 2.

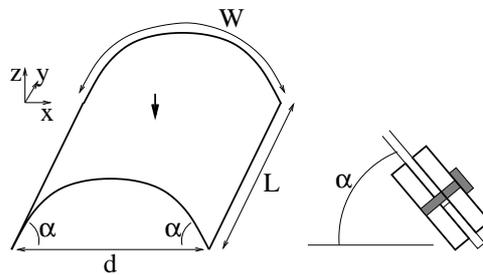


FIG. 2 – Schéma du montage

On exerce ponctuellement, au milieu de la plaque, une force F assurant un déplacement Z connu. La plaque, ainsi contrainte, va se déformer pour laisser apparaître des singularités du type évoqué plus haut (des d-cônes). L'étude de ces singularités et de leurs caractéristiques, couplée à celle de l'évolution de la force en fonction du déplacement, nous permettra d'établir un modèle cohérent avec les résultats énoncés dans la première partie. Puis, en recourant à la mise en œuvre des deux expériences plus particulières que sont le perçage de trous et l'utilisation de bronze, nous établirons des résultats plus précis sur le cœur des d-cônes.

2.2 Réalisation pratique de l'expérience

Pour le mylar comme pour le bronze, la plaque est découpée avec précision au massicot, puis encastrée entre deux cales parallèles vissées à l'armature. Ces cales, dont les angles par rapport à l'horizontal peuvent être réglés indépendamment l'un de l'autre à l'aide de deux rapporteurs et de quatre vis, sont parcourues sur toute leur longueur par vingt vis de serrage qui assurent l'encastrement de la plaque ainsi que son immobilité. Dans presque

toutes les expériences, on ne touchera pas au réglage de la distance entre les deux barres soutenant les cales ; les variations de d ne proviendront alors que des différences de position entre les bords des cales suivant l'angle α imposé. On note par ailleurs que, les cales recouvrant en tout une largeur de 36 mm de plaque, on découpera une largeur totale de 286 mm au massicot pour obtenir la largeur utile voulue (250 mm).

La force ponctuelle est exercée à l'aide d'une pointe reliée à un capteur de force (précision de 10^{-2} N), lui-même solidement arrimé à un moteur imposant l'altitude de la pointe – initialisée au niveau du haut de la plaque – à 10 microns près. La commande de la position se fait par l'intermédiaire d'un centre de contrôle relié à un ordinateur, auquel est également relié le capteur de force. Un programme permet d'actionner le moteur tout en recueillant l'altitude de la pointe et la valeur de la force qu'elle exerce sur la plaque. Les positions des d-cônes, quant à elles, seront relevées à l'aide d'un double-décimètre.

Le milieu de la plaque est repéré par l'intersection de ses diagonales. Pour le mylar, on place à cet endroit un revêtement de velour de sorte que la pointe ne glisse pas et qu'elle reste bien au centre tout au long de l'expérience. Pour le bronze, on percera un petit trou de 1 mm de diamètre destiné à guider la pointe.

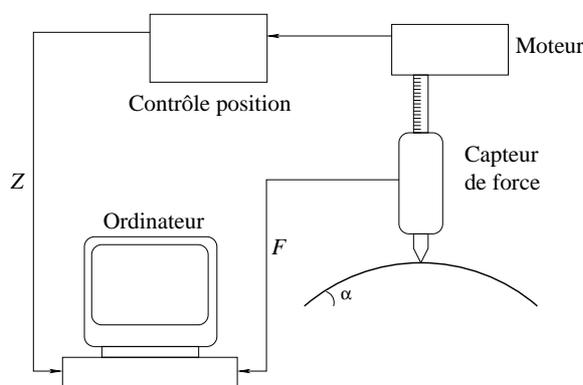


FIG. 3 – Dispositif de mesure

Pour être en mesure d'exploiter les expériences, on a besoin de connaître la valeur de E . Pour cela, on découpe une lamelle de matériau élastique de dimensions 10 par 211 mm. On encastre cette lamelle dans le système que nous venons de décrire, de sorte que la longueur utile joignant les deux barres vaille $W = 175$ mm (on rappelle que 36 mm sont recouverts par les

cales). La longueur totale arrimée aux cales est de $L = 10$ mm. On impose une distance $d = 16,45$ cm entre les deux barres, et un angle $\alpha = 20^\circ$. Dans ces conditions, la loi de la force exercée en fonction de l'enfoncement est connue :

$$F = \frac{\kappa L}{W^2} f\left(\frac{Z}{W}\right), \quad (4)$$

où $\kappa = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$,

et où f est une fonction connue calculée numériquement.

Il suffit donc, pour trouver la valeur de κ , d'ajuster la courbe expérimentale proportionnellement à la courbe théorique. On trouve alors :

Matériau	κ (u.SI)
Bronze $h = 0,2$ mm	0,09
Bronze $h = 0,3$ mm	0,34
Mylar $h = 0,25$ mm	$8,3 \cdot 10^{-3}$

Nous verrons plus tard que, plus que la valeur de E , c'est la valeur de κ dont nous nous servons.

