

Die Zeta-Funktion für ein supersymmetrisches nichtlineares Sigma-Modell

Diplomarbeit
von
Kay Jörg Wiese

Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg
Heidelberg, den 10. Mai 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Supersymmetrie	7
2.1	Symmetrien des \mathbb{R}^2	7
2.2	Spinoren	9
2.3	Darstellung von Dirac-Matrizes, Majorana-Spinoren	13
2.4	Graßmann-Variablen	13
2.5	Erweiterung der Poincaré-Algebra	16
2.6	Superfeld-Darstellung von Q_α	19
2.7	Invarianten eines Superfeldes	21
2.8	Relationen für die superkovariante Ableitung	23
3	Das nichtlineare Sigma-Modell	26
3.1	Definition des Modells	26
3.2	Überlegungen zum Massenterm	29
4	Störungsentwicklung	31
4.1	Der Formalismus	31
4.2	Der Propagator für das φ -Feld	33
4.3	Der Propagator für die fermionischen Felder	34
4.4	Der Propagator für das F-Feld	34
4.5	Der Propagator für das Superfeld	36
5	Besonderheiten supersymmetrischer Theorien	38
5.1	Wundersames Wegheben von Divergenzen	38
5.2	Ausintegration des Freiheitsgrades G^i	39
5.3	Vergleich der supersymmetrischen Theorie mit dem bosonischen Fall	40
5.4	Auswirkungen auf Vakuum-Blasen	41
6	Renormierung	42
6.1	Regularisierung und feldtheoretische Renormierung	42
6.2	Kanonische Dimension der Felder und naives Skalenverhalten	44
6.3	Beweis der Renormierbarkeit	46
6.4	Kurze Darstellung der Wilsonschen Renormierungsgruppenideen	49
6.5	Renormierungsgruppengleichung und kritische Exponenten	52

7	Explizite Durchführung der Renormierung	59
7.1	Generelle Strategie	59
7.2	Freie Energie der freien Theorie	60
7.3	Die freie Energie in 2- und 3-Loop-Ordnung	63
7.4	Konsistenztest für die Zahl der Graphen	65
7.5	Bestimmung von $\beta(t_R)$ und $\zeta(t_R)$	65
7.6	Konsistenztest für die Renormierungskonstanten	66
8	Renormierung von polynomialen Operatoren in π und σ	67
9	Verallgemeinerungen	73
10	Zusammenfassung und Ausblick	76
 Anhang		
A	Das Integral $I(l)$	77
B	Beispiele supersymmetrischer Graphen	79
C	Die Graphen in 2- und 3-Loop-Ordnung	83
D	Verzeichnis der verwendeten Symbole	94
	Literaturverzeichnis	96
	Danksagung	98

Kapitel 1

Einleitung

Die Zeta-Funktion für ein supersymmetrisches nichtlineares Sigma-Modell – unter dieser Überschrift werden Phasenübergänge zweiter Art untersucht. Sie zeichnen sich durch eine unendliche Korrelationslänge bei der kritischen Temperatur und eine damit einhergehende Nichtanalytizität von Größen wie der spezifischen Wärme aus. In nicht explizit lösbaren Modellen ist die Renormierungsgruppe das geeignete Instrument, um den Phasenübergang qualitativ wie quantitativ richtig zu beschreiben [31]. Analysiert wird, wie sich ein System unter Skalentransformationen verhält. Das ist deshalb wichtig, weil am Phasenübergangspunkt die Korrelationslänge unendlich, das System also skaleninvariant wird. Daraus folgt, daß die Gitterkonstante des Systems, für das man den Phasenübergang untersuchen will, am kritischen Punkt keine Rolle mehr spielt. Diese Beobachtung motiviert, anstelle eines diskreten Systems ein feldtheoretisches, d.h. kontinuierliches System, zu untersuchen. In zwei Dimensionen wäre das einfachste kontinuierliche System ein n -komponentiges skalares Feld φ mit „nächster Nachbar“-Wechselwirkung ($E \sim (\nabla\varphi)^2$), dessen Betrag keiner Beschränkung unterworfen ist. Seine freie Energie ist exakt berechenbar (vgl. Abschnitt 7.2). Ein Phasenübergang tritt aber erst dann auf, wenn ein zusätzlicher nichtlinearer Term hinzuaddiert wird. Dieser ließe sich wie in vier Dimensionen durch einen Term $g\varphi^4$ realisieren. Drei Kritikpunkte können an dieser Vorgehensweise angebracht werden:

1. Feldamplituden bekannter physikalischer Systeme wie von Spin-Modellen sind beschränkt.
2. Das Modell hat zu viele relevante Operatoren (vgl. Abschnitt 6.4), die den störungstheoretisch bestimmten Phasenübergangspunkt stören.
3. Ein Beweis der Renormierbarkeit (vgl. Abschnitt 6.3) ist überaus schwierig, wenn nicht gar unmöglich.

Statt einen Term $g\varphi^4$ hinzuzuaddieren, wird eine Zwangsbedingung dadurch eingeführt, daß der Betrag des Feldes auf 1 normiert wird. Das Modell, ein sogenanntes bosonisches nichtlineares Sigma-Modell, ist renormierbar [8]. Aus der Störungsrechnung und der zugehörigen feldtheoretischen Renormierung lassen sich (vgl. Abschnitt 6.5 und [6], [7]) folgende Eigenschaften extrahieren:

- die kritische Temperatur in $d = 2 + \varepsilon$ Dimensionen,

- das Verhalten der Korrelationsfunktionen für sehr große und sehr kleine Impulse,
- das Skalierungsverhalten der Korrelationsfunktion am kritischen Punkt,
- das Verhalten der Korrelationslänge in der Nähe der kritischen Temperatur,
- das Verhalten in einem äußeren schwachen Magnetfeld bei der kritischen Temperatur.

Diese Größen lassen sich alle aus der Kenntnis der sogenannten Renormierungs- β - und ζ -Funktionen herleiten. Das nichtlineare Sigma-Modell ist in der angegebenen Form invariant unter Rotationen des Feldes. Diese Symmetrie ist nach [8] das entscheidende Hilfsmittel beim Beweis der Renormierbarkeit.

Man kann nun überlegen, ob sich ein analoges Modell auch für Fermionen entwickeln ließe. Das ist in der Tat möglich. Möglich ist ebenso eine Mischung beider Modelle. Beim richtigen „Mischungsverhältnis“ tritt, wie gezeigt wird, ein bemerkenswertes Phänomen auf: Eine neue Symmetrie, die Supersymmetrie, erscheint, die bosonische in fermionische und fermionische in bosonische Felder überführt [10], [11], [23], [30].

Mit Hilfe einer systematischen Entwicklung in der Temperatur und dem Parameter $\varepsilon = d - 2$ lassen sich der kritische Punkt und die kritischen Exponenten ermitteln. Hierfür muß man die β - und ζ -Funktionen aus der freien Energie bestimmen. Sie wurde bis zur 3-Loop-Ordnung berechnet. Man erhält die β -Funktionen in 2- und die ζ -Funktionen in 3-Loop-Ordnung. Die β - und ζ -Funktionen für das bosonische Modell, Gleichungen (7.46), (7.48) und (8.27), stimmen mit [16] bzw. [17] überein, die β -Funktion für das supersymmetrische Modell, Gleichung (7.47), mit [13]. Die ζ -Funktionen für das supersymmetrische Modell, Gleichungen (7.49) und (8.28), werden hier erstmals in einer ε -Entwicklung berechnet. Für den Spezialfall $l = 1$ stimmt das Ergebnis mit der $1/N$ -Entwicklung in [12] überein. Die Gliederung der Arbeit ist wie folgt:

Das 2. Kapitel befaßt sich mit der Supersymmetrie. In die Durchführung der Rechnungen gehen soviele Details ein, daß es unabdingbar ist, diese präzise zu erfassen und darzustellen. Die Supersymmetrie läßt sich elegant als zusätzliche Symmetrie des um zwei Grassmann-Variablen erweiterten Ortsraumes einführen. Ausgehend von einer Darstellung der Symmetriegruppe des Ortsraumes und der zugehörigen Spindarstellung, die die Transformation der fermionischen Freiheitsgrade des Systems beschreibt, wird die Supersymmetrie zwischen den zwei bosonischen und den zwei fermionischen Freiheitsgraden des Modells, in unserem Fall eines supersymmetrischen nichtlinearen Sigma-Modells, konstruiert.

Dieses Modell wird – ausgehend vom bosonischen nichtlinearen Sigma-Modell – in Kapitel 3 vorgestellt. Es wird gezeigt, daß im wesentlichen nur eine mögliche supersymmetrische Verallgemeinerung existiert. Im Gegensatz zu der üblichen Vorgehensweise [3], [13] liegt dieser Arbeit kein masseloses, sondern ein massives nichtlineares Sigma-Modell zugrunde. Als grundlegendes Hilfsmittel wird in Kapitel 4 die Störungsrechnung eingeführt. Die Korrelationsfunktionen für die nichtwechselwirkenden Felder – diese sind immer Ausgangspunkt der Störungsentwicklung – lassen erste Rückschlüsse auf die Eigenschaften des Modells zu. (Vgl. [1], [3], [4], [13], [18], [20], [21], [32].)

Weitere Eigenschaften, die entweder für supersymmetrische Theorien allgemein gelten oder die den Vergleich von bosonischem und supersymmetrischem Modell betreffen, werden in Kapitel 5 diskutiert.

Dem Problem der Renormierung, das bei jeder wechselwirkenden Theorie auftaucht, ist Kapitel 6 gewidmet. Aufbauend auf einem expliziten Beweis für die Renormierbarkeit des bosonischen Modells nach [8] wird hier der Beweis für das supersymmetrische Modell verallgemeinert. Breiten Raum nimmt schließlich die Frage ein, was aus der Störungsrechnung gelernt werden kann.

Kapitel 7, das die Durchführung der Renormierung behandelt, ist das technisch aufwendigste Kapitel. Die freie Energie der freien Theorie wird explizit berechnet. (Für die verwendete Methode vgl. [17] und [28].) Für die supersymmetrische Theorie wird ein Analogon definiert, das nicht verschwindet. Die anderen Resultate der Renormierung werden nur angegeben. Ihre vollständige Darstellung würde den Umfang der vorliegenden Arbeit bei weitem sprengen. Man erhält die β -Funktionen in 2- und die ζ -Funktionen in 3-Loop-Ordnung.

In Analogie zu [7], [17] und [28] wird in Kapitel 8 die Renormierung einer großen Klasse relevanter Operatoren für das supersymmetrische Modell diskutiert.

Kapitel 9 zeigt, wie die Ergebnisse auf andere nichtlineare Sigma-Modelle verallgemeinert werden können.

Der Ausblick, Kapitel 10, zeigt, wo noch Fragen offen geblieben sind.

Kapitel 2

Supersymmetrie

In diesem Kapitel wird das Phänomen Supersymmetrie erörtert. Wie schon in der Einleitung angedeutet, handelt es sich um eine zusätzliche Symmetrie, die bosonische und fermionische Felder mischt. Es ist leicht, eine Hamiltonfunktion in den Komponentenfeldern sowie eine supersymmetrische Transformation hinzuschreiben und zu überprüfen, daß diese die Hamiltonfunktion invariant läßt. Diese Vorgehensweise hat jedoch zwei Nachteile: Erstens ist nicht ersichtlich, warum gerade diese Symmetrietransformation gewählt wurde und zweitens führt dieser Ansatz zu einer Komponentendarstellung, die rechenstechnisch praktisch nicht handhabbar ist. Es wurde hier deshalb der Superfeld-Zugang gewählt. Er beruht auf einer Erweiterung des Ortsraumes (\mathbb{R}^2) um zwei zusätzliche Grassmannvariablen zu $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{G}^2$, das dann Träger des Superfeldes ist. Konstruiert wird die Erweiterung des Ortsraumes aus einer Erweiterung der Symmetriegruppe des \mathbb{R}^2 , der affinen Transformationen. Sie kann wegen des Coleman-Mandula-Theorems keine Lie-Gruppe sein¹. Grundlage für die Konstruktion ist eine präzise Darstellung der Symmetrie-Gruppe des \mathbb{R}^2 . Diese wird in Abschnitt 2.1 gegeben. In Abschnitt 2.2 bis 2.3 werden als notwendiges Hilfsmittel Dirac-Spinoren über dem \mathbb{R}^2 eingeführt. Die Analyse zeigt, welche Teile der Konstruktion zwangsläufig und welche willkürlich sind. Mit Hilfe von Grassmann-Variablen (Abschnitt 2.4) gelingt in Abschnitt 2.5 dann die Erweiterung der Symmetriegruppe des \mathbb{R}^2 . Abschnitt 2.6 erörtert die angesprochene Superfeld-Darstellung. Sie zeigt insbesondere, warum gerade die Erweiterung in Abschnitt 2.5 gewählt wurde. Abschnitt 2.7 behandelt die Frage, wie eine supersymmetrische Hamiltonfunktion definiert werden kann. Abschnitt 2.8 ist Grundlage für sämtliche folgenden Rechnungen.

Als Literatur für dieses Kapitel wurden [3], [10] und [23] verwendet. Die ersten Arbeiten auf diesem Gebiet sind [26] und [30].

2.1 Symmetrien des \mathbb{R}^2

In der vorliegenden Arbeit werden euklidische Feldtheorien über dem \mathbb{R}^2 mit Metrik $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ behandelt. Es ist deshalb nicht zwischen kovarianten und kontravarianten Größen zu unterscheiden. Die zugehörigen Hamiltonfunktionen sind invariant unter den

¹Vgl. Abschnitt 2.5.

affinen Transformationen des \mathbb{R}^2 , die zusammen eine Lie-Gruppe bilden². Die zugehörige Lie-Algebra wird erzeugt von den Generatoren, $M_{\mu\nu}$ und P_σ , der Drehungen und Verschiebungen. Für deren Untersuchung beschränken wir uns beispielhaft auf die Dimension 2 des zugrundeliegenden Raumes und auf eine explizite Darstellung. Die Argumentation ist aber so allgemein gehalten, daß sie grundsätzlich für beliebige Dimensionen gilt.

Versuchen wir, eine Darstellung \mathcal{D}_ω der Lie-Algebra auf $C^\omega(\mathbb{R}^2)$ zu finden³. Es muß gelten:

$$\mathcal{D}_\omega(e^{ixP}) f(y) = f(x+y) \quad \forall f \in C^\omega(\mathbb{R}^2) \quad (2.1)$$

Daraus folgt:

$$\mathcal{D}_\omega(P_\sigma) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \quad (2.2)$$

Die Drehungen, die von $M_{\mu\nu}$ induziert werden, bilden die $\{\mu, \nu\}$ -Ebene auf sich selbst ab, während Koordinaten orthogonal dazu unverändert bleiben.

Ferner gilt $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$. Die Drehrichtung wird dadurch festgelegt, daß $e^{i\pi M_{\mu\nu}/2}$ gerade die ν -Achse auf die μ -Achse abbilden soll.

Eine Matrixdarstellung der Generatoren der Drehung ist:

$$\mathcal{D}_M(M_{\mu\nu})_{\tau\lambda} = \frac{1}{i}(g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau}) \quad (2.3)$$

Ein explizites Beispiel für 2.3 ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_M(M_{21}) &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{D}_M(e^{i\vartheta M_{21}}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \vartheta^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \vartheta^{2n} (-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \vartheta^{2n+1} (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos \vartheta + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin \vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eine Darstellung auf $C^\omega(\mathbb{R}^2)$ ist deshalb:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\omega(M_{\mu\nu}) &= x_\tau \mathcal{D}_M(M_{\mu\nu})_{\tau\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \\ &= \frac{1}{i} (g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau}) x_\tau \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Für jede Darstellung der Lie-Algebra gilt per definitionem:

$$\mathcal{D}_\omega([M_{\mu\nu}, P_\sigma]) = [\mathcal{D}_\omega(M_{\mu\nu}), \mathcal{D}_\omega(P_\sigma)] \quad (2.5)$$

²Statt affine Transformationen des \mathbb{R}^2 wird im folgenden – nicht euklidischer Terminologie folgend – der Begriff Poincaré-Gruppe verwendet.

³ $C^\omega(\mathbb{R}^2)$ sind die analytischen Funktionen auf \mathbb{R}^2 .

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}_\omega(M_{\mu\nu}), \mathcal{D}_\omega(P_\sigma)] &= - (g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau}) \left[x_\tau \frac{\partial}{\partial x_\lambda}, \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \right] \\
&= (g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau}) \left(g_{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \\
&= i (g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}) \mathcal{D}_\omega(P_\lambda)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Bei Berücksichtigung von (2.4) muß gelten:

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = i (g_{\mu\sigma}P_\nu - g_{\nu\sigma}P_\mu) \tag{2.7}$$

Die abgeleiteten Relationen lassen sich in einen abstrakten Rahmen einordnen: $M_{\mu\nu}$ und P_σ bilden eine graduierte, d.h. geordnete, Lie-Algebra: Jedem Element der Lie-Algebra ist seine, durch eckige Klammern bezeichnete, kanonische (Energie-) Dimension zugeordnet:

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}] &= 0 \\
[P_\sigma] &= 1
\end{aligned}$$

Da in den Kommutatorrelationen keine dimensionsbehafteten Größen auftauchen, addieren sich bei Multiplikation (Bildung des Kommutators) die kanonischen Dimensionen. Sie bilden eine Graduierung g der Lie-Algebra mit Elementen $\{L_i\}$:

$$g([L_i, L_j]) = g(L_i) + g(L_j) \tag{2.8}$$

Schon aus dieser einfachen Überlegung folgt, da keine Elemente der Ordnung 2 existieren:

$$\begin{aligned}
[M, M] &\sim M \\
[M, P] &\sim P \\
[P, P] &= 0
\end{aligned}$$

Wir werden in Abschnitt 2.5 diese Lie-Algebra unter Berücksichtigung der vorhandenen Graduierung erweitern.

2.2 Spinoren

Supersymmetrische Theorien enthalten stets Fermionen, also Spinoren. Diese lassen sich als Vektoren mit komplexen Einträgen darstellen. Ein kanonisches Skalarprodukt wird mit Hilfe einer Matrix γ_0 definiert⁴:

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \varphi_\alpha^* \gamma_{\alpha\beta}^0 \psi_\beta \tag{2.9}$$

Aus der Forderung $\langle \psi, \psi \rangle \in \mathbb{R}$ folgt

$$\gamma_0^+ = \gamma_0, \tag{2.10}$$

⁴ $\gamma_0 = \gamma^0$ und die Null wird so gesetzt, daß sie nicht mit anderen Indizes kollidiert.

d.h. γ_0 ist eine hermitesche Matrix. Zur Abkürzung schreibt man häufig

$$\bar{\varphi} = \varphi^\dagger \gamma_0 , \quad (2.11)$$

so daß

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \bar{\varphi} \psi \quad (2.12)$$

und nennt $\bar{\varphi}$ den zu φ adjungierten Spinor. Es soll gelten⁵:

$$(\gamma_0)^2 = 1 \quad (2.13)$$

Wie wir unten sehen, werden Matrizes $(\gamma_\mu)_{\mu=1\dots d}$ benötigt, die folgende zwei Bedingungen erfüllen⁶:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2g_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \psi \in \mathbb{R} \quad \forall \psi \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^* &= \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma_0^\dagger \psi = \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 \psi \\ \Rightarrow \bar{\gamma}_\mu &:= \gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_\mu , \end{aligned} \quad (2.16)$$

d.h. γ_μ ist selbstadjungiert bzgl. der Metrik γ_0 . Zur Abkürzung definieren wir für einen beliebigen Vektor A :

$$\not{A} := A_\mu \gamma_\mu \quad (2.17)$$

Die Bedingung (2.14) resultiert aus dem Versuch, eine Differentialgleichung 1. Ordnung für ein Teilchen zu finden, deren Lösungen zusätzlich die Laplace-Gleichung

$$(-\Delta + m^2) \psi = 0 \quad (2.18)$$

erfüllen. Eine Möglichkeit ist

$$(i\not{\partial} - m) \psi = 0 , \quad (2.19)$$

denn durch Multiplikation mit $(-i\not{\partial} - m)$ von links folgt

$$0 = (-i\not{\partial} - m)(i\not{\partial} - m) \psi = (-\Delta + m^2) \psi . \quad (2.20)$$

Die zweite Bedingung (2.15) rührt daher, daß $\mathcal{L} = \int d^d x \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi$ als Lagrange-Funktion, welche die Euler-Lagrange-Gleichung (2.19) liefert, reell sein soll.

Eine Ankopplung an ein äußeres elektromagnetisches Feld $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ wird mit Hilfe der minimalen Substitution

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu , \quad (2.21)$$

⁵Für nichteuklidische Diracspinoren wäre diese Forderung redundant. Man kann sich jetzt und im folgenden $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ mit Metrik $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vorstellen. Der hier benutzte Teil (\mathbb{R}^2) ist eine raumartige

Hyperfläche, die Teil der Lorentzmannigfaltigkeit ($\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$) ist.

⁶Vorausweisend sei angemerkt, daß das Minuszeichen in (2.14) notwendig ist, damit eine Majorana-Darstellung (Abschnitt 2.3) existiert.

die aus der Forderung nach lokaler Eichinvarianz herrührt, erreicht. ψ kann sowohl Lösung für Teilchen mit Ladung e als auch für Löcher mit Ladung $-e$ sein. Wir suchen deshalb eine Transformation

$$\psi \rightarrow \psi_C , \quad (2.22)$$

so daß

$$(i\partial\!\!\!/ + eA - m) \psi_C = 0 . \quad (2.23)$$

Ausgehend von

$$(i\partial\!\!\!/ - eA - m) \psi = 0 \quad (2.24)$$

erhalten wir durch komplexe Konjugation:

$$\begin{aligned} & (-i\partial\!\!\!/^\ast - eA^\ast - m) \psi^\ast = 0 \\ \Rightarrow & \gamma_0^T (-i\partial\!\!\!/^\ast - eA^\ast - m) \gamma_0^T \gamma_0^T \psi^\ast = 0 \\ \Rightarrow & (-i\partial\!\!\!/^T - eA^T - m) \gamma_0^T \psi^\ast = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nun existiert in jeder Darstellung der γ -Matrizes eine sog. Ladungskonjugationsmatrix C mit

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu , \quad (2.26)$$

$$C^+ C = 1 , \quad (2.27)$$

$$C^T = -C . \quad (2.28)$$

Schieben wir $C^{-1}C$ in (2.25) ein und multiplizieren mit C von links,

$$C(-i\partial\!\!\!/^T - eA^T - m)C^{-1}C \gamma_0^T \psi^\ast = 0 ,$$

so erhalten wir

$$(i\partial\!\!\!/ - eA - m) \psi_C = 0$$

mit

$$\psi_C = -\eta_C C \gamma_0^T \psi^\ast \quad (2.29)$$

und einem beliebigen Phasenfaktor η_C .