Un autre paramètre dont nous aurons besoin par la suite est la courbure maximale de la plaque en son centre. Si on paramètre la forme de la plaque au repos par l'équation $z = kx^2$, on peut trouver, à partir d'un calque en coupe de cette forme, et à l'aide d'une régression quadratique, la valeur de k . Nous avons fait la mesure pour plusieurs angles :

Angle	30°	35°	40°	45°
d (cm)	21	21,5	21,9	22,3
k (m^{-1})	7,8	6,5	4,8	3,8

2.3 Résultats connus

Les expériences sur le mylar ont été menées par Arezki Boudaoud et leurs résultats compilés dans sa thèse [3]. Nous nous contenterons dans cette section de rappeler les résultats théoriques qu'elle contient.

Quand la pointe descend en contraignant la plaque, on observe dans un premier temps l'apparition de deux d-cônes symétriques, reliés par une ligne de pli, qui s'éloignent du centre, ainsi que représentés sur la figure 4. La partie incurvée du d-cône $-\theta \in [-\theta_1, \theta_1]$, cf. (3) – est orientée vers le centre de la feuille.

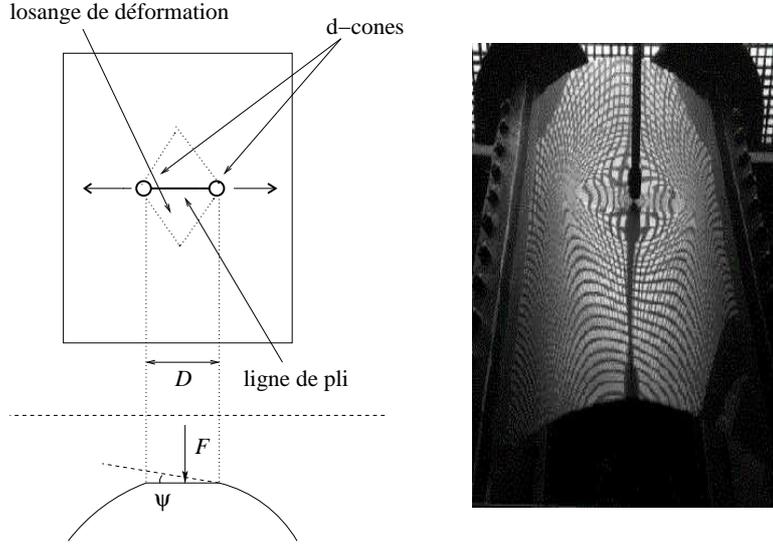


FIG. 4 – Représentation de la plaque vue de dessus, en coupe et en perspective dans le régime à deux d-cônes

On modélise la forme de la plaque au repos par une parabole d'équation $z = kx^2$. Si on note $2D$ la distance séparant les deux d-cônes, un argument géométrique nous donne la relation :

$$kD = \sqrt{kZ} \left(1 + \frac{2}{3}kZ \right). \quad (5)$$

D'autre part, un argument d'ordre de grandeur nous donne la taille du cœur du d-cône :

$$R_c = \frac{h^{1/3}}{(12(1-\nu^2))^{1/6}} k^{-1/2} Z^{1/6} \left(\frac{\mu}{2} \right)^{1/3}, \quad (6)$$

où μ est un facteur géométrique (de valeur 4,8) qui relie l'angle maximum ψ entre deux arêtes du d-cône et l'angle ϕ – déjà rencontré dans (3) – par la relation : $\psi = \mu\phi$. Par ailleurs, on évalue ψ à $2\sqrt{kZ}$ par un argument géométrique.

À une distance r du centre du d-cône, la courbure vaut $\frac{\psi}{r}$. Le rayon extérieur du d-cône est défini par la distance R à partir de laquelle la courbure du d-cône rejoint la courbure de la plaque au repos $2k$. On a donc

$kR = \frac{1}{2}\psi = \sqrt{kZ}$. Par ailleurs, la courbure maximum dans le cœur du d-cône est évaluée à :

$$c = \frac{\psi}{R_c} = 2h^{-1/3}Z^{1/3}k \left(\frac{48(1-\nu^2)}{\mu^2} \right)^{1/6}. \quad (7)$$

On supposera l'ensemble des efforts induits par la contrainte de la pointe concentrée dans ces d-cônes, ce qui nous permettra d'établir une première approximation de l'énergie \mathcal{E} de la plaque, et, par dérivation, de la force exercée F :

$$\mathcal{E} = 2\frac{F_d}{\mu^2}\kappa\phi^2 \ln \frac{R}{R_c}, \quad (8)$$

$$\text{et } F = \frac{8}{3}\frac{F_d}{\mu^2}\kappa kZ \ln \left(\frac{EhZ}{\kappa\mu} \right), \quad (9)$$

où F_d est un facteur géométrique propre à la forme du d-cône valant 67.

Les expériences utilisant des plaques homogènes de mylar permettent de vérifier les expressions établies pour des d-cônes idéaux, mais ne nous renseignent pas sur les contributions apportées par les traction et flexion qui siègent au cœur du d-cône.

Pour ce faire, nous utiliserons deux méthodes. La première consiste à percer des trous de taille variable au niveau de la trajectoire des d-cônes, pour évaluer les différences de contribution énergétique suivant la surface de cœur supprimée par les trous et ainsi épargnée par les contraintes.

La seconde, fondée sur le même principe, utilise les propriétés de mémoire inhérentes au métal. On évaluera les différences énergétiques entre une première déformation sous la contrainte de la pointe, et une seconde réalisée dans les mêmes conditions. À l'aide d'un modèle simple de mémoire, on en déduira une approximation de l'énergie du d-cône, cohérente avec la valeur trouvée par la première méthode.

3 Des petits trous

3.1 Principe de l'expérience

On perce des trous de 2 à 6 mm de diamètre dans une feuille de mylar (350 x 250 x 0,25 mm), à une distance D_0 du centre, sur la trajectoire des d-cônes, ainsi que représenté sur la figure 5.

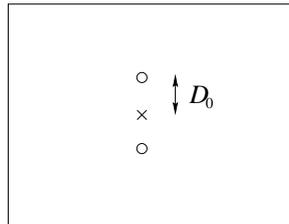


FIG. 5 – Position des trous sur la feuille vue de dessus

On mesure la force, ainsi que la position des d-cônes, en fonction du déplacement Z .

3.2 Premières observations

La première chose que l'on remarque est le piégeage des singularités par les trous. On observe en effet que les centres des d-cônes sont attirés par ces derniers, qui, par l'économie de contrainte qu'ils offrent, proposent des situations énergétiques plus avantageuses. La figure 6 illustre cette observation en comparant la mesure des positions des d-cônes *avec* et *sans* trous. On constate que les d-cônes, qui sont pour des raisons géométriques naturellement disposés à s'éloigner du centre avec l'enfoncement, finissent par trouver hors des trous une conformation énergétique plus favorable

D'autre part, le gain d'énergie évoqué plus haut se manifeste par une diminution de la force avant et pendant de piégeage, puis par une augmentation de cette même force à la sortie du piège, contrecoup de la perte de l'économie octroyée par les trous. La figure 7 illustre ce fait en présentant les courbes de force pour différents diamètres de trous (plus ces derniers sont grands, plus l'économie est grande).

3.3 Résultats

Par intégration numérique de la force sur Z , on compare les énergies entre les conformations avec et sans trous. On calcule ainsi l'économie maximale

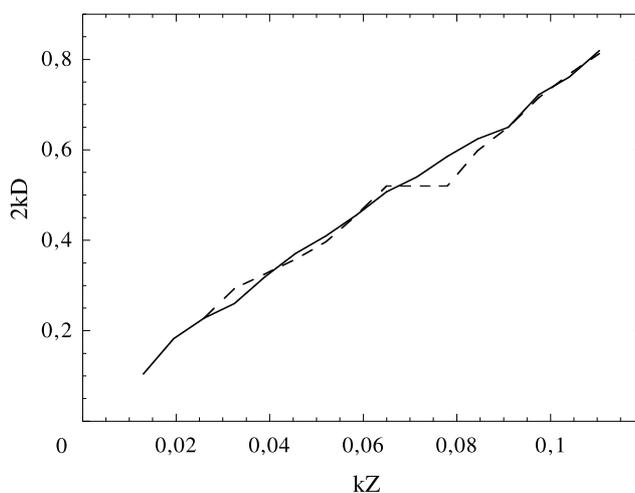


FIG. 6 – Écart entre les d-cônes en fonction de l'enfoncement. Les trous sont à 4 cm du centre ; leur diamètre de 6 mm. On a $\alpha = 35^\circ$ et $d = 21,5$ cm. — sans trous ; - - avec trous