Untersuchen wir als nächstes das Transformationsverhalten von Spinoren unter der Poincaré-Gruppe.

Bei Verschiebungen $x \rightarrow x' = x + y$ bleibt ein Spinor unverändert:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x + y) \quad (2.30)$$

Unter Drehungen $x \rightarrow x' = Rx$ hingegen ist der Spinor selbst zu transformieren. Die Dirac-Gleichungen im ungestrichenen und im gestrichenen System lauten:

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \psi(x) = 0 \quad (2.31)$$

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} - m \right) \psi'(x') = 0 , \quad (2.32)$$

wobei

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = (R^{-1})_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \quad (2.33)$$

und

$$\psi'(x') = S(R)\psi(Rx) . \quad (2.34)$$

Gleichung (2.32) kann man umformen:

$$\left(iS^{-1}(R)\gamma_\mu S(R)R_{\nu\mu}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - m \right) \psi(Rx) = 0 \quad (2.35)$$

Da gemäß der Forderung nach Kovarianz die Dirac-Gleichung in jedem Bezugssystem die gleiche Gestalt haben muß, gilt:

$$S^{-1}(R)\gamma_\mu S(R) = R_{\mu\nu}\gamma_\nu \quad (2.36)$$

Gleichung (2.36) läßt sich am einfachsten lösen, wenn R Matrixdarstellung einer infinitesimalen Drehung $\vartheta M_{\lambda\tau}$ um den Winkel ϑ

$$R = 1 + i\vartheta \mathcal{D}_M(M_{\lambda\tau}) \quad (2.37)$$

und S Spindarstellung derselben infinitesimalen Drehung

$$S(R) = 1 + i\vartheta \mathcal{D}_S(M_{\lambda\tau}) \quad (2.38)$$

ist. Dann gilt:

$$[\gamma_\mu, \mathcal{D}_S(M_{\lambda\tau})] = \mathcal{D}_M(M_{\lambda\tau})_{\mu\nu}\gamma_\nu \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{i} (g_{\lambda\mu}g_{\tau\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\tau\mu}) \gamma_\nu \quad (2.40)$$

$$= \frac{1}{i} (g_{\lambda\mu}\gamma_\tau - g_{\tau\mu}\gamma_\lambda) \quad (2.41)$$

Es ist einfach zu sehen, daß $\mathcal{D}_S(M_{\lambda\tau}) \sim \gamma$ die Gleichung nicht löst. Deshalb versuchen wir den Kommutator zweier Dirac-Matrizes, $[\gamma_\lambda, \gamma_\tau]$,

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu, [\gamma_\lambda, \gamma_\tau]] &= 2 \{ \gamma_\mu, \gamma_\lambda \} \gamma_\tau + [\gamma_\tau, \{ \gamma_\mu, \gamma_\lambda \}] - 2 \{ \gamma_\mu, \gamma_\tau \} \gamma_\lambda - [\gamma_\lambda, \{ \gamma_\mu, \gamma_\tau \}] \\ &= -4g_{\mu\lambda}\gamma_\tau + 4g_{\mu\tau}\gamma_\lambda , \end{aligned} \quad (2.42)$$

so daß man

$$\mathcal{D}_S(M_{\lambda\tau}) = \frac{i}{4} [\gamma_\lambda, \gamma_\tau] \quad (2.43)$$

wählen kann. Das Resultat ist unabhängig von der Darstellung der γ -Matrizes.

2.3 Darstellung von Dirac-Matrizes, Majorana-Spinoren

Für die später einzuführende Supersymmetrie interessieren wir uns für reelle Lösungen von

$$(i\cancel{\partial} - m) \psi = 0 . \quad (2.44)$$

Das ist möglich für $\gamma_\mu^* = -\gamma_\mu$ (Majorana-Darstellung). Unsere Wahl der γ -Matrizes, der Matrix C und des Phasenfaktors η_C lautet deshalb:

$$C = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$\eta_C = 1 \quad (2.48)$$

Die Bedingungen des letzten Abschnitts sind erfüllt. Es folgt

$$\psi_C = \psi^* . \quad (2.49)$$

Da (2.44) reelle Lösungen zuläßt, können wir im folgenden

$$\psi = \psi_C = \psi^* \quad (2.50)$$

fordern. Der so eingeschränkte sog. Majorana-Spinor $(\psi_\alpha)_{\alpha=1,2}$ hat zwei Freiheitsgrade. Die im letzten Abschnitt berechnete Spindarstellung von $M_{\mu\nu}$ ist mit der Majorana-Bedingung verträglich.

Ein wichtiger Punkt darf nicht unerwähnt bleiben. Startet man bei einer nichteuklidischen Feldtheorie – diese Vorgehensweise wird von den meisten Feldtheoretikern bevorzugt – so muß die Feldtheorie anschließend Wick-rotiert werden, um d -dimensionalen Integralen einen Sinn zu verleihen. Der mitzurotierende Spinor erfüllt dann allerdings nicht mehr die Majorana-Bedingung. Auch wenn sich das rechnerisch nicht bemerkbar macht, so ist es logisch unbefriedigend.

2.4 Graßmann-Variablen

Um für Fermionen ein Pfadintegral definieren zu können, werden wir Fermionen nicht mehr als komplexe Zahlen, sondern als Graßmann-Variablen auffassen. Wir stellen deren wichtigste Eigenschaften zusammen. (Vgl. Berezin [5])

Seien $\{\theta, \theta_1, \theta_2, \dots\}$ Graßmannvariablen, dann sind Summe und Produkt definiert mit folgenden Eigenschaften:

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 \quad (2.51)$$

$$(\theta_1 + \theta_2) + \theta_3 = \theta_1 + (\theta_2 + \theta_3) \quad (2.52)$$

$$\theta_1 \theta_2 = -\theta_2 \theta_1 \quad (2.53)$$

$$(\theta_1 \theta_2) \theta_3 = \theta_1 (\theta_2 \theta_3) \quad (2.54)$$

$$(\theta_1 + \theta_2) \theta_3 = \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_3 \quad (2.55)$$

Das Minuszeichen in (2.53) hat zur Folge, daß

$$\theta^2 = \theta \theta = -\theta \theta = 0 . \quad (2.56)$$

Das Produkt zweier Graßmanvariablen verhält sich wieder ähnlich einer komplexen Zahl

$$(\theta_1 \theta_2) \theta_3 = \theta_3 (\theta_1 \theta_2) , \quad (2.57)$$

da die beiden beim Tauschen von θ_3 mit θ_1 und θ_2 entstehenden Minuszeichen sich wegheben. Aufgrund dieser Vertauschungseigenschaften nennt man die θ_i ungerade und ebenso alle Objekte, die beim Vertauschen mit einem der θ_i ein Minuszeichen einsammeln. Alle anderen nennt man gerade.

Die Menge $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ als Basis der Algebra erzeugt den 2^n -dimensionalen Vektorraum

$$\mathcal{G}^n := \langle \{1, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta_1 \theta_2, \theta_1 \theta_3, \dots, \theta_{n-1} \theta_n, \dots, \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n\} \rangle ,$$

dessen Basiselemente linear unabhängig sind, d.h. eine Funktion der θ_i hat die einfache Gestalt:

$$f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = f^{(0)} + \sum_i f_i^{(1)} \theta_i + \sum_{i < j} f_{ij}^{(2)} \theta_i \theta_j + \dots + f_{12\dots n}^{(n)} \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n \quad (2.58)$$

Ordnen wir allen nicht verschwindenden Produkten der θ_i die Norm 1 zu, so ist auf \mathcal{G}^n eine Norm definiert durch

$$||f||^2 := |f^{(0)}|^2 + \sum_i |f_i^{(1)}|^2 + \sum_{i < j} |f_{ij}^{(2)}|^2 + \dots + |f_{12\dots n}^{(n)}|^2 . \quad (2.59)$$

Wir definieren die Ableitung nach θ_i als

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j := \delta_{ij} . \quad (2.60)$$

Die üblichen Differentiationsgesetze (Produktregel, Kettenregel) sind zu verwenden. Aus (2.53) leitet sich ab, daß

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \theta_1 \theta_2 = - \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} \theta_2 \right) \theta_1 = -\theta_1 \quad (2.61)$$

und nicht etwa $+\theta_1$. Die Regeln liefern auch für $\theta^2 = 0$ das richtige Ergebnis:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\theta \theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \theta \right) \theta - \theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \theta \right) = \theta - \theta = 0 \quad (2.62)$$

Analog ist die Linksableitung als

$$\theta_j \overset{\leftarrow}{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} := \delta_{ij} \quad (2.63)$$

definiert. Während die Ableitung nach Graßmann-Variablen weitgehend wie bei reellen Zahlen definiert werden konnte, ist das bei der Integration nicht möglich. Für das Integral über θ_1 ist Translationsinvarianz zu fordern:

$$\int d\theta_1 f(\theta_1) \stackrel{!}{=} \int d\theta_1 f(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.64)$$

Außerdem muß das Integral natürlich unabhängig von θ_2 und linear in f sein. Mit der Entwicklung

$$f(\theta) = f_0 + \theta f_1 \quad (2.65)$$

lautet (2.64)

$$\int d\theta_1 (f_0 + \theta_1 f_1) \stackrel{!}{=} \int d\theta_1 (f_0 + \theta_2 f_1 + \theta_1 f_1) , \quad (2.66)$$

so daß bis auf einen Vorfaktor nur f_1 in Frage kommt:

$$\int d\theta (f_0 + \theta f_1) := f_1 \quad (2.67)$$

Das Integral über θ ist demnach identisch mit der Ableitung nach θ :

$$\int d\theta f(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) \quad (2.68)$$

Man kann auch für Graßmannvariablen das konjugiert Komplexe definieren. Unsere Basis $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ der Algebra wählen wir reell:

$$\theta_i^* := \theta_i \quad (2.69)$$

Für das Produkt zweier Graßmann-Variablen nutzen wir die Möglichkeit, bei der Bildung des konjugiert Komplexen die Reihenfolge umzudrehen:

$$(\phi\psi)^* := \psi^* \phi^* \quad (2.70)$$

Diese Vorschrift stellt sicher, daß das Produkt $\bar{\psi}\psi$ zweier Graßmann-wertiger Spinoren wieder reell ist.

Für *reelle* Spinoren $\psi_\alpha^* = \psi_\alpha$ und $\varphi_\alpha^* = \varphi_\alpha$ gilt insbesondere:

$$\bar{\psi}\varphi = \bar{\varphi}\psi \quad (2.71)$$

und

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\varphi = -\bar{\varphi}\gamma_\mu\psi . \quad (2.72)$$

Diese beiden Gleichungen werden im folgenden häufig verwendet, ohne daß explizit darauf verwiesen würde. Einen weiteren Trick für reelle Spinoren lohnt es sich zu merken:

$$(\bar{\theta}\psi)(\bar{\theta}\varphi) = \bar{\theta}\psi \bar{\varphi}\theta = \bar{\theta}_\alpha\psi_\alpha\bar{\varphi}_\alpha\theta_\alpha = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\bar{\varphi}\psi , \quad (2.73)$$

da $\bar{\theta}_1\theta_2 = \bar{\theta}_2\theta_1 = 0$ und $\bar{\theta}_1\theta_1 = \bar{\theta}_2\theta_2 = \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta$. Wir werden auch ihn häufig benötigen.

2.5 Erweiterung der Poincaré-Algebra

Fassen wir unsere obigen Ausführungen unter feldtheoretischen Gesichtspunkten zusammen: Neben der Invarianz der Lagrangefunktion unter der Poincaré-Gruppe spielt auch die Invarianz unter internen Symmetrietransformationen eine wichtige Rolle. Invarianzen liefern immer einen zugehörigen erhaltenen Strom (Noether-Strom). Interessant wäre es deshalb, Symmetrieoperationen zu finden, die vom Ort selbst abhängen. Anders ausgedrückt: Die Generatoren der zugehörigen Lie-Algebra sollen nichtverschwindende Kommutatoren mit den Generatoren der Poincaré-Algebra besitzen. Gerade das wird aber vom Coleman-Mandula-Theorem [9] verboten. Wir wollen hier nicht die Voraussetzungen des Theorems diskutieren. Die Idee ist: Die Lie-Gruppe der Symmetrien zerfällt in ein direktes Produkt der Poincaré-Gruppe und einer internen Symmetrie-Gruppe.

Eine Möglichkeit, die Restriktionen des Coleman-Mandula-Theorems zu umgehen, besteht in der Verwendung von Super-Lie-Gruppen (Haag et. al. 1975 [15]).

Wir definieren, was wir unter der zugehörigen Super-Lie-Algebra verstehen: Eine Menge $\{L_i, Q_j\}$ von Generatoren bilden eine Super-Lie-Algebra, falls die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

1. $\{L_i\}$ als gerade und $\{Q_j\}$ als ungerade Elemente bilden eine graduierte Algebra⁷:

$$\begin{aligned} \text{gerade} \cdot \text{gerade} &= \text{gerade} \\ \text{gerade} \cdot \text{ungerade} &= \text{ungerade} \\ \text{ungerade} \cdot \text{ungerade} &= \text{gerade} \end{aligned}$$

Das Produkt wird als Kommutator bzw. Antikommutator geschrieben:

$$\begin{aligned} L_i \cdot L_j &:= [L_i, L_j] \\ L_i \cdot Q_j &:= [L_i, Q_j] \\ Q_i \cdot Q_j &:= \{Q_i, Q_j\} \end{aligned}$$

2. Die Produkte sind symmetrisch respektive antisymmetrisch:

$$[L_i, L_j] = -[L_j, L_i] \quad (2.74)$$

$$[L_i, Q_j] = -[Q_j, L_i] \quad (2.75)$$

$$\{Q_i, Q_j\} = \{Q_j, Q_i\} \quad (2.76)$$

3. Die Produkte sind linear in jedem Argument.
4. Es gilt eine graduierte Jacobi-Identität für die Generatoren. Diese ergibt sich aus der Forderung, daß für $x_i \in \mathbb{R}$ und $\theta_j \in \mathcal{G}$ die Jacobi-Identität für Lie-Algebren Gültigkeit hat (keine Summation):

$$\begin{aligned} [x_i L_i, [x_j L_j, x_k L_k]] + [x_j L_j, [x_k L_k, x_i L_i]] + [x_k L_k, [x_i L_i, x_j L_j]] &= 0 \\ \Rightarrow [L_i, [L_j, L_k]] + [L_j, [L_k, L_i]] + [L_k, [L_i, L_j]] &= 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

⁷Diese Graduierung gilt im übrigen auch für Graßmann-Variablen.

$$\begin{aligned}
& [\theta_i Q_i, [x_j L_j, x_k L_k]] + [x_j L_j, [x_k L_k, \theta_i Q_i]] + [x_k L_k, [\theta_i Q_i, x_j L_j]] = 0 \\
& \Rightarrow [Q_i, [L_j, L_k]] + [L_j, [L_k, Q_i]] + [L_k, [Q_i, L_j]] = 0 \quad (2.78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\theta_i Q_i, [\theta_j Q_j, x_k L_k]] + [\theta_j Q_j, [x_k L_k, \theta_i Q_i]] + [x_k L_k, [\theta_i Q_i, \theta_j Q_j]] = 0 \\
& \Rightarrow \{Q_i, [Q_j, L_k]\} - \{Q_j, [L_k, Q_i]\} + [L_k, \{Q_i, Q_j\}] = 0 \quad (2.79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\theta_i Q_i, [\theta_j Q_j, \theta_k Q_k]] + [\theta_j Q_j, [\theta_k Q_k, \theta_i Q_i]] + [\theta_k Q_k, [\theta_i Q_i, \theta_j Q_j]] = 0 \\
& \Rightarrow [Q_i, \{Q_j, Q_k\}] + [Q_j, \{Q_k, Q_i\}] + [Q_k, \{Q_i, Q_j\}] = 0 \quad (2.80)
\end{aligned}$$

Die Konstruktion spiegelt die Tatsache wider, daß sich eine graduierte Lie-Algebra über den reellen Zahlen auch als Lie-Algebra über den Graßmann-Variablen auffassen läßt. Der Begriff der Super-Lie-Algebra ist eine natürliche Erweiterung des Begriffes einer Lie-Algebra: Die Menge der geraden Transformationen bildet eine bezüglich Multiplikation und Addition abgeschlossene Teilmenge, die selbst wieder eine Lie-Algebra ist.

Versuchen wir nun also, die Poincaré-Algebra zu einer Super-Lie-Algebra zu erweitern. Symmetrien, die nur interne Freiheitsgrade betreffen, denken wir uns ausfaktoriert. Zuerst einmal ist klar, daß die Poincaré-Algebra Teilalgebra des geraden Teiles der Erweiterung ist. Der gerade Teil umfaßt wegen des Coleman-Mandula-Theorems aber auch *nur* die Poincaré-Algebra.

Für die Konstruktion einer Erweiterung der Lie-Algebra ist der folgende Satz von grundlegender Bedeutung:

Satz 2.1 *Der ungerade Teil einer Super-Lie-Algebra ist in natürlicher Weise Träger einer Darstellung des geraden Teils.*

Beweis: Sei L ein Element des geraden Teils – also der Lie-Algebra – und $\{Q_i\}_{i=1\dots n}$ eine Basis für den ungeraden Teil der Super-Lie-Algebra. Dann gilt:

$$[Q_i, L] = \sum_j \mathcal{D}(L)_{ij} Q_j \quad (2.81)$$

Die so eindeutig bestimmte Abbildung

$$\mathcal{D} : L \rightarrow D(L) \quad (2.82)$$

vom geraden Teil der Super-Lie-Algebra auf die $n \times n$ -Matrizes ist eine Darstellung der Lie-Algebra des geraden Teils. Warum? Zuerst einmal ist \mathcal{D} eine lineare Abbildung, weil die Lie-Klammer in jedem Argument linear ist. Zu zeigen bleibt, daß

$$\mathcal{D}([L_p, L_q]) = \mathcal{D}(L_p)\mathcal{D}(L_q) - \mathcal{D}(L_q)\mathcal{D}(L_p) \quad (2.83)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}([L_p, L_q])_{ij} Q_j &= [Q_i, [L_p, L_q]] \\
&= -[L_p, [L_q, Q_i]] - [L_q, [Q_i, L_p]] \\
&= [L_p, \mathcal{D}(L_q)_{ik} Q_k] - [L_q, \mathcal{D}(L_p)_{ik} Q_k] \\
&= -\mathcal{D}(L_q)_{ik} \mathcal{D}(L_p)_{kj} Q_j + \mathcal{D}(L_p)_{ik} \mathcal{D}(L_q)_{kj} Q_j \\
&= [\mathcal{D}(L_p), \mathcal{D}(L_q)]_{ij} Q_j \quad (2.84)
\end{aligned}$$

□

Die Bedeutung dieses Theorems liegt darin, daß man es rückwärts benutzen kann, indem man eine Darstellung der zu erweiternden Lie-Algebra vorgibt und dadurch den ungeraden Teil der Super-Lie-Algebra definiert:

$$[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = \mathcal{D}_S(M_{\mu\nu})_{\alpha\beta} Q_\beta \quad (2.85)$$

$$= \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]_{\alpha\beta} Q_\beta \quad (2.86)$$

und

$$[P_\mu, Q_\alpha] = 0, \quad (2.87)$$

wobei $Q_{\alpha,\alpha=1,2}$ reell, also als Majorana-Spinoren gewählt werden sollen. Dieses ist die einfachste nichttriviale Erweiterung.

Zur besseren Übersicht über die Struktur wollen wir in diesem Zusammenhang noch anmerken: Beim Beweis von Theorem 2.1 wurde nur vorausgesetzt, daß eine Graduierung existiert, die eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra auszeichnet. Die Menge $\{Q_i\}$ hätte auch eine Basis für den nicht zu dieser Unteralgebra gehörenden Teil einer Lie-Algebra sein können. Ein Beispiel hierfür sind die Kommutatorrelationen von $M_{\mu\nu}$ und P_σ :

$$[P_\sigma, M_{\mu\nu}] = \mathcal{D}_M(M_{\mu\nu})_{\sigma\tau} P_\tau \quad (2.88)$$

Es ist noch der Antikommutator der Q_α zu bestimmen. Wegen

$$\begin{aligned} [P_\mu, \{Q_\alpha, Q_\beta\}] &= \{Q_\beta, [P_\mu, Q_\alpha]\} - \{Q_\alpha, [Q_\beta, P_\mu]\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.89)$$

und (2.7) ist der Antikommutator der Q_α von $M_{\mu\nu}$ unabhängig. Er hat die Form:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (F_\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \quad (2.90)$$

Seine Jacobi-Identität mit P_μ ist identisch erfüllt. Die andere lautet:

$$[M_{\mu\nu}, \{Q_\alpha, Q_\beta\}] = -\{Q_\alpha, [Q_\beta, M_{\mu\nu}]\} + \{Q_\beta, [M_{\mu\nu}, Q_\alpha]\} \quad (2.91)$$

Nach einigen Umformungen gelangt man zu:

$$\begin{aligned} (g_{\nu\lambda} g_{\mu\tau} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\tau}) F_\lambda &= \frac{1}{4} ([\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_\tau + F_\tau [\gamma_\mu, \gamma_\nu]^T) \\ &= \frac{1}{4} ([\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_\tau - F_\tau C^{-1} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] C) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Daraus folgt:

$$(g_{\nu\lambda} g_{\mu\tau} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\tau}) F_\lambda C^{-1} = \frac{1}{4} [[\gamma_\mu, \gamma_\nu], F_\tau C^{-1}] \quad (2.93)$$

Wegen (2.42) löst

$$F_\tau = 2\gamma_\tau C \quad (2.94)$$

das Gleichungssystem. Der Faktor 2 in (2.94) folgt der heute üblichen Konvention [11],[23]. Sein Vorzeichen ist in nichteuklidischen Feldtheorien aus der Forderung abzuleiten, daß der Erwartungswert der Energie stets nichtnegativ ist⁸:

$$0 \leq \langle \phi, \{Q_\alpha, Q_\alpha\} \phi \rangle = 2 \langle \phi, \text{Tr}(\not{P} \gamma_0) \phi \rangle = 4 \langle \phi, E \phi \rangle \quad (2.95)$$

⁸Man vergleiche Fußnote 5 auf Seite 10.