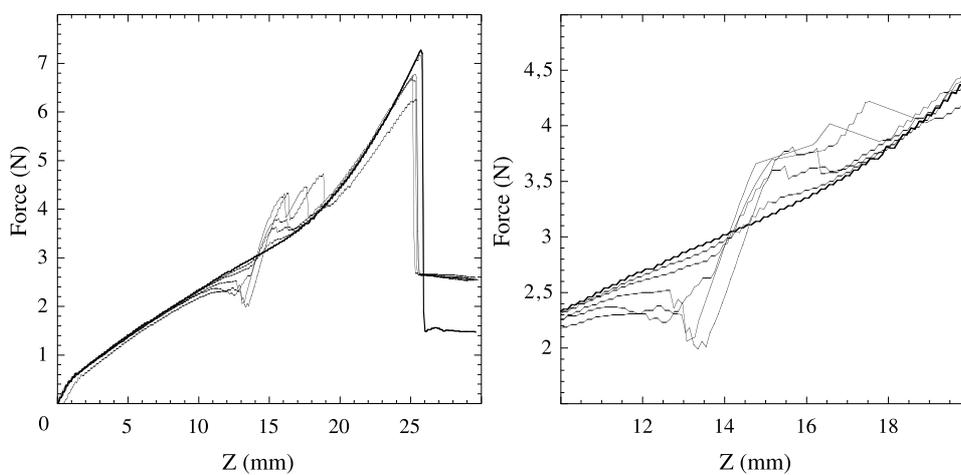


FIG. 7 – Courbes de force avec et sans trous. $\alpha = 30^\circ$, $d = 21$ cm. Le trait gras correspond à une conformation sans trous. Les traits fins correspondent à des conformations avec des trous de 2, 3, 4, 5 et 6 mm, distants de 5 cm du centre. La baisse brutale de la force en fin de parcours correspond au passage dans le régime cylindrique

d'énergie permise par les trous, qui correspond à la situation où les trous se trouvent dans les cœurs. On constate que cette énergie maximale $\Delta\mathcal{E}$ varie proportionnellement avec la surface des trous (et donc le carré du rayon).

L'expression (8) de l'énergie du d-cône idéal nous suggère que l'énergie du cœur du d-cône correspond à une régularisation en 0 du logarithme par une constante, et peut donc s'écrire :

$$\mathcal{E}_c = 2\gamma\kappa F_d \phi^2, \quad (10)$$

où γ est un facteur numérique dépendant de la forme exacte du cœur du d-cône. Ainsi, en faisant l'hypothèse supplémentaire que la répartition de l'énergie au sein du cœur ne dépend pas du rayon au sommet, on propose pour la valeur de l'économie maximale d'énergie $\Delta\mathcal{E}$ l'expression suivante :

$$\Delta\mathcal{E} = 2\gamma\kappa F_d \phi^2 \left(\frac{R_t}{R_c}\right)^2 = 8\gamma\kappa F_d k^2 D_0^2 \left(\frac{R_t}{R_c}\right)^2, \quad (11)$$

où R_t désigne le rayon du trou.

Cette expression, qui proportionne l'énergie (10) au rapport entre la surface des trous et celle des cœurs, n'est valable que parce que R_t est plus petit que R_c (qui est de l'ordre de 10 mm). On est donc bien sûr que l'énergie économisée se déduit de l'énergie du cœur même du d-cône.

On ajuste la valeur de γ de sorte que les points expérimentaux coïncident avec la courbe théorique donnée par (11). On trouve ainsi $\gamma = 0,53$. La figure 8 représente l'énergie normalisée

$$\varepsilon = \frac{\Delta\mathcal{E}\mu^2}{8F_d\kappa k^2 D_0^2}$$

en fonction du rapport des surfaces sus-mentionné.

3.4 Estimation théorique de l'ordre de l'énergie du cœur

Pour évaluer les contraintes siégeant au cœur du d-cône, on se propose de modéliser la forme de celui-ci par des fonctions-test en coordonnées cylindriques à variables séparées.

$$\xi = R_c g\left(\frac{r}{R_c}\right) \psi(\theta), \quad r \in [0, R_c] \quad (12)$$

où Ψ est la composante angulaire décrite par (3), et où g est une fonction vérifiant les conditions aux bords suivantes :