Wesentlich für die Vorzeichenwahl ist, daß in unserer Darstellung $C = +\gamma_0$ gilt. Die Symmetrie aus (2.90) ist ebenfalls erfüllt:

$$(\gamma_\mu C)^T = C^T \gamma_\mu^T = -C \gamma_\mu^T C^{-1} C = \gamma_\mu C \quad (2.96)$$

Zusammenfassend gilt für die Poincaré-Superalgebra:

$$\begin{aligned} [P_\tau, M_{\mu\nu}] &= \mathcal{D}_M(M_{\mu\nu})_{\tau\lambda} P_\lambda \\ &= \frac{1}{i}(g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau})P_\lambda \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, M_{\mu\nu}] &= \mathcal{D}_S(M_{\mu\nu})_{\alpha\beta} Q_\beta \\ &= \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]_{\alpha\beta} Q_\beta \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (2.99)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2(\not{P}\gamma_0)_{\alpha\beta} \quad (2.100)$$

$$\Leftrightarrow \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2(\not{P})_{\alpha\beta} \quad (2.101)$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0 \quad (2.102)$$

2.6 Superfeld-Darstellung von Q_α

In diesem Abschnitt soll ein Teilchen-Multiplett und eine Transformationsvorschrift angegeben werden, die die Poincaré-Super-Algebra nichttrivial realisiert. Hierfür existiert eine sehr elegante Methode, die bald nach der Entdeckung der Supersymmetrie von Salam und Strathdee [22] angegeben wurde: Die Superfeld-Darstellung. Die Idee ist folgende: So wie eine Verschiebung mittels P_μ durch einen Ortsvektor x_μ parametrisiert wird

$$L(x) = e^{ixP}, \quad (2.103)$$

läßt sich Q_α durch einen Graßmann-wertigen und reellen Majorana-Spinor θ_α parametrisieren⁹:

$$L(\theta) = e^{i\bar{\theta}Q} \quad (2.104)$$

Analog zur Darstellung von P als Ableitung nach x würde man gerne auch Q als Ableitung nach θ darstellen. Hierzu muß der \mathbb{R}^2 um zwei Graßmann-Variablen zu $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{G}^2$ erweitert werden. Funktionen von x werden zu Funktionen von x und θ . Der Wertebereich ist die Menge der geraden Graßmann-Variablen. Die Taylor-Entwicklung von $\Phi(x, \theta)$ – im folgenden Superfeld genannt – ist nach Abschnitt 2.4:

$$\Phi(x, \theta) = \varphi(x) + \bar{\theta}\psi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F(x) \quad (2.105)$$

⁹Das Skalarprodukt ist dasselbe wie in Abschnitt 2.2.

Das als reell

$$\Phi(x, \theta)^* = \Phi(x, \theta) \quad (2.106)$$

angenommene Super-Feld enthält zwei – ebenfalls reelle – bosonische Felder (φ, F) und einen Majorana-Bispinor $(\psi_\alpha)_{\alpha=1,2}$. An dieser Stelle wird klar, warum in (2.85) gerade die Spindarstellung verwendet wurde: Mit dieser Wahl transformiert sich Q_α wie ein Spinor, wegen (2.104) θ_α und wegen (2.105) schließlich auch ψ_α .

Als Superfeld soll $\Phi(x, \theta)$ durch Translation aus $\Phi(0, 0)$ hervorgehen:

$$\Phi(x, \theta) = L(x, \theta)\Phi(0, 0)L^{-1}(x, \theta) \quad (2.107)$$

mit

$$L(x, \theta) = e^{i(xP + \bar{\theta}Q)} \quad (2.108)$$

Wegen $L^+(x, \theta) = L^{-1}(x, \theta)$ ist (2.106) mit (2.107) verträglich. Nach (2.99) bis (2.102) vertauschen Verschiebungen in x -Richtung mit sich selbst und mit Verschiebungen in θ -Richtung, nicht aber solche in θ -Richtung. Untersuchen wir deshalb die Verkettung zweier Verschiebungen $L(0, \eta)L(0, \zeta)$ in θ -Richtung. Für nicht kommutierende Abbildungen A, B gilt die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, B], B) + [A, [A, B]] + \dots} \quad (2.109)$$

Für die angegebenen Verschiebungen folgt

$$\begin{aligned} L(0, \eta)L(0, \zeta) &= e^{i\bar{\eta}Q} e^{i\bar{\zeta}Q} \\ &= e^{i(\bar{\eta} + \bar{\zeta})Q - \frac{1}{2}[\bar{\eta}Q, \bar{\zeta}Q]} \end{aligned} \quad (2.110)$$

da bereits der zweifache Kommutator

$$[[\bar{\eta}Q, \bar{\zeta}Q], \bar{\zeta}Q] = [\bar{\eta}Q, [\bar{\eta}Q, \bar{\zeta}Q]] = 0 \quad (2.111)$$

ist. Nun gilt weiter

$$\begin{aligned} [\bar{\eta}Q, \bar{\zeta}Q] &= [\bar{\eta}Q, \bar{Q}\zeta] \\ &= \bar{\eta}_\alpha \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} \zeta_\beta \\ &= 2\bar{\eta}\not{P}\zeta \end{aligned} \quad (2.112)$$

und schließlich

$$e^{i\bar{\eta}Q} e^{i\bar{\zeta}Q} = e^{i(\bar{\eta} + \bar{\zeta})Q - \bar{\eta}\not{P}\zeta}. \quad (2.113)$$

Ein Feld $\Phi(x, \theta)$ wird durch $L(y, \zeta)$ also transportiert nach:

$$\begin{aligned} L(y, \zeta)\Phi(x, \theta)L^{-1}(y, \zeta) &= L(y, \zeta)L(x, \theta)\Phi(0, 0)L^{-1}(x, \theta)L^{-1}(y, \zeta) \\ &= e^{i((x+y+i\bar{\zeta}\gamma\theta)P + (\bar{\theta} + \bar{\zeta})Q)} \Phi(0, 0) e^{-i((x+y+i\bar{\zeta}\gamma\theta)P + (\bar{\theta} + \bar{\zeta})Q)} \\ &= \Phi(x + y + i\bar{\zeta}\gamma\theta, \theta + \zeta) \end{aligned} \quad (2.114)$$

Für infinitesimal kleine ζ folgt:

$$\begin{aligned} [i\bar{\zeta}Q, \Phi(x, \theta)] &= \Phi(x + i\bar{\zeta}\gamma\theta, \theta + \zeta) - \Phi(x, \theta) \\ &= \bar{\zeta} \left(i\not{\partial}\theta + \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \right) \Phi(x, \theta) \end{aligned} \quad (2.115)$$

Hieraus läßt sich eine Darstellung von Q_α auf $C^\omega(\mathbb{R}^2 \times \mathcal{G}^2)$ ablesen:

$$\mathcal{D}_\omega(Q_\alpha) = (\not{\partial}\theta)_\alpha - i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} \quad (2.116)$$

Mit Hilfe von (2.116) kann die supersymmetrische Transformation des Superfeldes berechnet werden. Für einen beliebigen Majorana-Spinor η gilt:

$$\delta_\eta \Phi(x, \theta) := D_\omega(i\bar{\eta}Q)\Phi(x, \theta) \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} &= \left(i(\bar{\eta}\not{\partial}\theta) + \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \right) (\varphi(x) + \bar{\theta}\psi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F(x)) \\ &= -i\bar{\theta}\not{\partial}\varphi(x)\eta - \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\bar{\eta}i\not{\partial}\psi(x) + \bar{\eta}\psi(x) + \bar{\theta}\eta F(x) \end{aligned} \quad (2.118)$$

Wir erhalten das gesuchte Transformationsverhalten der Komponentenfelder:

$$\begin{aligned} \delta_\eta \varphi(x) &= \bar{\eta}\psi(x) \\ \delta_\eta \psi(x) &= -i\not{\partial}\varphi(x)\eta + F(x)\eta \\ \delta_\eta F(x) &= -\bar{\eta}i\not{\partial}\psi(x) \end{aligned} \quad (2.119)$$

2.7 Invarianten eines Superfeldes

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine Rotations-, Tanslations- und Supertranslations-invariante Feldtheorie aufzustellen. Mit anderen Worten: Wir suchen eine Dichte, die sich unter den angegebenen Translationen höchstens um eine totale Divergenz ändert, damit die zugehörige Feldtheorie invariant unter der Super-Poincaré-Gruppe ist. Von den drei Superfeld-Komponenten φ , ψ und F erfüllt nur F diese Forderung. F transformiert sich unter infinitesimalen Drehungen, Translationen und Supertranslationen als

$$\delta_\omega F(x) = i x_\tau \mathcal{D}_M(\omega M)_{\tau\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} F(x) \quad (2.120)$$

$$\delta_y F(x) = y \frac{\partial}{\partial x} F(x) \quad (2.121)$$

$$\delta_\eta F(x) = -\bar{\eta}i\not{\partial}\psi(x) , \quad (2.122)$$

also als eine totale Divergenz. In Analogie zu (2.67) definieren wir

$$\int d^2\theta = \frac{1}{2} \int d\bar{\theta}d\theta = \frac{1}{i} \int d\theta_1 d\theta_2 , \quad (2.123)$$

so daß $\int d^2\theta \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta = 1$ und das Integral

$$\int d^2\theta \Phi(x, \theta) = F(x) \quad (2.124)$$

die invariante Dichte liefert.

Außerdem ist das Produkt zweier Superfelder wieder ein Superfeld. Der Beweis ist sehr einfach:

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, \theta)\Phi_2(x, \theta) &= L(x, \theta)\Phi_1(0, 0)L^{-1}(x, \theta)L(x, \theta)\Phi_2(0, 0)L^{-1}(x, \theta) \\ &= L(x, \theta)\Phi_1(0, 0)\Phi_2(0, 0)L^{-1}(x, \theta) \\ &= (\Phi_1 \cdot \Phi_2)(x, \theta)\end{aligned}\tag{2.125}$$

Für eine sinnvolle Theorie fehlen allerdings noch Terme, die Ableitungen enthalten. Zwar ist

$$\int d^2\theta \Phi(x, \theta)\Delta\Phi(x, \theta) = \varphi(x)\Delta F(x) + F(x)\Delta\varphi(x) - \bar{\psi}(x)\Delta\psi(x)\tag{2.126}$$

invariant, enthält aber zu hohe Ableitungen. Ein anderer Kandidat für eine invariante Dichte ist

$$\bar{\eta}Q\Phi(x, \theta) .\tag{2.127}$$

Wegen

$$\begin{aligned}L(0, \zeta)\bar{\eta}Q\Phi(x, \theta)L^{-1}(x, \zeta) &= e^{i\bar{\zeta}Q}\bar{\eta}Q\Phi(x, \theta)e^{-i\bar{\zeta}Q} \\ &\neq \bar{\eta}Qe^{i\bar{\zeta}Q}\Phi(x, \theta)e^{-i\bar{\zeta}Q}\end{aligned}\tag{2.128}$$

ist $\bar{\eta}Q\Phi(x, \theta)$ aber nicht supertranslationsinvariant. Man benötigt vielmehr eine Ableitung D_α , die sowohl mit P_τ kommutiert als auch mit Q_α antikommutiert und sich unter Drehungen wie ein Spinor transformiert. Es ist einfach zu sehen, daß die *superkovariante Ableitung*

$$D_\alpha := \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} - i(\not{\partial}\theta)_\alpha$$

(2.129)

die Forderungen erfüllt^{10,11}.

Invariant unter sämtlichen Operationen der Super-Poincaré-Gruppe ist der Ausdruck

$$\int d^2\theta \Phi(x, \theta)\frac{1}{2}\bar{D}D\Phi(x, \theta) ,\tag{2.130}$$

der deshalb Verwendung als kinetische Energie findet.

Bevor wir diesen Ausdruck weiter untersuchen, müssen wir uns zunächst mit den Eigenschaften der D_α vertraut machen.

¹⁰Im folgenden bezeichnen – soweit nicht besonders vermerkt – D_α , Q_α , P_μ und $M_{\mu\nu}$ immer die Darstellungen auf $C^\omega(\mathbb{R}^2 \times \mathcal{G}^2)$ und nicht die abstrakten Super-Lie-Algebra-Elemente.

¹¹Achtung: $D_\alpha^* = -D_\alpha$. Trotzdem werden wir, allgemein üblicher Konvention folgend, $\bar{D}_\alpha = D_\alpha\gamma_{\alpha\beta}^0$ definieren und nicht $\bar{D}_\alpha = (D^+\gamma^0)_\alpha$, wie es konsequent wäre. Insbesondere gilt dann wieder $\bar{\zeta}D = \bar{D}\zeta$.

2.8 Relationen für die superkovariante Ableitung

Die superkovariante Ableitung war mit Hilfe der Abkürzung $\not{\partial} = \gamma_\mu \partial^\mu$ definiert als

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} - i(\not{\partial}\theta)_\alpha . \quad (2.131)$$

Wir gehen zur Darstellung im Impulsraum über¹²:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} - (\not{k}\theta)_\alpha \quad (2.132)$$

$$\Leftrightarrow \bar{D}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + (\bar{\theta}\not{k})_\alpha \quad (2.133)$$

Die Bedingung $\Phi^*(x, \theta) = \Phi(x, \theta)$ geht über in $\Phi^*(k, \theta) = \Phi(-k, \theta)$. Für die Ableitung D_α beweisen wir die wichtigsten Eigenschaften.

Man kann D_α partiell integrieren¹³:

$$\int d^2\theta \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f^*(k, \theta) D_\alpha|_{k, \theta} g(k, \theta) = - \int d^2\theta \frac{d^d k}{(2\pi)^d} D_\alpha|_{-k, \theta} f^*(k, \theta) g(k, \theta) \quad (2.134)$$

Der Operator $\frac{1}{2}\bar{D}D$ ist ein selbstadjungierter Operator:

$$\int d^2\theta \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f^*(k, \theta) \frac{1}{2}\bar{D}D|_{k, \theta} g(k, \theta) = \int d^2\theta \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{2}\bar{D}D|_{-k, \theta} f^*(k, \theta) \right) g(k, \theta) \quad (2.135)$$

Die Wirkung von D_α auf ein Superfeld lautet in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} D_\alpha \Phi(k, \theta) &= \psi_\alpha(k) + \theta_\alpha F(k) - (\not{k}\theta)_\alpha \varphi(k) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta(\not{k}\psi(k))_\alpha \\ &= \psi_\alpha(k) + \bar{\theta}((F(k) + \not{k}\varphi(k))\gamma^0)_\alpha + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta(\not{k}\psi(k))_\alpha \end{aligned} \quad (2.136)$$

und bei zweimaliger Anwendung

$$\frac{1}{2}\bar{D}D \Phi(k, \theta) = -F(k) + \bar{\theta}\not{k}\psi(k) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta k^2 \varphi(k) . \quad (2.137)$$

Daraus erhält man

$$\left(\frac{1}{2}\bar{D}D \right)^2 \Phi(k, \theta) = -k^2 \Phi(k, \theta) . \quad (2.138)$$

$\frac{1}{2}\bar{D}D$ spielt in supersymmetrischen Theorien dieselbe Rolle wie \not{k} in der Diractheorie ($\not{k}^2 = -k^2$).

¹²Wir folgen wieder allgemein üblicher Konvention [3], auch wenn man aufgrund von $\mathcal{D}_\omega(P_\mu) = -i\partial_\mu$ das andere Vorzeichen erwarten würde. Zur Verdeutlichung schreiben wir kleine Buchstaben für Vektoren aus dem Impulsraum.

¹³Man beachte, daß sich das Argument des Wellenvektors umdreht. Man darf beim partiellen Integrieren auch nicht vergessen, daß $D_\alpha|_{k, \theta} f(k, \theta') = -(\not{k}\theta)_\alpha f(k, \theta')$, also nicht verschwindet.

Man kann auch Rechts- in Links-Ableitungen umwandeln und umgekehrt:

$$D_\alpha \Big|_{k,\theta} \Phi(k, \theta) = -\Phi(k, \theta) \overleftarrow{D}_\alpha \Big|_{-k,\theta} \quad (2.139)$$

Wichtig sind außerdem die Kommutatoren

$$\{D_\alpha(k, \theta), D_\beta(k, \theta)\} = 2(\not{k}\gamma^0)_{\alpha\beta} , \quad (2.140)$$

$$\{D_\alpha(k, \theta), \bar{D}_\beta(k, \theta)\} = 2(\not{k})_{\alpha\beta} \quad (2.141)$$

und

$$[D_\alpha, D_\beta] = -\gamma_{\alpha\beta}^0 \bar{D} D , \quad (2.142)$$

$$[\bar{D}_\alpha, D_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \bar{D} D \quad (2.143)$$

sowie

$$[D_\alpha, \bar{D} D] = 4(\not{k} D)_\alpha . \quad (2.144)$$

Insbesondere erhält man daraus:

$$\begin{aligned} D_\alpha D_\beta &= \frac{1}{2} \{D_\alpha, D_\beta\} + \frac{1}{2} [D_\alpha, D_\beta] \\ &= (\not{k}\gamma^0)_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{1}{2} \bar{D} D \end{aligned} \quad (2.145)$$

$$\begin{aligned} \bar{D} \not{k} D &= D_\alpha (\gamma_0 \not{k})_{\alpha\beta} D_\beta = (\gamma_0 \not{k})_{\alpha\beta} (\not{k}\gamma_0)_{\alpha\beta} \\ &= -2k^2 \end{aligned} \quad (2.146)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_\alpha \bar{D} D D_\alpha &= \bar{D} D \bar{D} D - \bar{D}_\alpha [D_\alpha, \bar{D} D] \\ &= -4k^2 - 4\bar{D} \not{k} D \\ &= 4k^2 = -\bar{D} D \bar{D} D \end{aligned} \quad (2.147)$$

Das Integral über θ ist in (2.123) definiert worden:

$$\int d^2\theta = \frac{1}{2} \int d\bar{\theta} d\theta = \frac{1}{i} \int d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.148)$$

Suchen wir eine Darstellung der δ -Distribution für das Integral über θ :

$$\int d^2\theta f(\theta) \delta^2(\theta - \theta') \stackrel{!}{=} f(\theta') \quad (2.149)$$

Wegen der Translationsinvarianz des Integrals über θ

$$\int d^2\theta f(\theta) \delta^2(\theta - \theta') = \int d^2\theta f(\theta + \theta') \delta^2(\theta) \quad (2.150)$$

muß $\delta^2(\theta) \sim \theta_1 \theta_2$ sein, damit aus der Taylorentwicklung von $f(\theta + \theta')$ nur Terme, die unabhängig von θ sind, übrigbleiben. Die Darstellung der δ -Distribution lautet deshalb:

$$\delta^2(\theta) = \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta \quad (2.151)$$

Für die Ableitungen der δ -Distribution $\delta^2(\theta - \theta')$ an der Stelle $\theta = \theta'$ erhält man mit Hilfe von (2.145):

$$\delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta=\theta'} = 0 \quad (2.152)$$

$$D_\alpha \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta=\theta'} = 0 \quad (2.153)$$

$$D_\alpha D_\beta \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta=\theta'} = (\gamma^0)_{\alpha\beta} \quad (2.154)$$

$$\frac{1}{2} \bar{D} D \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta=\theta'} = -1 \quad (2.155)$$

$$D_\alpha \frac{1}{2} \bar{D} D \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta=\theta'} = 0 \quad (2.156)$$

$$D_\alpha D_\beta \frac{1}{2} \bar{D} D \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta=\theta'} = -(k\gamma^0)_{\alpha\beta} \quad (2.157)$$

$$\frac{1}{2} \bar{D} D D_\alpha D_\beta \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta=\theta'} = -(k\gamma^0)_{\alpha\beta} \quad (2.158)$$

$$D_\alpha \frac{1}{2} \bar{D} D D_\beta \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta=\theta'} = (k\gamma^0)_{\alpha\beta} \quad (2.159)$$

$$\bar{D}_\alpha \frac{1}{2} \bar{D} D D_\alpha \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta=\theta'} = 0 \quad (2.160)$$

$$\delta^2(\theta - \theta') \overleftarrow{D}_\alpha(k, \theta') = D_\alpha(k, \theta) \delta^2(\theta - \theta') \delta^2(k - l) \quad (2.161)$$

$$D_\alpha(k, \theta) \delta^2(\theta - \theta') = -D_\alpha(-k, \theta') \delta^2(\theta - \theta') \quad (2.162)$$

$$\delta^2(\theta - \theta') \overleftarrow{D}_\alpha(k, \theta) = -D_\alpha(-k, \theta) \delta^2(\theta - \theta') \quad (2.163)$$

Eine ähnliche Formel gilt auch für mehrfache Ableitungen der δ -Distribution¹⁴:

$$D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n} \Big|_{k, \theta} \delta^2(\theta - \theta') = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} D_{\alpha_n} \dots D_{\alpha_1} \Big|_{-k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') \quad (2.164)$$

Insbesondere ist:

$$\frac{1}{2} \bar{D} D \Big|_{k, \theta} \delta^2(\theta - \theta') = \frac{1}{2} \bar{D} D \Big|_{-k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') . \quad (2.165)$$

Ferner gilt:

Satz 2.2 Für ungerade n verschwindet $D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n} \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta=\theta'}$.

Beweis: $D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n} = D_{\alpha_1}(D_{\alpha_2} \dots D_{\alpha_n})$. Dieses läßt sich mit Hilfe von (2.145) umformen in einen Ausdruck der Form $D_{\alpha_1}(a + b(\frac{1}{2} \bar{D} D))$, wobei a und b von k^μ und $\alpha_1 \dots \alpha_n$ abhängen. Wendet man diesen auf $\delta^2(\theta - \theta')$ an, so ergibt sich für $\theta = \theta'$ mit Hilfe von (2.153) und (2.156) die Behauptung. \square

Satz 2.3 Für gerade n ist $D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n} \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta=\theta'}$ eine Zahl.