$$g(0) = g'(0) = 0, \quad g(1) = g'(1) = 1, \quad g''(1) = 0.$$

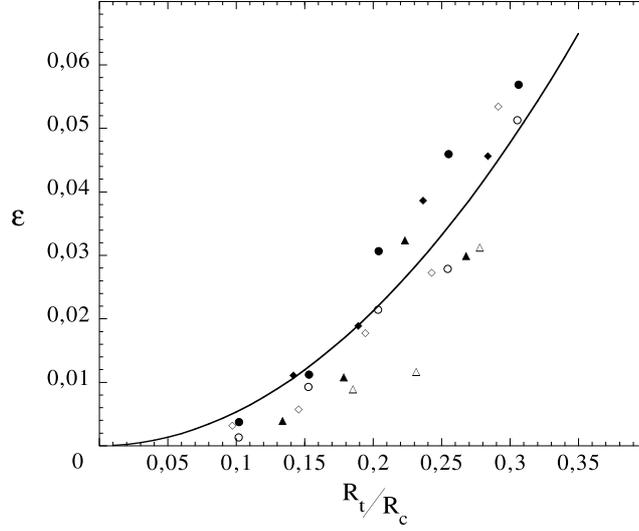


FIG. 8 – Économie d'énergie permise par le piégeage des d-cônes en fonction du rapport entre la surface des trous et celle des cœurs. La courbe théorique a pour équation $y = 0,53x^2$. • $\alpha = 30^\circ$, $D_0 = 50$ mm, $d = 21$ cm ; ◆ $\alpha = 32,5^\circ$, $D_0 = 50$ mm, $d = 21,3$ cm ; ▲ $\alpha = 35^\circ$, $D_0 = 50$ mm, $d = 21,5$ cm ; ○ $\alpha = 30^\circ$, $D_0 = 40$ mm, $d = 21$ cm ; ◇ $\alpha = 32,5^\circ$, $D_0 = 40$ mm, $d = 21,3$ cm ; △ $\alpha = 35^\circ$, $D_0 = 40$ mm, $d = 21,5$ cm.

On régularise ainsi la fonction g de sorte qu'elle soit prolongeable en 1 à la fonction identité, laquelle correspond au d-cône idéal. On cherche g sous la forme :

$$g(\tilde{r}) = \alpha\tilde{r}^2 + \beta\tilde{r}^4 + \gamma\tilde{r}^6 + \delta\tilde{r}^8.$$

On ne se laisse qu'un paramètre libre α , les autres étant directement déduits des conditions aux limites. La figure 9 représente le cœur d'un d-cône ainsi modélisé.

Nous allons maintenant évaluer l'énergie de ces fonctions-test. Les grandeurs sont adimensionnées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} r &= R_c \tilde{r}, & R_c^2 \Delta &= \tilde{\Delta}, & dx &= R_c d\tilde{x}, \\ \xi &= R_c \phi \tilde{\xi}, & R^2 R_c^2 [\cdot, \cdot] &= [\cdot, \tilde{\cdot}], & dy &= R_c d\tilde{y}. \end{aligned}$$

L'énergie du cœur des deux d-cônes s'écrit donc, en vertu de (8) :

$$\mathcal{E} = \kappa\phi^2 \int \left((\tilde{\Delta}\tilde{\xi})^2 + (\tilde{\Delta}^{-1}[\tilde{\xi}, \tilde{\xi}])^2 \right) d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (13)$$

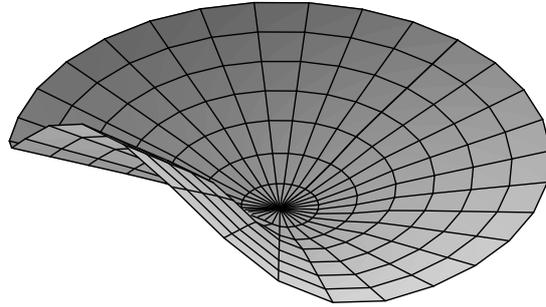


FIG. 9 – Modélisation d'un cœur de d-cône.

Les fonctions-test étant polynomiales, il n'est pas difficile d'en calculer le laplacien inverse (évalué avec des conditions nulles aux bords). On se reportera au programme Maple pour plus de détails. On obtient donc la valeur de l'énergie élastique totale en fonction du paramètre α . On trouve finalement une énergie minimale de $140\kappa\phi^2$. On déduit alors de (10) la majoration suivante :

$$\gamma \leq 1,05.$$

L'ordre de grandeur trouvé expérimentalement dans la section 3.3 est donc corroboré par cette évaluation.

On déplorera néanmoins que la famille de fonctions-test que nous avons choisie n'est pas assez riche pour obtenir de bons résultats (il aurait fallu une collection dense mathématiquement) ; c'est pourquoi nous devons nous contenter d'une majoration.

4 Des plaques de bronze

4.1 Modèle de mémoire résiduelle

On tente d'établir un modèle simple rendant compte des propriétés plastiques du bronze. Pour cela, nous allons imposer un allongement relatif a_i , puis mesurer l'allongement a_f résiduel. La façon la plus simple d'imposer une contrainte élastique est la flexion. En effet, comme le montre la figure 10, à une courbure c correspondent une élancement $\frac{ch}{2}$ à l'extérieur de la courbe, et une contraction de même ampleur à l'intérieur de celle-ci.

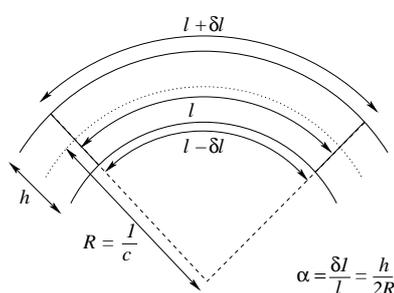


FIG. 10 – Contraction et élancement induites par la flexion

En plaquant des lamelles de bronze chrysocale de 0,2 mm d'épaisseur contre des cylindres de diamètre variable, puis en calquant la forme de ces lamelles sur du papier, on parvient à mesurer la courbure résiduelle en fonction de la courbure imposée. Pour pouvoir exploiter ces mesures, on leur ajuste une loi de mémoire résiduelle de la forme :

$$a_f = \beta(a_i - a_0)^2 H(a_i - a_0), \quad (14)$$

où H est la fonction de Heaviside.