Beweis: Man spaltet wie im letzten Beweis auf: $D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n} = a + b(\frac{1}{2} \bar{D} D)$, wendet diesen Ausdruck auf $\delta^2(\theta - \theta')$ an und wertet ihn an der Stelle $\theta = \theta'$ aus. Mit (2.152) und (2.155) erhält man $-b$. \square

¹⁴Beweis: Zuerst wandelt man mit (2.162) die direkt vor $\delta^2(\theta - \theta')$ stehende Ableitung nach θ und k in eine nach θ' und $-k$ um. Diese kann man dann durch die Ableitungen nach θ und k (und nur durch diese) durchtauschen, wobei jeweils ein Faktor (-1) vom Umwandeln und je einer pro Vertauschen entsteht. Wiederholt man die Prozedur, so erhält man das gewünschte Ergebnis.

Kapitel 3

Das nichtlineare Sigma-Modell

Ein für die Festkörperphysik wichtiges Modell ist das N -Vektor-Modell: An jedem Gitterplatz x sitzt ein N -komponentiger Vektor φ_x , dessen Norm die Bedingung $|\varphi_x| = 1$ erfüllen muß. Die Wechselwirkungsenergie benachbarter Spins ist proportional zu $|\varphi_x - \varphi_{x+1}|^2$. Für $N = 1$ ergibt sich gerade das Ising-Modell. Wir studieren die feldtheoretische Verallgemeinerung.

3.1 Definition des Modells

Das nichtlineare Sigma-Modell beschreibt ein N -komponentiges Vektorfeld mit Betrag 1. Durch die Zwangsbedingung tritt in natürlicher Weise eine Nichtlinearität auf, ein zusätzlicher Wechselwirkungsterm wie bei der ϕ^4 -Theorie in 4 Dimensionen ist nicht notwendig. Das Modell ist in $d = 2 + \varepsilon$ Dimensionen multiplikativ mit zwei Renormierungskonstanten renormierbar, wenn als Parametrisierung ein orthogonales Koordinatensystem $\{\pi^1, \dots, \pi^{N-1}, \sigma\}$ gewählt und die Zwangsbedingung $\pi^2 + \sigma^2 = 1$ durch

$$\sigma = \sqrt{1 - \pi^2} \quad (3.1)$$

realisiert wird¹. Die resultierende Hamiltonfunktion ist:

$$\mathcal{H}_{Bos} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\nabla \pi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \sigma)^2 - m^2 \sigma \right] \quad (3.2)$$

Der Term $m^2 \sigma$, $m \neq 0$ ist notwendig, um Infrarot-Divergenzen zu vermeiden. Er repräsentiert die Ankopplung an ein äußeres Feld $H = m^2$.

Abstrakt gesprochen handelt es sich um eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Koordinaten $\{\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^{N-1}\}$ und einer Metrik

$$g_{ij}(\pi) = \delta_{ij} + \frac{\partial \sigma}{\partial \pi_i} \frac{\partial \sigma}{\partial \pi_j}$$

¹Für die Renormierbarkeit vgl. Abschnitt 6.3. Für eine weitere Motivation des Modells vgl. die Einleitung.

$$\begin{aligned}
&= \delta_{ij} + \frac{\pi^i \pi^j}{\sigma^2} \\
&= -\sigma \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \pi^i \partial \pi^j} .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Die Hamiltonfunktion erhält in diesen Koordinaten die Form:

$$\mathcal{H}_{Bos} = \int d^d x \frac{1}{2} g_{ij}(\pi) \partial_\mu \pi^i \partial_\mu \pi^j - m^2 \sigma \tag{3.4}$$

Als supersymmetrische Erweiterung postulieren wir:

$$\boxed{\mathcal{H}_{Susy} = - \int d^d x d^2 \theta g_{ij}(\pi) \frac{1}{4} \bar{D}_\alpha \pi^i D_\alpha \pi^j - m \sigma} \tag{3.5}$$

Das Feld π ist ein Superfeld

$$\pi^i(x, \theta) = \varphi^i(x) + \bar{\theta} \psi^i(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta F^i(x) , \tag{3.6}$$

$H = m$ wieder ein äußeres Feld, das aber eine andere kanonische Dimension besitzt als im bosonischen Fall. Aus diesem Grund finden auch sowohl die Bezeichnungen H wie m Verwendung.

Versuchen wir, \mathcal{H}_{Susy} durch seine Komponentenfelder auszudrücken. Für den Massenterm ist zu berechnen ($\sigma = \sigma(\varphi)$):

$$\begin{aligned}
\int d^2 \theta \sigma(\pi) &= \int d^2 \theta \sigma(\varphi) + \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi^i} (\bar{\theta} \psi^i + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta F^i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} (\bar{\theta} \psi^i \bar{\theta} \psi^j) \\
&= -g_{ij}(\varphi) \left(\sigma \varphi^i F^j - \frac{1}{2\sigma} \bar{\psi}^i \psi^j \right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Für den kinetischen Term gilt entsprechend:

$$\begin{aligned}
&\int d^2 \theta g_{ij}(\pi) \frac{1}{2} \bar{D}_\alpha \pi^i D_\alpha \pi^j \\
&= \int d^2 \theta \left(g_{ij}(\varphi) + g_{ij,k}(\bar{\theta} \psi^k + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta F^k) + \frac{1}{2} g_{ij,kl}(\varphi) (-\frac{1}{2} \bar{\theta} \theta \bar{\psi}^k \psi^l) \right) \\
&\quad \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}^i \psi^j + \bar{\theta} ((i\bar{\partial} \varphi^i) \psi^j + F^i \psi^j) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta (-\partial_\mu \varphi^i \partial_\mu \varphi^j + \bar{\psi}^i i\bar{\partial} \psi^j + F^i F^j) \right) \\
&= g_{ij}(\varphi) (-\partial_\mu \varphi^i \partial_\mu \varphi^j + \bar{\psi}^i i\bar{\partial} \psi^j + F^i F^j) \\
&\quad + g_{ij,k}(\varphi) (-\bar{\psi}^k \psi^i F^j + F^k \bar{\psi}^i \psi^j + \bar{\psi}^k (i\bar{\partial} \varphi^i) \psi^j) - \frac{1}{4} g_{ij,kl} \bar{\psi}^i \psi^j \bar{\psi}^k \psi^l
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Hamiltonfunktion \mathcal{H}_{Susy} ist deshalb:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{Susy} &= \int d^d x g_{ij}(\varphi) \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^i \partial_\mu \varphi^j - \bar{\psi}^i i\bar{\partial} \psi^j - F^i F^j) \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{ij,k}(\varphi) (\bar{\psi}^k \psi^i F^j - F^k \bar{\psi}^i \psi^j - \bar{\psi}^k (i\bar{\partial} \varphi^i) \psi^j) + \frac{1}{8} g_{ij,kl}(\varphi) \bar{\psi}^i \psi^j \bar{\psi}^k \psi^l \\
&\quad + m g_{ij}(\varphi) \left(-\sigma \varphi^i F^j + \frac{1}{2\sigma} \bar{\psi}^i \psi^j \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Der letzte Term ($\frac{m}{2\sigma}g_{ij}(\varphi)\bar{\psi}^i\psi^j$) liefert eine Masse für das fermionische Feld ψ . Die Masse für das bosonische Feld φ steckt in $-mg_{ij}(\varphi)\sigma\varphi^iF^j$. Wieso?

In (3.9) tritt F^i nur linear und quadratisch auf, außerdem besitzt es keine Ableitungen. Es ist daher naheliegend, eine quadratische Ergänzung so durchzuführen, daß

$$\mathcal{H}_{Susy} = \int d^d x -\frac{1}{2}g_{ij}(\varphi)G^iG^j + \text{Terme unabhängig von } G^i \quad (3.10)$$

und

$$G^i = F^i + \dots$$

Problematisch ist hierbei der Term

$$\frac{1}{2}g_{ij,k}(\varphi)(\bar{\psi}^k\psi^iF^j - F^k\bar{\psi}^i\psi^j) . \quad (3.11)$$

Er ist antisymmetrisch in j und k , so daß

$$\begin{aligned} g_{ij,k}(\varphi) &= \frac{\partial}{\partial\varphi^k} \left(-\sigma \frac{\partial^2\sigma}{\partial\varphi^i\partial\varphi^j} \right) \\ &= \frac{\varphi^k}{\sigma} \frac{\partial^2\sigma}{\partial\varphi^i\partial\varphi^j} + (\text{Terme symmetrisch in } i, j, k) \\ &= \frac{-\varphi^k}{\sigma^2} g_{ij}(\varphi) + (\text{Terme symmetrisch in } i, j, k) \end{aligned} \quad (3.12)$$

durch

$$-\frac{\varphi^k}{\sigma^2}g_{ij}(\varphi)$$

ersetzt werden darf:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g_{ij,k}(\varphi)(\bar{\psi}^k\psi^iF^j - F^k\bar{\psi}^i\psi^j) &= -\frac{1}{2}\frac{\varphi^k}{\sigma^2}g_{ij}(\varphi)(\bar{\psi}^k\psi^iF^j - F^k\bar{\psi}^i\psi^j) \\ &= \frac{1}{2}g_{ij}(\varphi)(\varphi^i g_{kl}(\varphi)\bar{\psi}^k\psi^l - \sigma^{-2}\varphi^k\bar{\psi}^k\psi^i)F^j \end{aligned} \quad (3.13)$$

Daraus folgt:

$$G^i = F^i + m\sigma\varphi^i + \frac{1}{2}(\sigma^{-2}\varphi^k\bar{\psi}^k\psi^i + g_{kl}(\varphi)\bar{\psi}^k\psi^l) \quad (3.14)$$

Für \mathcal{H}_{Susy} ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{Susy} = \int d^d x \, g_{ij}(\varphi) \frac{1}{2} & \left(\partial_\mu\varphi^i\partial_\mu\varphi^j + m^2\sigma^2\varphi^i\varphi^j - \bar{\psi}^i(i\!\!\not\partial - m)\psi^j - G^iG^j \right) \\ & + mA_{ij}(\varphi)\bar{\psi}^i\psi^j + B_{ijk}(\varphi)\bar{\psi}^i(i\!\!\not\partial\varphi^j)\psi^k + C_{ijkl}(\varphi)\bar{\psi}^i\psi^j\psi^k\psi^l \end{aligned} \quad (3.15)$$

A , B und C sind komplizierte Ausdrücke in φ , die sich aber alle durch $g_{ij}(\varphi)$ und δ_{ij} ausdrücken lassen².

²In Normalkoordinaten sind B und C im wesentlichen Christoffelsymbol und Riemannscher Krümmungstensor.

3.2 Überlegungen zum Massenterm

Eine Frage stellt sich beim Betrachten des freien, d.h. in den Feldern quadratischen Anteils von (3.5):

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \int d^d x d^2 \theta \Phi \left(\frac{1}{2} \bar{D} D - m \right) \Phi \quad (3.16)$$

Warum wurde als Massenterm, respektive als Ankopplung an ein äußeres Feld $H = m$, die Kombination $-\frac{1}{2}m \int \Phi^2$ gewählt³? Eine Antwort lautet: Weil eine Konstante die einzige Größe ist, die sowohl in x - als auch in θ -Richtung translationsinvariant ist, die also die Supersymmetrie nicht bricht.

Es gibt noch eine zweite Antwort. Im bosonischen Modell bewirkt der Term $\int m^2 \varphi^2$ die Infrarot-Regularisierung. Wir fragen deshalb: Wie muß ein supersymmetrisches Analogon aussehen? Um dieser Frage nachzugehen, muß eine Norm für das Superfeld

$$\Phi(x, \theta) = \varphi(x) + \bar{\theta} \psi(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta F(x) \quad (3.17)$$

definiert werden:

$$\begin{aligned} \|\Phi\|^2 &:= \int d^d x \|\Phi(x, \theta)\|^2 \\ &\equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \|\Phi(k, \theta)\|^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

wobei $\|\Phi(x, \theta)\|$ bzw. $\|\Phi(k, \theta)\|$ in (2.59) definiert wurde⁴. Sei außerdem für einen beliebigen Operator Op :

$$\{Op\} := \{\|Op \Phi\|, \|\Phi\| = 1\} \quad (3.19)$$

Dann gilt ($k = \text{fest}$):

Satz 3.1 $\inf\{\frac{1}{2}\bar{D}D\} = 0$ und das Infimum wird angenommen für $k = 0$.

Beweis: $\|\frac{1}{2}\bar{D}D 1\| = 0$. □

$\frac{1}{2}\bar{D}D$ ist also nicht invertierbar, was sich in der Störungsrechnung durch Infrarotdivergenzen bemerkbar macht.

Satz 3.2 $\{\frac{1}{2}\bar{D}D\} \leq (k^2 + 1)$.

Beweis: $\frac{1}{2}\bar{D}D\Phi = -F + \bar{\theta}k\psi + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta k^2\varphi \Rightarrow \{\frac{1}{2}\bar{D}D\} \leq \sqrt{1 + k^2 + k^4} \leq 1 + k^2$. □

Satz 3.3 $\{\frac{1}{2}\bar{D}D - m\} \leq 1 + m + k^2$.

Beweis: $\|(\frac{1}{2}\bar{D}D - m)\Phi\| \leq \|\frac{1}{2}\bar{D}D\Phi\| + \|m\Phi\| \leq (1 + k^2 + m)\|\Phi\|$. □

³Das Vorzeichen von $\frac{1}{2}m \int \Phi^2$ ist – im Gegensatz zum bosonischen Modell – ziemlich unerheblich. Es vertauscht nur die Rolle von fermionischen Teilchen und Antiteilchen, beläßt aber das Pfadintegral über den bosonischen Teil invariant.

⁴Diese Norm enthält implizit neue Massenskalen.

Satz 3.4 $\frac{1}{2}\bar{D}D - m$ ist invertierbar.

Beweis: $(\frac{1}{2}\bar{D}D - m) \left(-\frac{\frac{1}{2}\bar{D}D + m}{k^2 + m^2} \right) = 1$. □

Satz 3.5 $\left\{ \frac{1}{2}\bar{D}D - m \right\} \geq \frac{k^2 + m^2}{1 + m + k^2}$.

Beweis: Da $\frac{1}{2}\bar{D}D - m$ invertierbar ist, kann man die Inverse untersuchen:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2}\bar{D}D - m} \right\} &= \left\{ \frac{\frac{1}{2}\bar{D}D + m}{k^2 + m^2} \right\} \leq \frac{1 + m + k^2}{k^2 + m^2} \\ \Rightarrow \left\{ \frac{1}{2}\bar{D}D - m \right\} &\geq \frac{k^2 + m^2}{1 + m + k^2} \geq \min \left(1, \frac{m^2}{1 + m} \right) \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}\bar{D}D - m$ ist also positiv definit. □

Aus der Sicht des bosonischen Modells würde man zunächst eher eine Kopplung

$$m^2 \int d^2\theta \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\Phi^2 \quad (3.20)$$

vorschlagen, da diese auf

$$m^2\varphi^2 \quad (3.21)$$

führt. Nun ist aber für $\Phi(k, \theta) = \bar{\theta}\psi(k) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F(k)$

$$\inf_{\Phi, \|\Phi\|=1} \|(\frac{1}{2}\bar{D}D + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta m^2)\Phi\| = 0 ,$$

so daß $(\frac{1}{2}\bar{D}D + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta m^2)$ weiterhin nicht positiv definit und damit nicht invertierbar ist. Als letzte Möglichkeit bleibt

$$m^{3/2}\bar{\theta}\xi . \quad (3.22)$$

Nun ist aber

$$m^{3/2} \int d^2\theta \bar{\theta}\xi\Phi^2 = -m^{3/2}\varphi\bar{\zeta}\psi . \quad (3.23)$$

Es ist klar, daß auch mit diesem Ausdruck keine Störungsrechnung möglich ist.

Kapitel 4

Störungsentwicklung

Dieses Kapitel behandelt die Entwicklung der Zustandssumme nach Potenzen der Temperatur t . Um sprachlichen Verwirrungen vorzubeugen, sei bemerkt, daß die Zustandssumme in der statistischen Mechanik und das Pfadintegral in der euklidischen Feldtheorie identische Objekte sind. Der Temperatur t in der statistischen Mechanik entspricht das Plancksche Wirkungsquantum \hbar in der euklidischen Feldtheorie. Ebenso werden die Begriffe Korrelationsfunktion, Greenfunktion und Propagator synonym gebraucht.

4.1 Der Formalismus

In der statistischen Mechanik diskutiert man die Zustandssumme

$$\mathcal{Z}(J) \sim \int [D\Phi] e^{-\frac{1}{t}(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} + \mathcal{H}_J)} \quad (4.1)$$

mit (symbolisch)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} \Phi \Gamma_0 \Phi \\ \mathcal{H}_J &= -t J \Phi . \end{aligned} \quad (4.2)$$

\mathcal{H}_0 ist die Hamiltonfunktion des freien, d.h. nicht wechselwirkenden Modells, \mathcal{H}_{int} enthält alle Potenzen Φ^n , $n > 2$. Wäre $\mathcal{H}_{int} = 0$, so ließe sich die Zustandssumme explizit ausführen:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0(J) &\sim \int [D\Phi] e^{-\frac{1}{t}(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_J)} \\ &= \int [D\Phi] e^{-\frac{1}{t} \frac{1}{2} (\Phi - J \frac{t}{\Gamma_0}) \Gamma_0 (\Phi - \frac{t}{\Gamma_0} J) + \frac{1}{2} J \frac{t}{\Gamma_0} J} \\ &\sim e^{\frac{1}{2} J \frac{t}{\Gamma_0} J} , \end{aligned} \quad (4.3)$$

so daß durch die Normierung $\mathcal{Z}_0(0) = 1$

$$\mathcal{Z}_0(J) = e^{\frac{1}{2} J \frac{t}{\Gamma_0} J} \quad (4.4)$$

eindeutig festgelegt wird. Wegen

$$e^{-\frac{1}{t}\mathcal{H}_{int}(\Phi)}e^{-\frac{1}{t}\mathcal{H}_J(J,\Phi)} = e^{-\frac{1}{t}\mathcal{H}_{int}(\frac{\partial}{\partial J})}e^{-\frac{1}{t}\mathcal{H}_J(J,\Phi)} \quad (4.5)$$

und (4.1) läßt sich $\mathcal{Z}(J)$ umformen zu

$$\mathcal{Z}(J) = e^{-\frac{1}{t}\mathcal{H}_{int}(\frac{\partial}{\partial J})}e^{\frac{1}{2}J\frac{t}{\Gamma_0}J} . \quad (4.6)$$

Hieraus ergibt sich durch Vergleich mit (4.1):

$$\langle \Phi \rangle = \left. \frac{\partial}{\partial J} \right|_{J=0} \mathcal{Z}(J) \quad (4.7)$$

$$\langle \Phi_1 \Phi_2 \rangle = \left. \frac{\partial^2}{\partial J_1 \partial J_2} \right|_{J_i=0} \mathcal{Z}(J) \quad (4.8)$$

Da sich die Korrelationsfunktionen durch Ableitungen von $\mathcal{Z}(J)$ nach den äußeren Strömen darstellen lassen, wird $\mathcal{Z}(J)$ auch erzeugendes Funktional für die Korrelationsfunktionen genannt. Der freie Propagator, d.h. der Propagator der freien, nicht wechselwirkenden Theorie, ist

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 \Phi_2 \rangle_0 &= \left. \frac{\partial^2}{\partial J_1 \partial J_2} \right|_{J_i=0} \mathcal{Z}_0(J) \\ &= \frac{t}{\Gamma_0} . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Wichtig ist außerdem das Funktional

$$\mathcal{W}(J) := \ln \mathcal{Z}(J) , \quad (4.10)$$

welches die zusammenhängenden Korrelationsfunktionen generiert, d.h. in der Störungsentwicklung werden nur zusammenhängende Graphen berücksichtigt [20]. Welche Auswirkungen das auf die sogenannten zusammenhängenden Korrelationsfunktionen hat, zeigt die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 \Phi_2 \rangle_c &:= \left. \frac{\partial^2}{\partial J_1 \partial J_2} \right|_{J_i=0} \mathcal{W}(J) \\ &= \langle (\Phi_1 - \langle \Phi_1 \rangle) (\Phi_2 - \langle \Phi_2 \rangle) \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

Zum Schluß definieren wir noch die Legendre-Transformierte¹

$$\Gamma(\Phi) = \max_J \int d^d x \Phi J - \mathcal{W}(J) , \quad (4.12)$$

das sogenannte Vertexfunktional. Störungstheoretisch bleiben aus $\mathcal{W}(J)$ noch die Einteilchen-irreduziblen Graphen, multipliziert mit (-1) , übrig [1]. Die zusammenhängenden

¹Die Vorzeichenwahl ist in der Literatur nicht eindeutig.

Korrelationsfunktionen hängen von Γ durch einfache algebraische Relationen ab. Deren wichtigste ist²:

$$(<\Phi_1\Phi_2>_c)^{-1} = \frac{\partial^2}{\partial\Phi_1\partial\Phi_2}\Gamma(\Phi)\Big|_{\Phi=0} \quad (4.13)$$

Für eine nicht wechselwirkende Theorie ist die rechte Seite von (4.13) gerade Γ_0 , was die Bezeichnungsweise rechtfertigt. Eine weitergehende Analyse findet sich in [1].

Dieser Formalismus läßt sich sowohl auf die Komponentenfelder als auch auf das Superfeld anwenden. Fangen wir mit den Komponentefeldern an.