La figure 11 représente cette loi de mémoire résiduelle, ajustée aux points expérimentaux. La régression donne $\beta = 128$, et $a_0 = 4,8 \cdot 10^{-3}$.

4.2 Principe de l'expérience

On utilise des plaques de bronze de dimensions utiles 250 x 350 mm et d'épaisseur 0,2 et 0,3 mm. L'expérience consiste à faire descendre la pointe deux fois de suite dans des conditions strictement identiques, en mesurant à chaque fois la force exercée ainsi que l'écartement des d-cônes. On s'attend

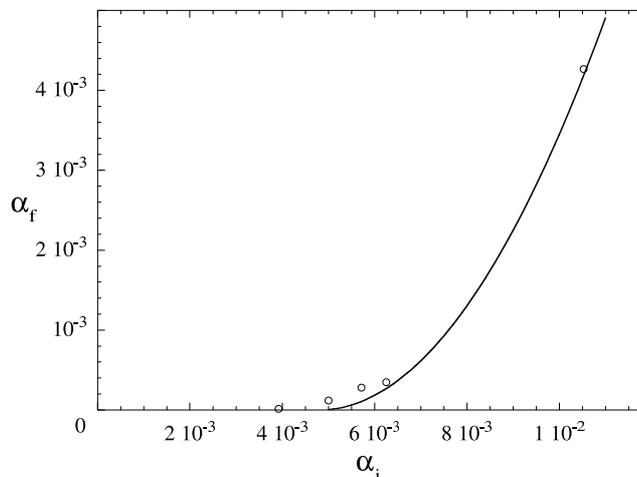


FIG. 11 – Allongement résiduel en fonction de l’allongement imposé. La courbe théorique correspond à l’équation (14).

à ce que le deuxième passage présente des différences notables avec le premier, du fait de l’irréversibilité des déformations subies par la plaque lors du premier passage.

4.3 Premières observations

On remarque que les d-cônes, dont la voie a été “traçée” lors du premier passage, ont plus de facilité à progresser lors du second, et finissent par se bloquer (voir figure 12) : les contraintes augmentant au cœur du d-cône au fur et à mesure que la pointe s’enfonce, le métal finit par se figer par l’effet de l’irréversibilité des déformations.

Au premier passage, la force, une fois normalisée, connaît la même évolution que pour le mylar. Par contre, on constate que la force exercée lors du second passage est, à enfoncement égal, plus faible que lors du premier (voir figure 13) ; cette économie d’énergie s’explique bien par le fait que la courbure résiduelle – que le matériau a conservée du premier passage des d-cônes – facilite la formation de ces derniers la deuxième fois.

4.4 Résultats

À l’aide du modèle de mémoire établi plus haut et avec les formules d’énergie du cœur proposées dans la partie précédente, nous allons tenter

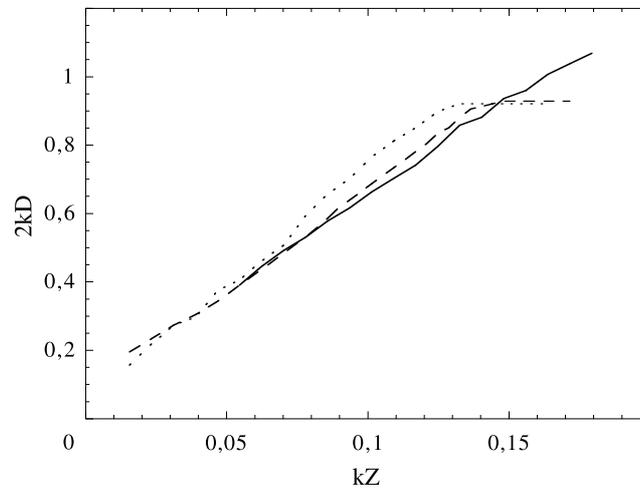


FIG. 12 – Écart entre les d-cônes en fonction de l'enfoncement. $\alpha = 30^\circ$, $d = 21$ cm. — mylar ($h = 0,25$ mm), - - bronze premier passage ($h = 0,2$ mm), \cdots bronze second passage ($h = 0,2$ mm).