4.2 Der Propagator für das φ -Feld

Die freie Hamiltonfunktion für das φ -Feld lautet:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \int d^d x (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \quad (4.14)$$

Transformation in den Fourierraum ergibt:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \varphi^*(k)(k^2 + m^2)\varphi(k) \quad (4.15)$$

Durch Ankopplung an einen äußeren (reellen) Strom $j(x)$

$$\mathcal{H}_j = -t \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} j^*(k)\varphi(k) \quad (4.16)$$

erhält man für die Zustandssumme:

$$\mathcal{Z}_0(j) \sim \int [\mathcal{D}\varphi] e^{-\frac{1}{t}(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_j)} \quad (4.17)$$

Quadratisches Ergänzen und Ausführen des Gaußintegrals liefert mit der Normierung $\mathcal{Z}_0(0) = 1$:

$$\mathcal{Z}_0(j) = e^{\frac{t}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} j^*(k) \frac{1}{k^2 + m^2} j(k)} \quad (4.18)$$

Es gilt also ein Wick'sches Theorem

$$<\varphi^{*i}(k')\varphi^j(k)>_0 = t \frac{\delta^{ij}}{k^2 + m^2} (2\pi)^d \delta^d(k - k') .$$

(4.19)

²Das Inverse ist das Operatorinverse!

4.3 Der Propagator für die fermionischen Felder

Für die fermionischen Felder lautet die freie Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2} \int d^d x \bar{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x) \quad (4.20)$$

Transformation in den Fourierraum liefert³:

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \bar{\psi}(k)(\not{k} - m)\psi(k) \quad (4.21)$$

Durch Ankopplung an einen äußeren (reellen) Strom $\alpha(x)$ ⁴

$$\mathcal{H}_\alpha = -t \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \bar{\alpha}(k) \psi(k) \quad (4.22)$$

erhält man analog zum bosonischen Fall für die Zustandssumme:

$$\mathcal{Z}_0(\alpha) \sim \int [\mathcal{D}\psi] e^{-\frac{1}{t}(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_\alpha)} \quad (4.23)$$

Quadratisches Ergänzen und Ausführen des Gaußintegrals⁵ liefert mit der üblichen Normierung $\mathcal{Z}_0(0) = 1$:

$$\mathcal{Z}_0(\alpha) = e^{\frac{t}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \bar{\alpha}(k) \frac{-1}{\not{k} - m} \alpha(k)} \quad (4.24)$$

Es gilt wiederum ein Wick'sches Theorem mit

$$\langle \psi_\alpha^i(k') \bar{\psi}_\beta^j(k) \rangle_0 = -t \left(\frac{\delta^{ij}}{\not{k} - m} \right)_{\alpha\beta} (2\pi)^d \delta^d(k - k') . \quad (4.25)$$

4.4 Der Propagator für das F-Feld

Die freie Hamiltonfunktion für das F -Feld nimmt die Form

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2} \int d^d x G_0^2(x) \quad (4.26)$$

an, wobei⁶

$$G_0 := F + m\varphi . \quad (4.27)$$

³Vgl. Fußnote 12 auf Seite 23.

⁴Achtung: $\alpha(x)$ und $\bar{\alpha}(x)$ sind nicht unabhängig voneinander, wie es bei Dirac-Spinoren der Fall wäre. Die Verwendung des Dirac-Quellterms $\int \bar{\alpha}(k)\psi(k) + \bar{\psi}(k)\alpha(k)$ würde deshalb einen Faktor 2 zuviel ergeben.

⁵Achtung: Das Gaußintegral wurde dieses Mal über Graßmann-Variablen ausgeführt!

⁶Wir führen die Störungstheorie so durch, daß nur *quadratische* Terme in den Feldern in \mathcal{H}_0 berücksichtigt werden. Die Folge ist, daß noch Wechselwirkungsterme in G_0 auftreten. Die Korrelationsfunktion ist dieselbe, die man in der Superpropagator-Theorie erhält, da auch dort nur Terme, die quadratisch in den (Super-)Feldern sind, berücksichtigt werden. (Vgl. den folgenden Abschnitt.)

Sie unterscheidet sich von den anderen Feldern, die alle eine k -Abhängigkeit besitzen. Man ist deshalb versucht, diesen Freiheitsgrad im Pfadintegralformalismus vor Entwicklung einer Störungsrechnung zu eliminieren. Das läßt sich sogar für die *vollständige* Hamiltonfunktion durchführen und wird auch von einigen Autoren vorgenommen [3]. Allerdings benutzen sie hierfür die klassische Euler-Lagrange-Gleichung, vernachlässigen also den Faktor $g_{ij}(\varphi)$ vor $F^i F^j$. Dies führt zu inkonsistenten Ergebnissen der Störungsrechnung, wie in Abschnitt 5.2 ersichtlich wird. Wir werden deshalb die Störungsrechnung auch für diesen Freiheitsgrad durchführen. Wie man anders vorgehen kann, zeigt ebenfalls Abschnitt 5.2.

Da die freie Hamiltonfunktion keine Ableitungen enthält, kann die Zustandssumme auch im Ortsraum ausgeführt werden. Mit der Stromkopplung ($J(x)$ =reell)

$$\mathcal{H}_J = -t \int d^d x J(x) G_0(x) \quad (4.28)$$

lautet das Pfadintegral:

$$\mathcal{Z}_0(J) \sim \int [\mathcal{D}F] e^{-\frac{1}{t}(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_J)} \quad (4.29)$$

Nach quadratischer Ergänzung

$$\mathcal{Z}_0(J) \sim \int [\mathcal{D}F] e^{\frac{1}{2t} \int d^d x (G_0(x) + tJ(x))^2 - \frac{t}{2} \int d^d x J^2(x)} \quad (4.30)$$

sieht man, daß das Pfadintegral für das rein *reelle* Feld G_0 nicht definiert ist⁷. Man kann die Integration aber über die imaginäre Achse durchführen und erhält ($\mathcal{Z}_0(0) \stackrel{!}{=} 1$):

$$\mathcal{Z}_0(J) = e^{\frac{t}{2} \int d^d x J_i(x) (-\delta^{ij}) J_j(x)} \quad (4.31)$$

Das Wick'sche Theorem gilt mit folgender Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion:

$$\boxed{\langle G_0^{*i}(k') G_0^j(k) \rangle_0 = -t \delta^{ij} (2\pi)^d \delta^d(k - k')} \quad (4.32)$$

Für die ursprüngliche Variable F gelten etwas ungewöhnliche Korrelationen:

$$\begin{aligned} \langle F^*(k) F(k') \rangle_0 &= \langle (G_0^*(k) - m\varphi(k)) (G_0(k') - m\varphi(k')) \rangle_0 \\ &= t \frac{-k^2}{k^2 + m^2} (2\pi)^2 \delta^2(k - k') \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \langle F^*(k) \varphi(k') \rangle_0 &= \langle (G_0^*(k) - m\varphi^*(k)) \varphi(k') \rangle_0 \\ &= t \frac{-m}{k^2 + m^2} (2\pi)^2 \delta^2(k - k') \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die anderen Korrelationen verschwinden.

⁷Dieses ist ein Artefakt der Regeln zur Bildung der Adjungierten von $\bar{\theta}\theta$: Würde man $(\bar{\theta}_\alpha \theta_\alpha)^* = \bar{\theta}_\alpha^* \theta_\alpha^*$ definieren anstatt $(\bar{\theta}_\alpha \theta_\alpha)^* = \theta_\alpha^* \bar{\theta}_\alpha^*$, so wäre F^i rein imaginär, das Pfadintegral konvergent.

4.5 Der Propagator für das Superfeld

Das Superfeld

$$\Phi(x, \theta) = \varphi(x) + \bar{\theta}\psi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F(x) \quad (4.35)$$

enthält zwei bosonische Freiheitsgrade (φ , F) und zwei fermionische Freiheitsgrade in Form eines Majorana-Bispinors $(\psi_\alpha)_{\alpha=1,2}$, die auf kanonische Weise im Superfeld „verpackt“ sind. Es stellt sich daher die Frage, ob es nicht möglich ist, die Störungsrechnung für das Superfeld als Ganzes durchzuführen, und so den Rechenaufwand zu minimieren. Dieses ist in der Tat mit demselben Formalismus möglich, der für die Komponentfelder verwendet wurde.

Die freie Hamiltonfunktion für das Superfeld lautet:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta \pi^*(k, \theta) \left(\frac{1}{2} \bar{D}D - m \right) \pi(k, \theta) \quad (4.36)$$

Als Stromkopplung verwendet man:

$$\mathcal{H}_J = -t \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta J^*(k, \theta) \pi(k, \theta) \quad (4.37)$$

Die Variation von $\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta f^*(k, \theta) g(k, \theta)$ nach $f^*(k', \theta')$ muß dann als⁸

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta f^*(k', \theta')} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta f^*(k, \theta) g(k, \theta) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta (f^*(k, \theta) + \varepsilon \delta^2(\theta - \theta') (2\pi)^d \delta^d(k - k')) g(k, \theta) - f^*(k, \theta) g(k, \theta) \right) \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta \delta^2(\theta - \theta') (2\pi)^d \delta^d(k - k') g(k, \theta) \\ &= g(k', \theta') \end{aligned} \quad (4.38)$$

definiert werden. Die Zustandssumme für das nicht wechselwirkende Modell ist wieder:

$$\mathcal{Z}_0(J) \sim \int [D\Phi] e^{-\frac{1}{t}(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_J)} \quad (4.39)$$

Dabei ist das Pfadintegral über $[D\Phi]$ identisch mit dem oben eingeführten Pfadintegral über $[D\varphi][D\psi][DF]$. Nach den üblichen Rechenschritten erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0(J) &= \exp \left(\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta J^*(k, \theta) \frac{t}{(\frac{1}{2} \bar{D}D - m)} J(k, \theta) \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta J^*(k, \theta) \frac{-t(\frac{1}{2} \bar{D}D + m)}{k^2 + m^2} J(k, \theta) \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

⁸Man beachte den Faktor $(2\pi)^d$ bei der δ -Distribution für den k-Raum, der Rücksicht auf das kanonische Maß $\frac{d^d k}{(2\pi)^d}$ nimmt.

Aus dieser Darstellung der freien Hamiltonfunktion läßt sich sofort das zugehörige Wick'sche Theorem ablesen⁹:

$$\boxed{\langle \pi^i(k, \theta) \pi^{*j}(k', \theta') \rangle_0 = -t \delta^{ij} \left(\frac{\frac{1}{2} \bar{D} D + m}{k^2 + m^2} \right) \Big|_{(k, \theta)} \delta^2(\theta - \theta') (2\pi)^d \delta^d(k - k')} \quad (4.41)$$

Man kann nun die explizite Form der Korrelationsfunktion aus der Superpropagator- und aus der Komponenten-Rechnung herleiten. In beiden Fällen erhält man:

$$\boxed{\langle \pi(k, \theta) \pi^*(k', \theta') \rangle_0 = \frac{1}{k^2 + m^2} \left(1 + \bar{\theta}(\not{k} + m)\theta' - \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta \frac{1}{2} \bar{\theta}' \theta' k^2 - m \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta - m \frac{1}{2} \bar{\theta}' \theta' \right)} \quad (4.42)$$

$$(2\pi)^d \delta^d(k - k')$$

⁹Man beachte, daß sich das Argument von $\frac{1}{2} \bar{D} D$ immer auf das nicht komplex konjugierte Feld bezieht. Dies ist wegen des Terms $\bar{\theta} \frac{\not{k}}{k^2} \theta'$, vgl. (4.42), wichtig.

Kapitel 5

Besonderheiten supersymmetrischer Theorien

In diesem Kapitel werden einige Besonderheiten supersymmetrischer Theorien diskutiert.

5.1 Wundersames Wegheben von Divergenzen

Entwickelt man die Metrik bis zur zweiten Ordnung in φ , so ergibt sich:

$$g_{ij}(\varphi) = \delta_{ij} + C_{ijkl}\varphi^k\varphi^l + O(\varphi^4) \quad (5.1)$$

Dies liefert drei Korrekturen zu \mathcal{H}_0 , die alle vierter Ordnung in den Feldern sind:

$$V_1 = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \cdots \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d(k_1 + \dots + k_4) C_{ijkl} \varphi^k(k_1) \varphi^l(k_2) \bar{\psi}^i(-k_3) (-\not{k}_4 + m) \psi^j(k_4) \quad (5.2)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \cdots \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d(k_1 + \dots + k_4) C_{ijkl} \varphi^k(k_1) \varphi^l(k_2) \varphi^{\star i}(-k_3) (k_3 k_4 + m^2) \varphi^j(k_4) \quad (5.3)$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \cdots \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d(k_1 + \dots + k_4) C_{ijkl} \varphi^k(k_1) \varphi^l(k_2) G^{\star i}(-k_3) G^j(k_4) \quad (5.4)$$

Kontrahiert man die freien Felder nach den oben genannten Regeln, so ergeben sich in 2-Loop-Ordnung mit den Abkürzungen

$$I_1 = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m^2} \quad (5.5)$$

$$I_2 = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \quad (5.6)$$

folgende Beiträge zu

$$\mathcal{F} := \frac{\ln \mathcal{Z}}{V} \quad (5.7)$$

mit V =Volumen:

$$\langle \frac{-V_1}{t} \rangle = 2 \times \frac{1}{2} \times C_{iijj} \times I_1 \times I_2 \times t \quad (5.8)$$

$$\langle \frac{-V_2}{t} \rangle = -1 \times \frac{1}{2} \times C_{iijj} \times I_1 \times I_2 \times t \quad (5.9)$$

$$\langle \frac{-V_3}{t} \rangle = -1 \times \frac{1}{2} \times C_{iijj} \times I_1 \times I_2 \times t \quad (5.10)$$

Die Beiträge von V_1 bis V_3 in 2-Loop-Ordnung heben sich gegenseitig weg, egal welches Regularisierungsschema verwendet wird.

5.2 Ausintegration des Freiheitsgrades G^i

Möchte man den Freiheitsgrad G^i vor Entwicklung einer Störungsrechnung eliminieren, so geht man folgendermaßen vor:

$$\mathcal{Z}(j, \alpha) \sim \int [D\varphi] [D\psi] [DG] e^{-\frac{1}{t}(\mathcal{H} - \mathcal{H}_G + \mathcal{H}_j + \mathcal{H}_\alpha) - \frac{1}{t}\mathcal{H}_G} \quad (5.11)$$

mit

$$\mathcal{H}_G = -\frac{1}{2} \int d^d x g_{ij}(\varphi) G^i G^j . \quad (5.12)$$

$\mathcal{H} - \mathcal{H}_G + \mathcal{H}_j + \mathcal{H}_\alpha$ hängt nicht mehr von G ab. Die Integration über G , die wieder über die imaginäre Achse zu erstrecken ist, liefert:

$$\mathcal{Z}(j, \alpha) \sim \int [D\varphi] [D\psi] \frac{1}{\sqrt{g(\varphi)}} e^{-\frac{1}{t}(\mathcal{H} - \mathcal{H}_G + \mathcal{H}_j + \mathcal{H}_\alpha)} , \quad (5.13)$$

wobei

$$g(\varphi) = \det(g_{ij}(\varphi)) . \quad (5.14)$$

Mit Hilfe der Formel

$$\det(g_{ij}(\varphi)) = e^{\text{tr}(\ln(g_{ij}(\varphi)))} \quad (5.15)$$

erhält man im Ortsraum mit a = Gitterkonstante für

$$\begin{aligned} \prod_{\text{alle Gitterpunkte}} \det(g_{ij}(\varphi)) &= \exp \left(\sum_{\text{alle Gitterpunkte}} \text{tr}(\ln g_{ij}(\varphi)) \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{a^d} \int d^d x \text{tr}(\ln g_{ij}(\varphi)) \right) \\ &= \exp \left(I_2 \int d^d x \text{tr}(\ln g_{ij}(\varphi)) \right) . \end{aligned} \quad (5.16)$$

Somit ist $\mathcal{Z}(j, \alpha)$:

$$\mathcal{Z}(j, \alpha) \sim \int [D\varphi] [D\psi] e^{-\frac{1}{t}(\mathcal{H} - \mathcal{H}_G + \mathcal{H}_j + \mathcal{H}_\alpha + \mathcal{H}_G')} \quad (5.17)$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_G' &= \frac{t}{2} I_2 \int d^d x \operatorname{tr}(\ln g_{ij}(\varphi)) \\
&= \frac{t}{2} I_2 \int d^d x \operatorname{tr}(\ln((g_{ij}(\varphi) - \delta_{ij}) + \delta_{ij})) \\
&= t I_2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{2} C_{kkij} \varphi^{*i}(k) \varphi^j(k) + O(\varphi^4) \right)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Schließt man den in den Feldern quadratischen Term mit dem zugehörigen Propagator, so ergibt sich nach Division durch V als Beitrag zu \mathcal{F} :

$$-1 \times \frac{1}{2} \times C_{iijj} \times I_1 \times I_2 \times t \tag{5.19}$$

Dieser Term ist identisch mit dem Zwei-Loop-Beitrag (5.10) von V_3 in Abschnitt 5.1. Für die Entwicklung in Loops ist der Faktor t in (5.18) als ein Loop zu zählen.

5.3 Vergleich der supersymmetrischen Theorie mit dem bosonischen Fall

Das Pfadintegral für ein bosonisches Feld ist¹

$$\mathcal{Z}(j) \sim \int [D\varphi] \sqrt{g(\varphi)} e^{-\frac{1}{t}(\mathcal{H} + \mathcal{H}_j)} . \tag{5.20}$$

Mit Hilfe der im letzten Abschnitt hergeleiteten Beziehungen erhält man hieraus

$$\mathcal{Z}(j) \sim \int [D\varphi] e^{-\frac{1}{t}(\mathcal{H} + \mathcal{H}_j - \frac{t}{2} I_2 \int d^d x \operatorname{tr}(\ln(g_{ij}(\varphi))))} . \tag{5.21}$$

Die in 2-Loop-Ordnung relevanten Terme

$$\begin{aligned}
V &= -t I_2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} C_{kkij} \varphi^{*i}(k) \varphi^j(k) \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \cdots \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d(k_1 + \dots + k_4) C_{ijkl} \varphi^k(k_1) \varphi^l(k_2) \varphi^{*i}(-k_3) (k_3 k_4 + m^2) \varphi^j(k_4)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

liefern in 2-Loop-Ordnung zusammen ebenfalls keinen Vakuum-Beitrag.

¹Der Faktor $\sqrt{g(\varphi)}$ ist notwendig, damit das Pfadintegral invariant unter Koordinatentransformationen ist.

5.4 Auswirkungen auf Vakuum-Blasen

Satz 5.1 *Alle Einteilchen-irreduziblen Vakuumblasen verschwinden identisch.*

Beweis: Die Kontraktion von $D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n} \Phi$ mit $D_{\beta_1} \dots D_{\beta_m} \Phi$ liefert immer einen Ausdruck der Form $D_{\gamma_1} \dots D_{\gamma_{n+m}} \delta^2(\theta - \theta')$, wobei θ und θ' von verschiedenen Termen in der Entwicklung kommen können und deshalb nicht sofort gleichgesetzt werden dürfen. Man muß deshalb solange partiell integrieren, bis auf eine δ -Distribution keine Ableitungen mehr wirken. Diese wird dann ausintegriert. Es ist klar, daß das genau dann möglich ist, wenn zu jeder Variablen θ mindestens zwei δ -Distributionen gehören, der Graph also Einteilchen-irreduzibel ist. Übrig bleibt schließlich eine einzige Variable θ und Ableitungen der diesbezüglichen δ -Distribution an der Stelle Null, also Zahlen. Die letzte Integration über θ ergibt dann Null. \square

Satz 5.2 *Einteilchen-reduzible Graphen verschwinden für den freien Propagator (4.41).*

Beweis²: Jeder Vakuum-Graph läßt sich zunächst auf einen Baum-Graphen reduzieren. Angenommen, er hat $n + 1$ Vertizes (θ -Integrationen) und n Linien (freie Propagatoren). Damit die θ -Integrale nicht verwirren, muß für jedes Integral $\int d^2\theta_i$ ein Faktor $\frac{1}{2}\bar{\theta}_i\theta_i$ vorhanden sein. Aus (4.42) sieht man, daß dafür mindestens ein Faktor $\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\frac{1}{2}\bar{\theta}'\theta'$ notwendig ist. Der durch einen Vakuum-Baum-Graphen durchlaufende Impuls ist aber $k = 0$. Der Graph verschwindet identisch. \square

Satz 5.3 *Die freie Energie verschwindet.*

Beweis: $F := \ln \int [D\pi] e^{-\mathcal{H}/t}$. Die freie Energie der freien Theorie verschwindet. (Vgl. Abschnitt 7.2.) Vakuum-Graphen verschwinden wegen Satz 5.1 und Satz 5.2. (Da die Hamiltonfunktion die Symmetrie $\pi \rightarrow -\pi$ besitzt, reicht sogar Satz 5.1 aus.) \square

Aus diesem Grund ist die Thermodynamik supersymmetrischer Theorien trivial.

Satz 5.4 *Der Erwartungswert der potentiellen Energie*

$$\langle V \rangle = m \langle \sigma \rangle$$

verschwindet identisch.

Beweis: wie im vorigen Satz. \square

Diese Sätze sind auch anschaulich klar: Der Erwartungswert der kinetischen Energiedichte an einem festen Punkt im Orts- und θ -Raum hängt nicht vom Ort ab, da die kinetische Energie so konstruiert wurde, daß sie translationsinvariant ist. Die θ -Integration einer konstanten Größe verschwindet aber identisch. Das angelegte Magnetfeld zeichnet zwar einen Punkt auf der Mannigfaltigkeit (den Nordpol der Kugel) aus, reicht aber nicht aus, um die Translationsinvarianz zu brechen; und letztere ist entscheidend für das Verschwinden der θ -Integration.

Man kann jedoch die Magnetisierung an einem festen Punkt im Orts- und θ -Raum berechnen. Aufgrund der Translationsinvarianz hängt diese nicht von x und θ ab. Wie gezeigt wird, verschwindet sie auch nicht.

²Dieser Beweis nimmt im Gegensatz zu Satz 5.1 explizit Bezug auf den freien Propagator (4.41).

Kapitel 6

Renormierung

Dieses Kapitel behandelt Ideen und Techniken der Renormierung. Zunächst wird gezeigt, wieso die Störungsrechnung naiv nicht durchführbar ist. Sofern man während der Rechnung einen Teil der Freiheitsgrade in der Hamiltonfunktion unterdrückt („Regularisierung“), läßt sich diese trotzdem durchführen. Die Ergebnisse hängen von der Regularisierungsvorschrift ab. Am interessantesten sind die Größen, die bei allmählichem Abschalten der Regularisierung einem Grenzwert zustreben. Soll die Theorie nämlich experimentell überprüfbare Aussagen machen, so müssen alle physikalisch relevanten Größen unabhängig von der Regularisierung, die ja willkürlich eingeführt wurde, werden. Diese Überlegungen sind eng verwandt mit der Idee der Skalentransformation. Da im allgemeinen die kurzreichweitigen Freiheitsgrade eines Systems die Störungsrechnung unmöglich machen, müssen auch nur diese unterdrückt werden. Durch eine Skalentransformation verschiebt sich die Grenze dieser Unterdrückung. Ihr Studium zeigt daher das Verhalten der physikalisch relevanten Größen.

6.1 Regularisierung und feldtheoretische Renormierung

Versuchen wir, die in Kapitel 4 entwickelte Methode explizit anzuwenden. Der Einfachheit halber betrachten wir ein skalares Feld ϕ mit Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = \int d^d x \frac{1}{2} \phi(x) (-\Delta + m^2) \phi(x) + g \phi(x)^4 . \quad (6.1)$$

Der freie Propagator wurde in Abschnitt 4.2 berechnet. Er lautet:

$$\langle \phi^*(k) \phi(k') \rangle_0 = \frac{t}{k^2 + m^2} (2\pi)^d \delta^d(k - k') \quad (6.2)$$

Dieser Term gibt die erste Ordnung in t wieder. In der nächsten Ordnung kommt hinzu:

$$\langle \phi^*(k) \phi(k') \rangle_1 = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{t}{k^2 + m^2} \frac{t}{k'^2 + m^2} \frac{-12g}{t} \frac{t}{l^2 + m^2} (2\pi)^d \delta^d(k - k') \quad (6.3)$$

Der entscheidende Term ist

$$\text{Diagram: a circle with a vertical line passing through its center, with a dot at the intersection} := \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2} \quad (6.4)$$

Das Integral in $d = 2$ Dimensionen ist unendlich! Es spiegelt damit das grundsätzliche Dilemma einer jeden Feldtheorie wieder. Trotzdem gibt es mehrere Möglichkeiten weiterzurechnen.

Man erinnert sich daran, daß das feldtheoretische Modell aus einem Gittermodell mit Gitterkonstante a gewonnen wurde. Dann ist im Impulsraum ein Cutoff $\Lambda = \frac{2\pi}{a}$ einzuführen:

$$\text{Diagram: a circle with a vertical line passing through its center, with a dot at the intersection} \rightarrow \int_0^\Lambda \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2} \sim \ln \Lambda \quad (6.5)$$

Diese Methode – Cutoff-Regularisierung genannt – ist logisch einfach, aber umständlich in der Anwendung. Wir verwenden deshalb eine andere Regularisierungsvorschrift, die dimensionelle Regularisierung: Erniedrigt man in (6.4) die Dimension des Raumes auf $d = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon < 0$, so wird das Integral ebenfalls endlich¹,

$$\text{Diagram: a circle with a vertical line passing through its center, with a dot at the intersection} \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon} (2\sqrt{\pi})^{-\varepsilon} \Gamma(1 - \frac{\varepsilon}{2}) m^\varepsilon, \quad (6.6)$$

hängt aber noch von $\varepsilon = d - 2$ ab. Die Idee der Renormierung ist nun die folgende: Sämtliche Parameter der Theorie wie Masse m , Temperatur t und Normierung der Wellenfunktion sind prinzipiell *nicht* beobachtbare Größen. Entwickelt man nämlich das 2-Punkt-Vertexfunktional $\Gamma^{(2)}$ (4.12) nach Potenzen von k^2 ,

$$\Gamma^{(2)}(k) = a + bk^2 + \dots, \quad (6.7)$$

so sind a und b nur in erster Ordnung der Störungstheorie m^2 und 1 aus (6.1). Die Normierung der Wellenfunktion kann dadurch neu festgelegt werden, daß b wieder gleich 1 sein soll:

$$\tilde{\Gamma}^{(2)} = \tilde{a} + k^2 + \dots \quad (6.8)$$

$\sqrt{\tilde{a}}$ ist die Masse des ϕ -Feldes. Da sie in Experimenten gemessen werden kann, muß sie für alle ε einen endlichen Wert haben. Umgekehrt muß die Masse m aus (6.1) für $\varepsilon \rightarrow 0$ unendlich werden, ansonstern wäre \tilde{a} nicht endlich.

Die allgemeine Strategie der Renormierung kann nun so beschrieben werden: Die Größen der ursprünglichen Theorie, im folgenden nackte (engl. bare) bzw. unrenormierte Größen genannt und der Deutlichkeit halber mit einem Index $_B$ versehen,

$$\mathcal{H}_B = \int d^d x \phi_B(x) (-\Delta + m_B^2) \phi_B(x) + g_B \phi_B(x)^4, \quad (6.9)$$

¹S. Anhang A.

werden durch renormierte, endliche Größen ausgedrückt:

$$\phi_B = \sqrt{Z(t_R, \varepsilon)} \phi_R \quad (6.10)$$

$$m_B = Z_B(t_R, \varepsilon) m_R \quad (6.11)$$

$$t_B = Z_1(t_R, \varepsilon) t_R \mu^{-\varepsilon} \quad (6.12)$$

$$g_B = Z_g(t_R, \varepsilon) g_R \quad (6.13)$$

Die Größe μ ist eine beliebige frei wählbare Massenskala. Der Faktor $\mu^{-\varepsilon}$ in (6.12) muß eingeführt werden, damit die renormierte Temperatur t_R dimensionslos ist. Das wiederum ist notwendig, damit die Z -Faktoren als Taylorreihe in nur zwei Größen, der renormierten Temperatur t_R und dem Regularisierungsparameter ε geschrieben werden können. Diese Vorschrift legt die Z -Faktoren eindeutig fest.

Zwei Fälle können eintreten:

1. Sämtliche renormierten und beobachtbaren Größen werden endlich.
2. Es ist nicht möglich, mit endlich vielen Z -Faktoren allen beobachtbaren Größen einen endlichen und damit physikalisch sinnvollen Wert zu geben.

Im ersten Fall sagt man, die Theorie sei renormierbar, im zweiten Fall, die Theorie sei nicht renormierbar.

Der entscheidende Punkt ist: Auch wenn die nackte Theorie als solche nur bei gleichzeitiger Angabe einer Cutoff-Prozedur, der Vorgabe einiger Fixpunkte der renormierten Theorie und der Entwicklungsordnung sinnvoll ist, so reichen doch endlich viele Fixpunkte aus: Alle anderen physikalisch meßbaren Größen lassen sich daraus berechnen. Das ist für nicht renormierbare Theorien *nicht* möglich. Vielmehr wären in jeder Ordnung der Störungstheorie neue Fixpunkte notwendig. Es ist klar, daß eine solche Theorie nicht geeignet ist, Vorhersagen zu machen.

Das nichtlineare Sigma-Modell *ist* renormierbar. Hierfür reichen zwei Renormierungskonstanten aus, vgl. Abschnitt 6.3.

6.2 Kanonische Dimension der Felder und naives Skalenverhalten

Bevor wir mit unserer Untersuchung fortfahren, müssen wir einige einfache, aber wichtige Punkte klären. Es handelt sich hierbei um die kanonischen Dimensionen der relevanten Größen der Theorie. Da wir das σ -Feld durch das π -Feld in der Form

$$\sigma(x) = \sqrt{1 - \pi^2(x)} \quad (6.14)$$

ausdrücken, ist klar, daß die kanonische (Energie-) Dimension beider Felder Null ist:

$$[\pi(x)] = [\sigma(x)] = 0 \quad (6.15)$$

Das gilt sowohl für den bosonischen als auch für den supersymmetrischen Fall. Die durch die Temperatur dividierte bosonische Hamilton-Funktion

$$\frac{1}{t_B} \mathcal{H}_B = \frac{1}{t_B} \int d^d x \frac{1}{2} [(\nabla \pi(x))^2 + (\nabla \sigma(x))^2] + H_B(x) \sigma(x) \quad (6.16)$$

muß dimensionslos sein. Wir erhalten deshalb:

$$[t_B] = 2 - d = -\varepsilon \quad (6.17)$$

Die gleiche Argumentation liefert für die supersymmetrische Hamilton-Funktion

$$\frac{1}{t_B} \mathcal{H}_S = \frac{1}{t_B} \int d^d x d^2 \theta \frac{1}{4} [\bar{D}\pi(x, \theta) D\pi(x, \theta) + \bar{D}\sigma(x, \theta) D\sigma(x, \theta)] + H_B(x, \theta) \sigma(x, \theta) \quad (6.18)$$

$$[t_B] = -d + 1 + 1 = -\varepsilon . \quad (6.19)$$

Unterschiede gibt es in der Dimension der äußeren Felder. Während im bosonischen Fall

$$[H_B] = 2 \quad (6.20)$$

gilt, ist im supersymmetrischen Fall

$$[H_B] = 1 . \quad (6.21)$$

Aus der Taylorentwicklung eines dimensionslosen Superfeldes

$$\Phi(x, \theta) = \varphi(x) + \bar{\theta}\psi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F(x) \quad (6.22)$$

können wir wegen $[\theta] = -\frac{1}{2}$ die kanonische Dimension des fermionischen Feldes und des bosonischen Hilfsfeldes ablesen:

$$[\psi(x)] = \frac{1}{2} \quad (6.23)$$

$$[F(x)] = 1 \quad (6.24)$$

Bezeichnen wir diese kanonischen, naiven Dimensionen mit y_N , so lassen sich für die Korrelationsfunktionen

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) := \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle \quad (6.25)$$

die kanonischen Dimensionen als

$$[G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)] = n y_N \quad (6.26)$$

schreiben. Wichtig sind noch die Korrelationsfunktionen im Impulsraum. Wegen

$$\phi(k) := \int d^d x e^{-ikx} \phi(x) \quad (6.27)$$

gilt für beliebige Felder ϕ :

$$[\phi(k)] = [\phi(x)] - d \quad (6.28)$$

und analog

$$[G^{(n)}(k_1, \dots, k_n)] = n(y_N - d) . \quad (6.29)$$

6.3 Beweis der Renormierbarkeit

Der Beweis für das bosonische Modell findet sich bei Brézin et al. [8]. Wir erweitern den Beweis für das oben eingeführte supersymmetrische nichtlineare Sigma-Modell mit²

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{Susy} + \mathcal{H}_J \quad (6.30)$$

$$\mathcal{H}_{Susy} = - \int d^2x d^2\theta \left(\frac{1}{4}(\bar{D}\pi(x, \theta)D\pi(x, \theta)) + \frac{1}{4}(\bar{D}\sigma(x, \theta)D\sigma(x, \theta)) - H(x, \theta)\sigma(x, \theta) \right) \quad (6.31)$$

$$\mathcal{H}_J = - \int d^2x d^2\theta J(x, \theta)\pi(x, \theta) \quad (6.32)$$

durch. Wir unterdrücken dabei in diesem Abschnitt an nackten Größen den Index B . Das Modell ist $O(n+1)$ invariant, wobei die Invarianz in den ersten n Komponenten (den π -Komponenten) trivial ist. Wir wollen daher die Auswirkungen einer Drehung aus der Untergruppe $O(n+1)/O(n)$ betrachten:

$$\delta\pi(x, \theta) = \omega\sigma(x, \theta) \quad (6.33)$$

$$\delta\sigma(x, \theta) = -\omega\pi(x, \theta) \quad (6.34)$$

Die Invarianz der Zustandssumme

$$\mathcal{Z}(J, H) = \int [\mathcal{D}\pi] e^{-\frac{1}{t}\mathcal{H}_{Susy} - \frac{1}{t}\mathcal{H}_J} \quad (6.35)$$

unter den Transformationen (6.33) und (6.34) liefert:

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{Z} &= \frac{1}{t} \int d^2x d^2\theta \int [\mathcal{D}\pi] (H(x, \theta)\omega\pi(x, \theta) + J(x, \theta)\omega\sigma(x, \theta)) e^{-\frac{1}{t}\mathcal{H}_{Susy} - \frac{1}{t}\mathcal{H}_J} \\ &= \int d^2x d^2\theta \omega \left(H(x, \theta) \frac{\delta}{\delta J(x, \theta)} - J(x, \theta) \frac{\delta}{\delta H(x, \theta)} \right) \mathcal{Z}(J, H) \end{aligned} \quad (6.36)$$

Dieselbe Gleichung erfüllt das Funktional

$$\mathcal{W}(J, H) := \ln \mathcal{Z}(J, H) . \quad (6.37)$$

Die Legendre-Transformation

$$\Gamma(\pi, H) = \int d^2x d^2\theta \pi(x, \theta)J(x, \theta) - \mathcal{W}(J, H) \quad (6.38)$$

$$\pi^i(x, \theta) = \frac{\delta\mathcal{W}}{\delta J^i(x, \theta)} , \quad J^i(x, \theta) = \frac{\delta\Gamma}{\delta\pi^i(x, \theta)} \quad (6.39)$$

definiert das erzeugende Funktional $\Gamma(\pi, H)$ für die Einteilchen-irreduziblen Graphen, d.h. das Vertexfunktional. Ausgedrückt durch Γ ergibt (6.36):

$$\int d^2x d^2\theta \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\pi^i(x, \theta)} \frac{\delta\Gamma}{\delta H(x, \theta)} + H(x, \theta)\pi^i(x, \theta) \right) = 0 \quad (6.40)$$

²Zur Vermeidung zusätzlicher Faktoren t ist in diesem Abschnitt \mathcal{H}_J ohne Faktor t definiert.

In der Störungstheorie entwickelt man nun das Vertexfunktional in eine Taylorreihe in t :

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + t \Gamma^{(1)} + t^2 \Gamma^{(2)} + \dots \quad (6.41)$$

In der verwendeten Konvention ist

$$\Gamma^{(0)} = \mathcal{H}_{Susy} . \quad (6.42)$$

\mathcal{H}_{Susy} erfüllt tatsächlich (6.40), wie man durch direktes Nachrechnen überprüfen kann. In 1-Loop-Ordnung finden wir:

$$\int d^2x d^2\theta \left(\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\pi(x, \theta)} \frac{\delta\Gamma^{(1)}}{\delta H(x, \theta)} + \frac{\delta\Gamma^{(1)}}{\delta\pi(x, \theta)} \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta H(x, \theta)} \right) = 0 \quad (6.43)$$

Diese Gleichung muß insbesondere für den divergenten Anteil $\Gamma^{(1)div}$ gelten³.

Wir wollen nun (6.43) lösen. Mit Hilfe von Power-Counting (vgl. Abschnitt 6.2) sieht man, daß neben Termen mit zwei Ableitungen auch ein ableitungsfeier Term proportional zu $H(x, \theta)$ auftauchen kann. Der allgemeine Ansatz für $\Gamma^{(1)div}$ lautet deshalb:

$$\Gamma^{(1)div} = \int d^2x d^2\theta (B(\pi) + H(x, \theta) C(\pi)) \quad (6.44)$$

π hängt dabei selbst wieder von x und θ ab. Für $B(\pi)$ können wir folgenden Ansatz machen:

$$B(\pi) = a(\sigma) \frac{1}{2} \bar{D}\pi D\pi + b(\sigma) \frac{1}{2} \bar{D}\sigma D\sigma + c(\sigma) \pi \frac{1}{2} \bar{D}D\pi + d(\sigma) \frac{1}{2} \bar{D}D\sigma \quad (6.45)$$

Da die Vorfaktoren a, b, c, d skalar sind, lassen sie sich als Funktionen von π^2 oder alternativ in der hier angegebenen Form als Funktionen von σ schreiben. Wegen

$$\frac{1}{2} \bar{D}D\sigma = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{2} \bar{D}\pi D\pi + \frac{1}{2} \bar{D}\sigma D\sigma + \pi \frac{1}{2} \bar{D}D\pi \right) \quad (6.46)$$

kann man außerdem $d(\sigma) = 0$ setzen. Schließlich hat man noch die Freiheit, partiell zu integrieren

$$\int c(\sigma) \pi \frac{1}{2} \bar{D}D\pi = -\frac{1}{2} \int \bar{D}c(\sigma) \pi D\pi - \int c(\sigma) \frac{1}{2} \bar{D}\pi D\pi \quad (6.47)$$

$$= \int \sigma \frac{\partial c(\sigma)}{\partial \sigma} \frac{1}{2} \bar{D}\sigma D\sigma - \int c(\sigma) \frac{1}{2} \bar{D}\pi D\pi , \quad (6.48)$$

so daß man $c(\sigma)$ ebenfalls in $a(\sigma)$ und $b(\sigma)$ absorbieren kann. Die Koeffizienten $a(\sigma)$ und $b(\sigma)$ werden dadurch eindeutig.

Die Variationsableitungen lauten nun:

$$\frac{\delta \mathcal{H}_{Susy}}{\delta \pi^i} = \frac{1}{2} \bar{D}D\pi^i - \frac{\pi^i}{\sigma} \frac{1}{2} \bar{D}D\sigma - \frac{\pi^i}{\sigma} H \quad (6.49)$$

³In einer Cut-Off-Theorie ist das gerade der Term $\sim \ln \Lambda$, Λ = Impuls-Cutoff, im dimensionellen Regularisierungsschema der Term proportional $1/\varepsilon$. Die Argumentation ist Schema-unabhängig.

$$\frac{\delta \mathcal{H}_{Susy}}{\delta H} = \sigma \quad (6.50)$$

$$\frac{\delta \Gamma^{(1) div}}{\delta \pi^i} = -\frac{\pi^i}{\sigma} \frac{\partial a}{\partial \sigma} \frac{1}{2} \bar{D} \pi D \pi - \bar{D} (a D \pi^i) - \frac{\pi^i}{\sigma} \frac{\partial b}{\partial \sigma} \frac{1}{2} \bar{D} \sigma D \sigma + \frac{\pi^i}{\sigma} \bar{D} (b D \sigma) - \frac{\pi^i}{\sigma} \frac{\partial C}{\partial \sigma} H \quad (6.51)$$

$$\frac{\delta \Gamma^{(1) div}}{\delta H} = C \quad (6.52)$$

Nach Einsetzen von (6.42) und (6.49) bis (6.52) in (6.43) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{1}{2} \bar{D} D \pi^i - \frac{\pi^i}{\sigma} \frac{1}{2} \bar{D} D \sigma - \frac{\pi^i}{\sigma} H \right) C \\ & + \sigma \left(-\frac{\pi^i}{\sigma} \frac{\partial a}{\partial \sigma} \frac{1}{2} \bar{D} \pi D \pi - \bar{D} (a D \pi^i) - \frac{\pi^i}{\sigma} \frac{\partial b}{\partial \sigma} \frac{1}{2} \bar{D} \sigma D \sigma + \frac{\pi^i}{\sigma} \bar{D} (b D \sigma) - \frac{\pi^i}{\sigma} \frac{\partial C}{\partial \sigma} H \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.53)$$

Die Gleichung gilt für alle $H(x, \theta)$:

$$\frac{\pi^i}{\sigma} C + \pi^i \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0 \quad (6.54)$$

Ihre Lösung lautet:

$$C(\sigma) = \frac{\lambda}{\sigma} \quad (6.55)$$

Um die übrigbleibende Integralgleichung zu lösen, muß man alle auf π^i wirkenden Ableitungen durch partielle Integration beseitigen. Ausgehend von

$$\int \left(\frac{\lambda}{\sigma} \frac{1}{2} \bar{D} D \pi^i - \frac{\lambda \pi^i}{\sigma^2} \frac{1}{2} \bar{D} D \sigma - \pi^i \frac{\partial a}{\partial \sigma} \frac{1}{2} \bar{D} \pi D \pi - \sigma \bar{D} (a D \pi^i) - \pi^i \frac{\partial b}{\partial \sigma} \frac{1}{2} \bar{D} \sigma D \sigma + \pi^i \bar{D} (b D \sigma) \right) = 0 \quad (6.56)$$

bekommen wir:

$$\int \pi^i \left(\left(-2 \frac{\lambda}{\sigma^2} - 2a + 2b \right) \frac{1}{2} \bar{D} D \sigma + \left(2 \frac{\lambda}{\sigma^3} - 2 \frac{\partial a}{\partial \sigma} + \frac{\partial b}{\partial \sigma} \right) \frac{1}{2} \bar{D} \sigma D \sigma - \left(\frac{\partial a}{\partial \sigma} \right) \frac{1}{2} \bar{D} \pi D \pi \right) = 0 \quad (6.57)$$

Der Term proportional zu $\frac{1}{2} \bar{D} \pi D \pi$ muß verschwinden:

$$a(\sigma) = \mu \quad (6.58)$$

Dasselbe gilt für den Term proportional zu $\frac{1}{2} \bar{D} D \sigma$:

$$b(\sigma) = \mu + \frac{\lambda}{\sigma^2} \quad (6.59)$$

Durch diese Wahl von $a(\sigma)$ und $b(\sigma)$ verschwindet auch der Vorfaktor von $\frac{1}{2} \bar{D} \sigma D \sigma$. Dies ist für die Existenz der Lösung natürlich notwendig. Insgesamt ergibt sich für $\Gamma^{(1) div}$ als allgemeine Lösung:

$$\Gamma^{(1) div} = 2\mu t \int d^2 x d^2 \theta \left(\frac{1}{4} \bar{D} \pi D \pi + \frac{1}{4} \bar{D} \sigma D \sigma \right) + \lambda t \int d^2 x d^2 \theta \left(\frac{H}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{2} \bar{D} \sigma D \sigma \right) \quad (6.60)$$

Ein Faktor t wurde eingefügt um anzudeuten, daß es sich um einen 1-Loop-Term handelt. Es ist nun einfach zu sehen, daß die reskalierte Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}_{Susy,R}/t_R = \mathcal{H}_{Susy}/t \quad (6.61)$$

in Abhängigkeit von den renormierten Feldern

$$\pi_R = \frac{1}{\sqrt{Z}} \pi \quad (6.62)$$

$$\sigma_R = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sigma = \sqrt{\frac{1}{Z} - \pi_R^2} \quad (6.63)$$

und der renormierten Temperatur

$$t_R = \frac{1}{Z_1} t, \quad (6.64)$$

d.h.

$$\mathcal{H}_{Susy,R} = - \int d^2x d^2\theta \frac{Z}{Z_1} \left(\frac{1}{4} \bar{D}\pi_R D\pi_R + \frac{1}{4} \bar{D}\sigma_R D\sigma_R \right) - H\sigma_R, \quad (6.65)$$

die Renormierung in 1-Loop-Ordnung bewerkstelligt, wenn man

$$\frac{Z}{Z_1} = 1 + 2\mu t \quad (6.66)$$

$$Z = 1 + 2\lambda t \quad (6.67)$$

wählt.