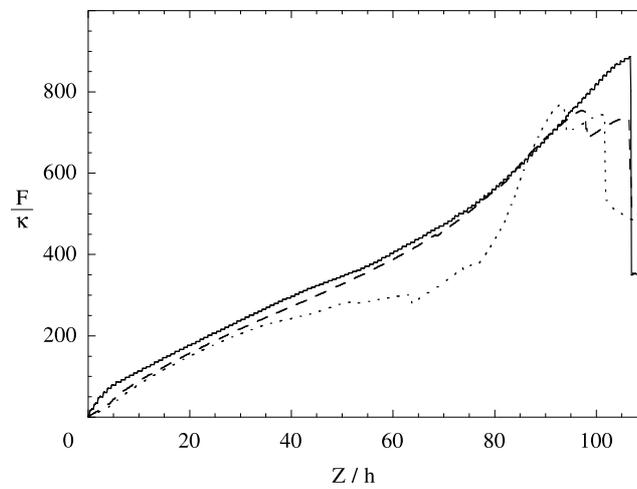


FIG. 13 – Force normalisée en fonction de l'enfoncement normalisé. $\alpha = 35^\circ$, $d = 21,5$ cm. — mylar ($h = 0,25$ mm), - - bronze premier passage ($h = 0,25$ mm), \cdots bronze second passage ($h = 0,25$ mm).

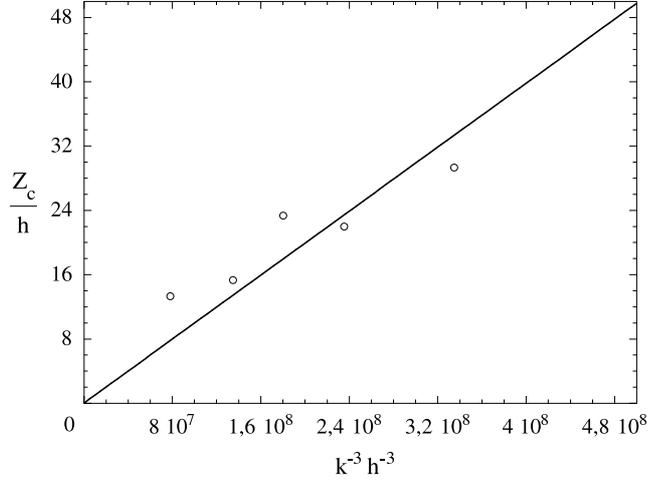


FIG. 14 – Enfoncement critique – à partir duquel le second passage diffère du premier – en fonction de $h^{-3}k^{-3}$. La courbe théorique a pour équation $y = 10^{-7}x$.

d'évaluer quantitativement la différence d'énergie entre le premier et le second passage.

4.4.1 Vérification du seuil de mémoire

Nous avons établi dans la section 4.1 que les effets de la mémoire résiduelle ne se faisaient sentir qu'à partir d'un certain seuil d'allongement relatif a_0 . Il est donc nécessaire qu'il existe un seuil Z_c à partir duquel la courbure c au sein du d-cône est suffisante pour que les effets de la mémoire se manifestent. Comme nous l'avons vu dans la section 4.1, la courbure et l'allongement relatif sont liés par la relation $a = \frac{ch}{2}$. En utilisant l'expression (7) de la courbure maximale dans le cœur du d-cône, on établit une relation simple entre l'enfoncement Z et l'allongement relatif a dans le cœur. On en déduit alors l'enfoncement critique en fonction de l'allongement critique :

$$Z_c = \frac{\mu a_0^3}{\sqrt{48(1-\nu^2)} h^2 k^3}, \quad (15)$$

La figure 14 présente les mesures de l'enfoncement Z_c/h , à partir duquel la force diffère entre les deux passages, en fonction de $k^{-3}h^{-3}$. La régression linéaire donne un facteur de proportionnalité de 10^{-7} , d'où l'on déduit la

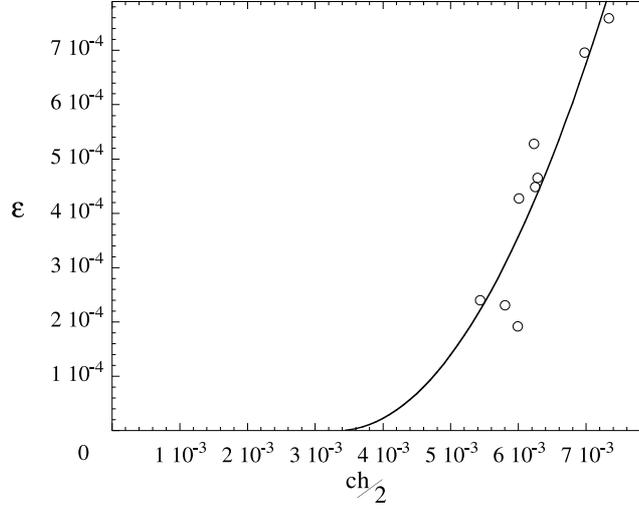


FIG. 15 – Différence d'énergie normalisée en fonction de la courbure de cœur normalisée. Les énergies sont calculées par intégration de la force pour diverses valeurs de Z et pour divers paramètres h , α , d . La courbe théorique, ajustée sur (15), a pour équation $y = 50(x - 3,4 \cdot 10^{-3})^2$.

valeur de l'allongement critique :

$$a_0 = \left(\frac{\sqrt{48(1 - \nu^2)} 10^{-7}}{\mu^2} \right)^{1/3} = 5 \cdot 10^{-3},$$

qui est proche de la valeur trouvée dans la section 4.1.

Pour mesurer Z_c avec suffisamment de précision, on a modélisé les différences entre les courbes de force des deux passages par des paraboles à seuil (du même type que (14)). Ce sont donc des régressions qui nous ont donné les valeurs de Z_c comme les seuils de ces fonctions.

4.4.2 Expression de l'énergie

L'énergie du cœur vaut, d'après (10) :

$$\mathcal{E} = 2\gamma\kappa F_d \phi^2 = 2\gamma\kappa F_d \frac{c^2 R_c^2}{\mu^2}.$$

La différence d'énergie entre le premier et le second passage s'évalue donc à :

$$\Delta\mathcal{E} = 4\gamma\kappa F_d \frac{cc_r R_c^2}{\mu^2},$$

où c_r , la courbure résiduelle, vaut $\frac{h\beta}{2}(c - \frac{2a_0}{h})^2$ (on omet la fonction de Heaviside pour simplifier l'expression). On a donc finalement :

$$\Delta\mathcal{E} = 8\kappa F_d R_c^2 \frac{c}{h\mu^2} f\left(\frac{ch}{2}\right), \quad (16)$$

où $f = \gamma\beta(a - a_0)^2$.

Pour vérifier cette évaluation, on trace l'énergie normalisée ε en fonction de $ch/2$, et on lui ajuste la fonction f (voir la figure 15). La régression donne les valeurs suivantes : $\gamma\beta = 50$ et $a_0 = 3,4 \cdot 10^{-3}$. Ces résultats sont tout-à-fait concordants avec les valeurs trouvées précédemment ($\gamma = 0,53$, $\beta = 128$ et $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$).

Conclusion

Ces expériences ont tout d'abord confirmé qualitativement nos intuitions quant à l'effet piégeant, pour le métal, des résidus de d-cônes hérités d'une déformation antérieure d'une part, et celui tout aussi piégeant des trous percés dans le mylar d'autre part. On a constaté par ailleurs que le bronze, quand il n'est pas encore déformé, se comporte à peu près comme le mylar.

Mais elles nous ont également renseignés sur l'ordre de grandeur de l'énergie de cœur des d-cônes : celui-ci est comparable à l'énergie totale de ce dernier. Il est donc important, même pour des plaques fines, de ne pas systématiquement négliger cette contribution. L'expérience utilisée s'est révélée être une méthode déductive astucieuse pour mesurer les énergies du cœur des singularités. En effet, la plupart des systèmes faisant apparaître des singularités imposent des conditions limites dans le cœur même de celles-ci. Par exemple, la méthode usuelle pour obtenir un d-cône consiste à exercer une force ponctuelle au niveau du sommet de celui-ci (voir figure 1). Il est donc impossible, dans ces conditions, de percer des trous !

D'autre part, on note que les résultats pour un matériau à déformations irréversibles se déduisent de ceux s'appliquant à un matériau élastique. Il peut donc être pratique, pour traiter les problèmes de plaques à déformations irréversibles, de se ramener au cas élastique.

Une étude plus approfondie serait nécessaire, notamment sur les méthodes analytiques et les évaluations numériques dans la résolution du cœur. Il pourrait également être intéressant d'imaginer des systèmes de déformation impliquant une multitude de singularités. Dans le froissage en particulier, les d-cônes jouent un rôle important et ils se multiplient au fur et à mesure que l'on froisse le papier. Les études que nous avons mentionnées apportent un début de réponse à ce type de problèmes plus complexes et plus riches.

Références

- [1] LANDAU L. & LIFCHITZ E. *Théorie de l'élasticité*. Éditions Mir, Moscou (1967).
- [2] SANCHEZ-PALENCIA E. Surfaces et coques élastiques minces : problèmes et défis. *La Vie des Sciences*, Académie des Sciences, **12**, 239-258 (1995)
- [3] BOUDAUD A. *Membranes élastiques et capillaires : instabilités, singularités et auto-adaptation*. Thèse de doctorat de l'université Paris VI (2000).
- [4] BEN AMAR M. & POMEAU Y. Crumpled paper. *Proc. R. Soc. Lond. A* (1997) **453**, 729-755.
- [5] CERDA E. & MAHADEVAN L. Conical Surfaces and Crescent Singularities in Crumpled Sheets. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2358 (1998).
- [6] LOBKOWSKI A.E. Boundary layer analysis of the ridge singularity in a thin plate. *Phys. Rev. E* **53**, 3750 (1996).
- [7] CHAÏEB S. & MELO F. Experimental study of crease of formation in an axially compressed sheet. *Phys. Rev. E* **56**, 4736 (1997).
- [8] CHAÏEB S. & MELO F. Experimental study of developpables cones. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2354 (1998).