Das weitere Vorgehen ist induktiv: Angenommen, die Renormierung ist bis zur Ordnung $(n-1)$ durchgeführt. Dann liefert (6.40) in Ordnung n :

$$\int d^2x d^2\theta \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\pi^i(x,\theta)} \frac{\delta\Gamma^{(n)}}{\delta H(x,\theta)} + \frac{\delta\Gamma^{(n)}}{\delta\pi^i(x,\theta)} \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta H(x,\theta)} = \quad (6.68)$$

$$- \int d^2x d^2\theta \frac{\delta\Gamma^{(1)}}{\delta\pi^i(x,\theta)} \frac{\delta\Gamma^{(n-1)}}{\delta H(x,\theta)} + \cdots + \frac{\delta\Gamma^{(n-1)}}{\delta\pi^i(x,\theta)} \frac{\delta\Gamma^{(1)}}{\delta H(x,\theta)} \quad (6.69)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist endlich. Der divergente Anteil $\Gamma^{(n)div}$ erfüllt also (6.40), deren Lösung wir bereits gefunden haben. Es ist deshalb auch in n -ter Ordnung der Störungstheorie möglich, den divergenten Anteil von $\Gamma^{(n)div}$ durch eine Redefinition von Z und Z_1 zu absorbieren. Der Beweis ist damit vollständig.

6.4 Kurze Darstellung der Wilsonschen Renormierungsgruppenideen

Wir wollen im folgenden die Ideen diskutieren, die, unter dem Schlagwort Renormierungsgruppenverhalten zusammengefaßt, einen wesentlichen Beitrag zum Verständnis kritischer Phänomene geliefert haben [27], [31].

Bekanntlich ist in der Festkörperphysik die kleinste relevante Länge durch den Gitterabstand a gegeben. Bevorzugt man die Darstellung im Fourierraum, ist analog ein Cutoff $\Lambda = \frac{2\pi}{a}$ einzuführen. Im Hinblick auf kritische Phänomene interessieren uns aber Vorgänge, die sich auf sehr großen Längenskalen, also für Wellenvektoren $k \ll \Lambda$ abspielen. Wir könnten deshalb versucht sein, in der Hamiltonfunktion, die sich als

$$\mathcal{H}_0 = \int_0^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d} F[\phi(k), \phi(-k)] \quad (6.70)$$

schreiben läßt, die Integration bei, beispielsweise, $\Lambda/2$ abzuberechnen. Das ist in (6.70) auch legitim – im allgemeinen gibt es nur einen Haken: Es treten noch Terme

$$\mathcal{H}_{int} = \int_0^\Lambda \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \cdots \frac{d^d k_n}{(2\pi)^d} F_n[\phi(k_1) \dots \phi(k_n)] (2\pi)^d \delta^d(k_1 + \dots + k_n) \quad (6.71)$$

auf, die Wechselwirkungen repräsentieren. Hier „beeinflusst“ ein Feld mit hoher Wellenzahl eines mit niedriger. Wie kann man das Dilemma umgehen?

Betrachten wir die Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{0 \leq |k| < \Lambda} D\phi(k) e^{-\frac{1}{t} \mathcal{H}} \quad (6.72)$$

und spalten die Integration über die Felder auf in 2 Teile:

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{0 \leq |k| < \frac{\Lambda}{2}} D\phi(k) \int \prod_{\frac{\Lambda}{2} \leq |k| < \Lambda} D\phi(k) e^{-\frac{1}{t} \mathcal{H}} \quad (6.73)$$

Gelingt es uns, diesen Ausdruck in der Form

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{0 \leq |k| < \frac{\Lambda}{2}} D\phi(k) e^{-\frac{1}{t} \mathcal{H}'} \quad (6.74)$$

zu schreiben, so haben wir eine sinnvolle Möglichkeit gefunden, die kurzreichweitigen Freiheitsgrade zu eliminieren. Wir haben aber noch mehr erreicht:

Versuchen wir, die so gewonnene Hamiltonfunktion \mathcal{H}' mit \mathcal{H} zu vergleichen. Eine Schwierigkeit beim Vergleich besteht darin, daß \mathcal{H}' als Cutoff $\frac{\Lambda}{2}$ und nicht Λ besitzt. Um sie zu beheben, reskalieren wir \mathcal{H}' gemäß $k \rightarrow 2k$ und erhalten eine Hamiltonfunktion \mathcal{H}'' , deren Cutoff wieder Λ ist. Wenn es uns den Vergleich erleichtert, können wir auch noch die Felder selbst reskalieren. Die Zustandssumme \mathcal{Z} ändert sich dabei nur um einen unwesentlichen Normierungsfaktor. Die so erhaltene Hamiltonfunktion \mathcal{H}''' wird sich im allgemeinen von \mathcal{H} grundlegend unterscheiden. Es kann aber auch der Fall eintreten, daß $\mathcal{H}''' = \mathcal{H}$ ist, mit anderen Worten, \mathcal{H} ist Fixpunkt der oben eingeführten und als Renormierungsgruppentransformation bezeichneten Prozedur. Was sind die Konsequenzen?

Angenommen, \mathcal{H} zeichnet eine Länge ξ als charakteristisch aus. Bei der Reskalierung $k \rightarrow 2k$ wird dann ξ auf $\xi/2$ abgebildet, das nun die charakteristische Länge *derselben*

Hamiltonfunktion \mathcal{H} ist. Mit anderen Worten $\xi = 2\xi$, was nur möglich ist für $\xi = 0$ oder $\xi = \infty$. Der Fall $\xi = 0$ ist uninteressant: Nur in Theorien ohne Wechselwirkung existiert auf *keiner* Skala eine Korrelation. Interessant ist hingegen der Fall $\xi = \infty$: Eine divergierende Korrelationslänge ist *das* Kennzeichen eines Phasenüberganges 2. Ordnung. Der kritische Punkt eines Phasenüberganges entspricht also genau dem Fixpunkt der Renormierungsgruppentransformation.

Untersuchen wir noch die Umgebung des Fixpunktes [27]. Dazu halten wir die Abweichungen so klein, daß wir die Renormierungsgruppentransformation linearisieren können. Nehmen wir der Einfachheit halber weiter an, daß zur linearisierten Renormierungsgruppentransformation Eigenvektoren v_i mit reellen Eigenwerten y_i existieren. Diese Annahme ist nicht trivial und muß im Einzelfall bewiesen werden. Bezeichnen wir mit R die Renormierungsgruppentransformation, mit L ihre linearisierte Version und mit \mathcal{H}_* den Fixpunkt, so können wir formal schreiben:

$$\begin{aligned} R(\mathcal{H}_* + \sum_i v_i) &= \mathcal{H}_* + \sum_i L v_i \\ &= \mathcal{H}_* + \sum_i y_i v_i \end{aligned} \quad (6.75)$$

Nach n -facher Anwendung gelangen wir zu:

$$R^n(\mathcal{H}_* + \sum_i v_i) = \mathcal{H}_* + \sum_i y_i^n v_i . \quad (6.76)$$

Da der Reskalierungsfaktor von R im Prinzip beliebig ist, muß $y_i \geq 0$ gelten. Man kann nun 3 Klassen von Eigenvektoren unterscheiden:

1. Irrelevante Operatoren: Für sie ist $y_i < 1$. Der Name weist darauf hin, daß irrelevante Operatoren verschwinden, führt man die Renormierungsgruppentransformation nur häufig genug aus.
2. Relevante Operatoren haben $y_i > 1$. Abweichungen vom Fixpunkt in Richtung dieser Operatoren werden durch die Renormierungsgruppentransformation verstärkt.
3. Marginale Operatoren haben $y_i = 1$. Ihre zugehörigen Störungen ändern sich unter der Renormierungsgruppentransformation nicht, kennzeichnen also eine ganze Schar von Fixpunkten. Eine über die linearisierte Renormierungsgruppentransformation hinausgehende Untersuchung zeigt aber, daß diese Vorstellung im allgemeinen ein Artefakt der linearisierten Version ist.

Betrachten wir ein explizites Beispiel: Sei τ die Temperaturdifferenz zur kritischen Temperatur, so ist τ ein relevanter Operator. Warum?

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen können wir für die Korrelationslänge eines Systems schreiben:

$$\begin{aligned} \xi(t_c + \tau) &= 2\xi(R(t_c + \tau)) \\ &= 2\xi(t_c + L\tau) \\ &= 2\xi(t_c + y_\tau \tau) \end{aligned} \quad (6.77)$$

bzw. nach mehrfacher Anwendung:

$$\xi(t_C + \tau) = 2^n \xi(t_C + y_\tau^n \tau) . \quad (6.78)$$

Diese Relation läßt sich für alle n nur erfüllen, wenn

$$\xi(t_C + \tau) \sim \tau^{-\frac{\ln 2}{\ln y_\tau}} \quad (6.79)$$

ist. Da die Korrelationslänge für $\tau = 0$ unendlich ist, folgt $y_\tau > 1$, d.h. τ ist ein relevanter Operator.

Wir wollen es bei diesem einen Beispiel bewenden lassen, da wir später einen formal etwas anderen Zugang benutzen. Statt wie in der oben beschriebenen Prozedur die kurzwelligen Freiheitsgrade zu eliminieren, kann man auch studieren, was passiert, wenn der Cutoff Λ gegen unendlich geht. Dies ist die von Feldtheoretikern als natürlich empfundene Vorgehensweise. Beiden Methoden ist der Versuch gemeinsam, von mikroskopischen Details zu abstrahieren. Vom festkörperphysikalischen Standpunkt aus geschieht dies, weil am Phasenübergangspunkt die mikroskopische Struktur verschwindet, vom feldtheoretischen Standpunkt aus, weil der Cutoff einzig und allein deshalb eingeführt wurde, damit die Integrale konvergieren.

Einen wichtigen Punkt gilt es noch zu diskutieren: Was wäre, wenn sich der Grenzprozess $\Lambda \rightarrow \infty$ tatsächlich durchführen ließe? Dieses Gedankenexperiment ist gar nicht so abwegig, beruht hierauf doch die Idee der dimensionellen Regularisierung: Erniedrigt man in renormierbaren Theorien die Dimension des Raumes ein wenig, so werden die auftretenden Integrale Ultraviolett-konvergent, der Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ läßt sich also durchführen. In unserem oben ausgearbeiteten Schema fällt damit der erste Schritt (Ausintegration der Freiheitsgrade mit $\frac{\Lambda}{2} \leq |k| < \Lambda$) weg. Übrig bleibt eine Reskalierung der Impulse, einer neu einzuführenden Massenskala μ und der Felder. Genau diesen Prozess werden wir im nächsten Abschnitt für eine kontinuierliche Reskalierung diskutieren.

6.5 Renormierungsgruppengleichung und kritische Exponenten

In diesem Abschnitt werden die Wilsonschen Renormierungsgruppenideen in der Sprache der Feldtheorie behandelt. Die Diskussion ist notwendig, um die Ergebnisse der Störungsrechnung (Kapitel 7) interpretieren zu können.

Im vorletzten Abschnitt wurde die Renormierbarkeit des supersymmetrischen nichtlinearen Sigma-Modells bewiesen. Was können wir daraus über Phasenübergänge lernen⁴?

Die renormierten zusammenhängenden Greenfunktionen $G_R^{(n)}$ lassen sich durch die unrenormierten ausdrücken⁵:

$$G_R^{(n)}(p, t_R, H_R, \mu) = Z(t_R)^{-n/2} G_B^{(n)}(p, t_B, H_B) \quad (6.80)$$

⁴Vgl. z.B. [4], [31]

⁵Die angegebenen Relationen für die Korrelationsfunktionen gelten sowohl für das Feld des bosonischen Modells als auch für die einzelnen Felder des supersymmetrischen Modells. Möchte man die Skalierungseigenschaften des Superfeldes selbst angeben, so muß die Reskalierung $x \rightarrow \lambda x$ bzw. $k \rightarrow k/\lambda$ durch $\theta \rightarrow \sqrt{\lambda}\theta$ ergänzt werden.

Hierbei war

$$t_R = \frac{1}{Z_1} \mu^\varepsilon t_B , \quad (6.81)$$

$$H_R = \frac{\sqrt{Z}}{Z_1} H_B . \quad (6.82)$$

Die Invarianz von (6.80) unter einer Änderung von μ führt auf die Differentialgleichung:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(t_R) \frac{\partial}{\partial t_R} + \frac{n}{2} \zeta(t_R) + \gamma_m(t_R) H_R \frac{\partial}{\partial H_R} \right] G_R^{(n)}(p, t_R, H_R, \mu) = 0 \quad (6.83)$$

mit den Abkürzungen (die Ableitungen werden alle bei festen nackten Parametern, angedeutet durch einen Index $_B$, genommen):

$$\beta(t_R) := \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_B t_R = t_R \left(\varepsilon - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_B \ln Z_1 \right) \quad (6.84)$$

$$\zeta(t_R) := \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_B \ln Z \quad (6.85)$$

$$\begin{aligned} \gamma_m(t_R) &:= \frac{\mu}{H_R} \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_B H_R = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_B \ln \frac{\sqrt{Z}}{Z_1} \\ &= \frac{1}{2} \zeta(t_R) + \frac{1}{t_R} \beta(t_R) - \varepsilon \end{aligned} \quad (6.86)$$

Eine äquivalente, rechentechnisch einfachere Version ist⁶:

$$\beta(t_R) = \frac{\varepsilon t_R}{1 + t_R \frac{\partial}{\partial t_R} \ln Z_1(t_R)} \quad (6.87)$$

$$\zeta(t_R) = \beta(t_R) \frac{\partial}{\partial t_R} \ln Z(t_R) \quad (6.88)$$

Untersuchen wir (6.83) zuerst für $H_R = 0$. Hierfür parametrisieren wir t_R und μ in Abhängigkeit von einem Reskalierungsfaktor λ :

$$\left[\mu(\lambda) \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(t_R(\lambda)) \frac{\partial}{\partial t_R} + \frac{n}{2} \zeta(t_R(\lambda)) \right] G_R^{(n)}(p, t_R(\lambda), \mu(\lambda)) = 0 \quad (6.89)$$

mit

$$\mu(\lambda) := \lambda \mu . \quad (6.90)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung erhalten wir am einfachsten, wenn wir unsere Ausgangsgleichung in der Form

$$Z(t_R(\lambda))^{n/2} G_R^{(n)}(p, t_R(\lambda), \mu(\lambda)) = \text{unabhängig von } \lambda \quad (6.91)$$

⁶ Die Definition der β -Funktion stimmt mit der von Wegner [17], [28] überein. Seine ζ -Funktion definiert er als $\zeta(t_R) := \beta(t_R) \frac{\partial}{\partial t_R} \ln Z^{-1/2}(t_R)$, was einen zusätzlichen Faktor $-\frac{1}{2}$ liefert.

schreiben, diese nach λ ableiten und sofort wieder mit λ multiplizieren:

$$\lambda \frac{n}{2} \frac{\partial \ln Z}{\partial t_R} \dot{t}_R(\lambda) G_R^{(n)} + \lambda \frac{\partial G_R^{(n)}}{\partial t_R} \dot{t}_R(\lambda) + \mu(\lambda) \frac{\partial G_R^{(n)}}{\partial \mu} = 0 \quad (6.92)$$

Der Punkt bezeichnet die Ableitung nach λ . Durch Koeffizientenvergleich mit (6.89) erhalten wir:

$$\lambda \dot{t}_R(\lambda) = \beta(t_R(\lambda)) \quad (6.93)$$

$$\lambda \frac{\partial \ln Z}{\partial t_R} \dot{t}_R(\lambda) = \zeta(t_R(\lambda)) \quad (6.94)$$

Setzt man die erste dieser beiden Gleichungen in die zweite ein, so sieht man, daß sie mit der Definitionsgleichung (6.88) für $\zeta(t_R)$ äquivalent ist. Die Lösung für (6.93) läßt sich einfach finden.

$$\frac{\dot{t}_R(\lambda)}{\beta(t_R(\lambda))} = \frac{1}{\lambda} \quad (6.95)$$

ergibt nach Integration:

$$\int_{t_R(1)}^{t_R(\lambda)} \frac{dt}{\beta(t)} = \ln \lambda \quad (6.96)$$

Man kann auch (6.88) bzw. (6.94) nach $Z(t_R(\lambda))$ auflösen:

$$\frac{\zeta(t_R(\lambda))}{\beta(t_R(\lambda))} = \frac{\partial}{\partial t_R} \ln Z(t_R(\lambda)) \quad (6.97)$$

Integrieren wir von $t_R(1)$ bis $t_R(\lambda)$, so erhalten wir:

$$\int_{t_R(1)}^{t_R(\lambda)} \frac{\zeta(t)}{\beta(t)} dt = \ln \frac{Z(t_R(\lambda))}{Z(t_R(1))} \quad (6.98)$$

Aufgelöst nach $Z(t_R(\lambda))$ ergibt sich schließlich:

$$Z(t_R(\lambda)) = Z(t_R(1)) \exp \left[\int_{t_R(1)}^{t_R(\lambda)} \frac{\zeta(t)}{\beta(t)} dt \right] \quad (6.99)$$

Die Gleichungen (6.96) und (6.99) sind in ihrer Allgemeinheit sicher schwer zu durchschauen. Im Hinblick auf kritische Phänomene interessieren uns Lösungen von (6.96), für die $t_R(\lambda)$ unabhängig von λ , also skaleninvariant wird. Wie ist das möglich? Nehmen wir an, $t_R(\lambda) \rightarrow t_*$ für $\lambda \rightarrow 0$, also $\ln \lambda \rightarrow -\infty$. Dann muß offensichtlich der Integrand von (6.96) ebenfalls gegen $-\infty$ gehen, $\beta(t_R)$ also gegen Null!

Nehmen wir deshalb weiter an, $\beta(t_R)$ habe an der Stelle $t_R = t_*$ eine einfache Nullstelle. Dann ist

$$\beta(t_R) = \omega(t_R - t_*) + O(|t_R - t_*|^2) . \quad (6.100)$$

Untersuchen wir zuerst den Fall $\omega > 0$, dann können wir uns für $t_R \rightarrow t_*$ auf den linearen Term beschränken. Die Integration in (6.96) wird elementar:

$$\ln \lambda = \int_{t_R(1)}^{t_R(\lambda)} \frac{dt}{\omega(t - t_*)} = \frac{1}{\omega} \ln |t_R(\lambda) - t_*| + \text{const.} \quad (6.101)$$

unabhängig davon, ob t_R größer oder kleiner als t_* ist. Die Auflösung nach λ ergibt:

$$\lambda \sim |t_R(\lambda) - t_*|^{1/\omega} \quad (6.102)$$

Diese Relation werden wir im folgenden noch mehrfach benutzen. Die Lösung von (6.99) ergibt sich für $t_R(1) \approx t_R(\lambda) \approx t_*$ aus

$$\int_{t_R(1)}^{t_R(\lambda)} \frac{\zeta(t)}{\beta(t)} dt \approx \int_{t_R(1)}^{t_R(\lambda)} \frac{\zeta(t_*)}{\omega(t - t_*)} dt = \frac{\zeta(t_*)}{\omega} \ln |t_R(\lambda) - t_*| + \text{const.} \quad (6.103)$$

zu (wir verwenden (6.102)):

$$Z(t_R(\lambda)) \sim |t_R(\lambda) - t_*|^{\zeta(t_*)/\omega} \sim \lambda^{\zeta(t_*)} \quad (6.104)$$

Ist ω kleiner als 0, so bleiben die Gleichungen offensichtlich unverändert. Allerdings haben sie dann Gültigkeit für $\lambda \rightarrow \infty$. Anders formuliert: (6.104) gilt für $|t_R(\lambda) - t_*| \ll 1$.

Versuchen wir zuerst einmal, die Gleichungen zu interpretieren. Hierzu erinnern wir uns an das naive Skalierungsverhalten (6.29):

$$G_R^{(n)}(\lambda p, t_R, \lambda \mu) = \lambda^{n(y_N - d)} G_R^{(n)}(p, t_R, \mu) \quad (6.105)$$

Aus (6.91) und (6.105) ergibt sich:

$$G_R^{(n)}(\lambda p, t_R(1), \lambda \mu) = \lambda^{n(y_N - d)} G_R^{(n)}(p, t_R(1), \mu) = \lambda^{n(y_N - d)} \left[\frac{Z(t_R(\lambda))}{Z(t_R(1))} \right]^{n/2} G_R^{(n)}(p, t_R(\lambda), \lambda \mu). \quad (6.106)$$

Untersuchen wir den Limes $t_R(\lambda) \rightarrow t_*$, d.h. $\lambda \rightarrow 0$ für $\omega > 0$ und $\lambda \rightarrow \infty$ für $\omega < 0$, so erhalten wir mit (6.104) nach Umbenennung von $\lambda \mu$ in μ :

$$G_R^{(n)}(\lambda p, t_R(1), \mu) \sim \lambda^{n[\zeta(t_*)/2 + y_N - d]} G_R^{(n)}(p, t_*, \mu) \quad (6.107)$$

Wir sehen: Für $t_R = t_*$ zerfällt die Korrelation wie

$$G_R^{(2)}(x - x', t_*, \mu) \sim |x - x'|^{-\zeta(t_*) - 2y_N}. \quad (6.108)$$

Der Exponent η , der die Abweichung vom Ornstein-Zernicke-Verhalten ($\eta = 0$) in

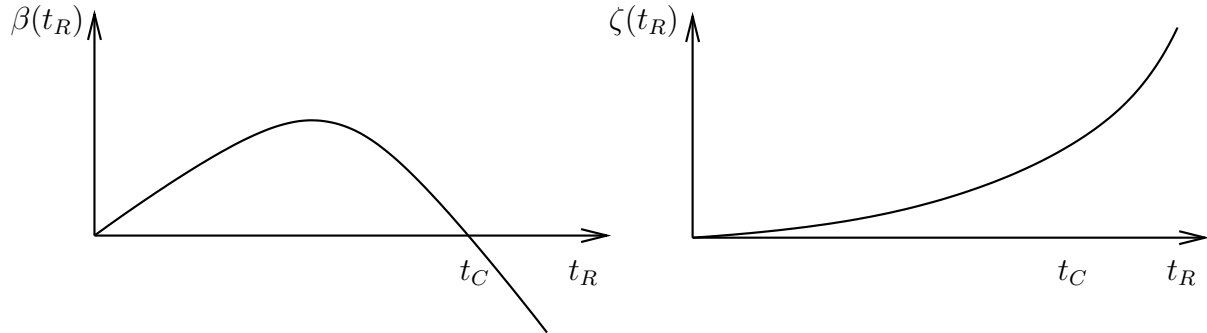
$$G_R^{(2)}(x - x', t_*, \mu) \sim |x - x'|^{-(d-2+\eta)} \quad (6.109)$$

beschreibt, ergibt sich hieraus zu:

$$\eta = \zeta(t_*) - \varepsilon + 2y_N \quad (6.110)$$

Da der Fall $\lambda \rightarrow 0$ das langreichweitige Verhalten des Systems beschreibt, nennt man den zugehörigen Fixpunkt Infrarotfixpunkt. Analog werden Fixpunkte für $\lambda \rightarrow \infty$ Ultraviolettfixpunkte genannt.

Es ergibt sich folgendes Bild:



Die β -Funktion hat in dem angegebenen Beispiel, das dem nichtlinearen Sigma-Modell in $2 + \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$) Dimensionen entspricht, eine Nullstelle mit positiver Steigung an der Stelle Null. Null ist deshalb ein Infrarot-Attraktor ($\lambda \rightarrow 0$). Für $\lambda \rightarrow \infty$ ist $t_R = t_C$ Attraktor. Das heißt, für sehr große und sehr kleine Impulse besitzen die Korrelationsfunktionen ein einfaches Skalenverhalten. Aus (6.107) folgt:

$$G_R^{(2)}(p, t_R, \mu) \sim \begin{cases} |p|^{2(y_N-d)} & \text{für } |p| \rightarrow 0 \\ |p|^{2(y_N-d)+\zeta(t_C)} & \text{für } |p| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (6.111)$$

Die Temperatur $t_R = t_C$ ist zwar auch ein Infrarot-Fixpunkt, als solcher aber instabil. Das hat interessante Konsequenzen.

Betrachten wir noch einmal (6.106) für $t_R \approx t_C$:

$$G_R^{(n)}(p, t_R(1), \mu) = \lambda^{n(y_N-d)} \left[\frac{Z(t_R(\lambda))}{Z(t_R(1))} \right]^{n/2} G_R^{(n)}(\lambda^{-1}p, t_R(\lambda), \mu) \quad (6.112)$$

Absorbiert man den Vorfaktor in die Normierung der Greenfunktionen für $t_R(\lambda)$ und $t_R(1)$, so sind die Korrelationsfunktionen für $t_R(\lambda)$ identisch mit denen für $t_R(1)$, sofern man in ersteren alle Impulse durch λ dividiert, d.h. alle Längen mit λ multipliziert. Anders formuliert: Bei $t_R(\lambda)$ ist die charakteristische Längenskala ξ um einen Faktor λ größer als bei $t_R(1)$. Mit (6.102) heißt das für $t_R \approx t_C$:

$$\xi \sim |t_R - t_C|^{1/\omega} \quad (6.113)$$

Im Vergleich zu der üblichen Notation

$$\zeta \sim |t_R - t_C|^{-\nu} \quad (6.114)$$

halten wir fest:

$$\nu = -\frac{1}{\omega} . \quad (6.115)$$

Untersuchen wir zum Abschluß noch das Verhalten der Greenfunktionen in Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes H . Analog zu (6.91) setzen wir an

$$Z(t_R(\lambda))^{n/2} G_R^{(n)}(p, t_R(\lambda), H_R(\lambda), \mu(\lambda)) = \text{unabhängig von } \lambda , \quad (6.116)$$

differenzieren nach λ und multiplizieren mit λ :

$$\lambda \frac{n}{2} \frac{\partial \ln Z}{\partial t_R} \dot{t}_R(\lambda) G_R^{(n)} + \lambda \frac{\partial G_R^{(n)}}{\partial t_R} \dot{t}_R(\lambda) + \mu(\lambda) \frac{\partial G_R^{(n)}}{\partial \mu} + \lambda \frac{\partial G_R^{(n)}}{\partial H_R} \frac{\partial H_R}{\partial \lambda} = 0 \quad (6.117)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (6.83) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lambda \dot{t}_R(\lambda) &= \beta(t_R(\lambda)) \\ \lambda \frac{\partial \ln Z}{\partial t_R} \dot{t}_R(\lambda) &= \zeta(t_R(\lambda)) \\ \lambda \frac{\partial H_R(\lambda)}{\partial \lambda} &= \gamma_m(t_R(\lambda)) H_R(\lambda) \end{aligned} \quad (6.118)$$

Die zweite Gleichung entspricht wieder der Definitionsgleichung für $\zeta(t_R)$, ist also redundant. Versuchen wir nun, die Gleichung (6.118) für $t_R \approx t_C$ zu lösen. Wir verwenden dafür (6.86) und (6.100):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln H_R(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{1}{\lambda} \gamma_m(t_R(\lambda)) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{2} \zeta(t_R(\lambda)) + \frac{1}{t_R} \beta(t_R(\lambda)) - \varepsilon \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{2} \zeta(t_C) - \varepsilon + O(t_R - t_C) \right] \end{aligned} \quad (6.119)$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$\ln \frac{H_R(\lambda)}{H_R(1)} = \left(\frac{1}{2} \zeta(t_C) - \varepsilon \right) \ln \lambda \quad (6.120)$$

Nach $H_R(\lambda)$ aufgelöst erhalten wir schließlich:

$$H_R(\lambda) = H_R(1) \lambda^{\frac{1}{2}\zeta(t_C) - \varepsilon} \quad (6.121)$$

Können wir daraus für $t_R = t_C$ die Magnetisierung in Abhängigkeit von einem äußeren Feld herleiten? Da die Magnetisierung translationsinvariant ist, gilt analog zu (6.106)

$$\begin{aligned} M_R(t_R(1), H_R(1), \mu) &= G_R^{(1)}(t_R(1), H_R(1), \mu) \\ &= \lambda^{y_N} G_R^{(1)}(t_R(1), H_R(1)/\lambda^{y_H}, \mu/\lambda) \\ &= \lambda^{y_N} \left[\frac{Z(t_R(\lambda))}{Z(t_R(1))} \right]^{\frac{1}{2}} G_R^{(1)}(t_R(\lambda), H_R(\lambda)/\lambda^{y_H}, \mu) \end{aligned} \quad (6.122)$$

wobei y_H die kanonische Dimension des äußeren Feldes ist. Eliminieren wir das Verhältnis der Z -Faktoren mit Hilfe von (6.104) und setzen für $H_R(\lambda)$ (6.121) ein:

$$M_R(t_R(1), H_R(1), \mu) = \lambda^{y_N + \frac{1}{2}\zeta(t_C)} M_R(t_R(\lambda), H_R(1) \lambda^{\frac{1}{2}\zeta(t_C) - \varepsilon - y_H}, \mu) \quad (6.123)$$

Für $t_R(1), t_R(\lambda) \rightarrow t_C$ und feste Massenskala μ erhalten wir

$$M_R(H_R) = \lambda^{y_N + \frac{1}{2}\zeta(t_C)} M_R(H_R \lambda^{\frac{1}{2}\zeta(t_C) - \varepsilon - y_H}) \quad (6.124)$$

und deshalb

$$M_R \sim H^{1/\delta} \quad (6.125)$$

mit

$$\delta = \frac{2(\varepsilon + y_H) - \zeta(t_C)}{\zeta(t_C) + 2y_N} \quad (6.126)$$

Für den bosonischen Fall verwenden wir $y_H = 2 - y_N$ und drücken $\zeta(t_C)$ durch η (6.110) aus. Dadurch ergibt sich ein Zusammenhang zwischen η und δ , eine sogenannte Skalenrelation:

$$\delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} \quad (6.127)$$

Für den supersymmetrischen Fall ist $y_H = 1 - y_N$ und wir erhalten eine etwas andere Skalenrelation:

$$\delta = \frac{d - \eta}{d - 2 + \eta} . \quad (6.128)$$

Eine interessante Beobachtung wollen wir noch festhalten: Bei der Renormierung des nichtlinearen Sigma-Modells hatten wir festgestellt, daß für die Renormierung des äußeren Feldes kein zusätzlicher, also unabhängiger Z-Faktor nötig war. Bei der Herleitung von (6.125) hatte sich das dadurch bemerkbar gemacht, daß wir $\gamma_m(t_R)$ durch $\beta(t_R)$ und $\zeta(t_R)$ ausdrücken konnten, woraus schließlich die Skalenrelation (6.127) folgte. Nun läßt sich (vgl. [18]) die Skalenrelation auch mit anderen Methoden beweisen, so daß es umgekehrt nicht verwunderlich ist, daß für die Renormierung des äußeren Feldes kein zusätzlicher Z-Faktor notwendig ist.

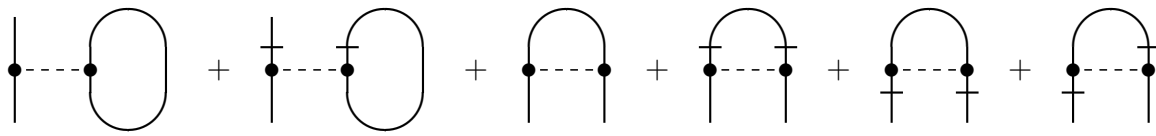
Kapitel 7

Explizite Durchführung der Renormierung

7.1 Generelle Strategie

Die Renormierbarkeit sowohl des bosonischen wie des supersymmetrischen nichtlinearen Sigma-Modells wurde bewiesen. Die Aufgabe, die sich nun stellt, lautet: Wie lassen sich die Z-Faktoren möglichst einfach berechnen?

Üblicherweise wird hierzu das Vertexfunktional $\Gamma^{(2)}$ renormiert. In 1-Loop-Ordnung tragen 6 Graphen bei:



(7.1)

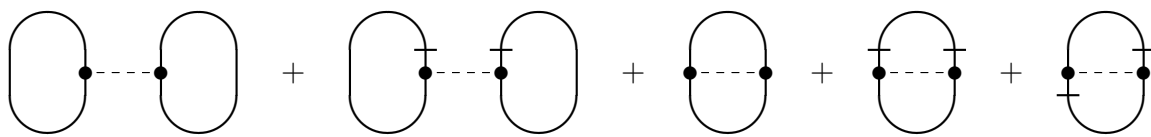
Die Notation hält sich an Ma[20]. Der Graph



(7.2)

symbolisiert den Term $(\vec{\pi}^2)^2$, wobei das Skalarprodukt für die durch die durchgezogene Linie verbundenen Felder auszuführen ist. Ableitungen der Felder werden durch kleine Querstriche dargestellt.

Kontrahiert man die freien Enden der Graphen aus (7.1), so reduziert sich die Zahl der Diagramme auf 5:



(7.3)

Dieses sind genau die Diagramme, die zur freien Energie in 2-Loop-Ordnung beitragen. Wir sehen, daß die Zahl der Diagramme, die zur freien Energie in $(n + 1)$ -ter Ordnung beitragen, geringer ist, als die Zahl der Diagramme, die zur Berechnung von $\Gamma^{(2)}$ in n -ter Ordnung nötig sind. Wir werden deshalb die freie Energie – und nicht etwa $\Gamma^{(2)}$ – bis zur 3. Ordnung berechnen.

Wie wir weiter unten sehen werden, läßt sich so $Z(t_R)$ und damit $\zeta(t_R)$ bis zur 3. und $Z_1(t_R)$ und damit $\beta(t_R)$ bis zur 2. Ordnung berechnen.

7.2 Freie Energie der freien Theorie

Für den bosonischen Fall gehen wir aus von $(n = 1)$:

$$\mathcal{H}_{Bos} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (k^2 + m_B^2) |\varphi(k)|^2 \quad (7.4)$$

und versuchen,

$$Z_{Bos}^{(1)}(t_B, m_B^2) = \int [D\varphi] e^{-\frac{1}{t_B} \mathcal{H}_{Bos}} \quad (7.5)$$

zu berechnen. Das Pfadintegral $[D\varphi]$ ist nur auf einem Gitter definiert. Ein Gitter mit Kantenlänge $2\pi/l$ im Impulsraum erhält man, wenn man im Ortsraum die Lineardimension l und periodische Randbedingungen wählt. Die Fourier-Transformation ist dann

$$\varphi(k) = \int_0^l d^d x e^{-ikx} \varphi(x) \quad (7.6)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{l^d} \sum_k e^{ikx} \varphi(k) \quad (7.7)$$

Mit dieser Konvention ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{Bos} &= \frac{1}{2} \sum_k l^{-d} (k^2 + m_B^2) |\varphi(k)|^2 \\ [D\varphi] &= \prod_k d\varphi(k) \end{aligned} \quad (7.8)$$

Für die Zustandssumme erhalten wir deshalb:

$$\begin{aligned} Z_{Bos}^{(1)}(t_B, m_B^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_k d\varphi_k e^{-\frac{1}{2t_B} \sum_k l^{-d} (k^2 + m_B^2) |\varphi(k)|^2} \\ &= \prod_k \left(\frac{\pi t_B}{k^2 + m_B^2} l^d \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Für $\ln Z_{Bos}^{(1)}(t_B, m_B^2)$ ergibt sich nun:

$$\ln Z_{Bos}^{(1)}(t_B, m_B^2) = \frac{1}{2} \sum_k \ln \left(\frac{\pi t_B}{k^2 + m_B^2} l^d \right) \quad (7.10)$$

Die freie Energie definieren wir als

$$\mathcal{F}_{Bos}(t_B, m_B^2) := \frac{\ln Z_{Bos}(t_B, m_B^2)}{l^d} . \quad (7.11)$$

Sie ist eine Dichte. Bei Verwendung von (7.10) und (7.11) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{Bos}^{(1)}(t_B, m_B^2) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \left(\frac{\pi t_B}{k^2 + m_B^2} l^d \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \left(1 + \frac{k^2}{m_B^2} \right) + \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \left(\frac{\pi t_B l^d}{m_B^2} \right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Der 2. Term verschwindet im dimensionellen Regularisierungsschema. Für ein n -komponentiges Feld erhalten wir schließlich:

$$\mathcal{F}_{Bos}^{(1)}(t_B, m_B^2) = -\frac{n}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \left(1 + \frac{k^2}{m_B^2} \right) \quad (7.13)$$

Diesen Ausdruck können wir weiter umformen¹:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{Bos}^{(1)}(t_B, m_B^2) &= -\frac{n}{2} m_B^d \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \ln(1 + x^2) \\ &= -\frac{n}{2} m_B^d \frac{\Omega(d)}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dx x^{d-1} \ln(1 + x^2) \\ &= -\frac{n}{4} m_B^d \frac{\Omega(d)}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dy y^{(d-2)/2} \ln(1 + y) \\ &= \frac{n}{2d} m_B^d \frac{\Omega(d)}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dy y^{d/2} \frac{1}{(1 + y)} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Das Integral ist nach [2] ein Produkt von Γ -Funktionen,

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{2d} m_B^d \frac{\Omega(d)}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + 1) \Gamma(-\frac{d}{2})}{\Gamma(1)} \\ &= m_B^{2+\varepsilon} \frac{2n}{\varepsilon(2 + \varepsilon)} f , \end{aligned} \quad (7.15)$$

wobei der Faktor

$$\begin{aligned} f &= \frac{\Omega(d)}{(2\pi)^d} \Gamma(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \Gamma(1 + \frac{\varepsilon}{2}) \\ &= \frac{1}{2\pi} (2\sqrt{\pi})^{-\varepsilon} \Gamma(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \end{aligned} \quad (7.16)$$

der Einfachheit halber ausgeklammert wurde.

¹Vgl. hierzu auch Anhang A.

Versuchen wir, die freie Energie für den supersymmetrischen Fall zu berechnen, so stellen wir fest, daß sie verschwindet. Dieses Ergebnis kann man sich auch allgemein klarmachen: Der Erwartungswert der Hamiltondichte \mathcal{H}_{Susy} , die definiert war als Dichte im Orts- und θ -Raum, ist invariant unter Verschiebungen im θ -Raum, also θ -unabhängig. Hätte man \mathcal{H}_{Susy} nur als Dichte im Ortsraum und *nicht* auch im θ -Raum definiert, so hätte man zur Berechnung des Erwartungswertes \mathcal{H}_{Susy} über θ integrieren müssen. Das Ergebnis wäre Null.

Dasselbe passiert nun bei der Berechnung der freien Energie, die als Dichte im Ortsraum definiert wurde. Wir müssen die freie Energie für das supersymmetrische Modell deshalb als Dichte im Orts- und θ -Raum definieren. Leider läßt sich diese *nicht* aus $\ln \mathcal{Z}$ extrahieren, da man – salopp gesprochen – die θ -Integration nicht los wird. Bevor wir einen anderen Weg angeben, $\mathcal{F}_{Susy}^{(1)}$ zu berechnen, sollten wir noch einen Blick auf die bosonische freie Energie werfen. Die freie Energie F des gesamten Raumes erhält man durch Integration der Dichte \mathcal{F} zu:

$$F = \int d^d x \mathcal{F} = 0, \quad (7.17)$$

da das dimensionelle Regularisierungsschema als Integral einer Konstanten über den gesamten Raum Null vorsieht. Das Phänomen, daß die freie Energie bei ungeschickter Definition Null wird, taucht also bereits im bosonischen Fall auf.

Unsere zweite Methode, \mathcal{F} zu berechnen, beruht auf der Überlegung, daß für $m_B = 0$ die freie Energie verschwinden muß. Warum? Da in diesem Fall t_B die einzige dimensionsbehaftete Größe ist, gilt:

$$\mathcal{F}_{Bos}(t_B, m_B = 0) \sim t_B^{(2+\epsilon)/\epsilon} \quad (7.18)$$

bzw.

$$\mathcal{F}_{Susy}(t_B, m_B = 0) \sim t_B^{(1+\epsilon)/\epsilon} \quad (7.19)$$

Diese Relationen sind nur für $\mathcal{F}_{Bos}(t_B, m_B = 0) \equiv 0$ bzw. $\mathcal{F}_{Susy}(t_B, m_B = 0) \equiv 0$ sinnvoll. Wir wenden nun folgenden Trick an: Angenommen, wir kennen $\mathcal{F}_{Bos}(t_B, pm_B)$, dann läßt sich für Δp infinitesimal klein $\mathcal{F}_{Bos}(t_B, (p + \Delta p)m_B)$ störungstheoretisch dadurch berechnen, daß für die Masse der freien Theorie pm_B angenommen und Δpm_B als Störung aufgefaßt wird. Aus der Störungsreihe

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots \quad (7.20)$$

trägt nur der erste Term bei:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{Bos}(t_B, (p + \Delta p)m_B^2) - \mathcal{F}_{Bos}(t_B, pm_B^2) &= \text{Diagram 1} \\ &= -\frac{1}{2}(\Delta pm_B^2)n(\sqrt{p}m_B)^\epsilon \left(-\frac{f}{\epsilon}\right) \\ &= \Delta p \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{F}(t_B, pm_B^2) \end{aligned} \quad (7.21)$$

Durch Integration folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{Bos}^{(1)}(t_B, m_B^2) &= \int_0^1 dp \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{F}(t_B, pm_B^2) \\
&= m_B^{2+\varepsilon} \frac{n}{2\varepsilon} \int_0^1 dp p^{\frac{\varepsilon}{2}} \\
&= m_B^{2+\varepsilon} \frac{n}{\varepsilon(2+\varepsilon)} f
\end{aligned} \tag{7.22}$$

in Übereinstimmung mit (7.15).

Diese Methode läßt sich auch im supersymmetrischen Fall anwenden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{Susy}(t_B, (p + \Delta p)m_B) - \mathcal{F}_{Susy}(t_B, pm_B) &= \text{Diagram: a circle with a dot on the left} \\
&= \frac{1}{2} (\Delta p m_B) n (pm_B)^\varepsilon \left(-\frac{f}{\varepsilon} \right) \\
&= \Delta p \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{F}(t_B, pm_B^2)
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Daraus folgt durch Integration:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{Susy}^{(1)}(t_B, m_B) &= \int_0^1 dp \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{F}(t_B, pm_B^2) \\
&= -m_B^{1+\varepsilon} \frac{n}{2\varepsilon} \int_0^1 dp p^\varepsilon \\
&= -m_B^{1+\varepsilon} \frac{n}{\varepsilon(2+\varepsilon)} f
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Eine Beobachtung gilt es noch festzuhalten: Das Integral über θ zeichnet kein Vorzeichen aus! In der hier benutzten Konvention ist $\int d^2\theta \frac{1}{2} \bar{\theta}\theta = 1$. Wir erhalten deshalb eine freie Energie die sich von der bosonischen freien Energie im wesentlichen durch ein Minuszeichen unterscheidet.

7.3 Die freie Energie in 2- und 3-Loop-Ordnung

Die freie Energie in 2- und 3-Loop-Ordnung wird mit den in Kapitel 4 diskutierten Methoden berechnet.

Hierzu entwickeln wir die bosonische Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}_{Bos} = \int d^d x \frac{1}{2} ((\nabla \pi)^2 + (\nabla \sigma)^2) - m_B^2 \sigma$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^d x \frac{1}{2} (\nabla \pi)^2 + \frac{1}{2} \frac{(\pi \nabla \pi)^2}{\sigma^2} - m_B^2 \sigma \\
&= - \int d^d x m_B^2 - \frac{1}{2} (\nabla \pi)^2 - \frac{1}{2} m_B^2 \pi^2 \\
&\quad - v_2 (\pi \nabla \pi)^2 - v_4 (\pi \nabla \pi)^2 \pi^2 - \dots \\
&\quad + v_1 m_B^2 (\pi^2)^2 + v_3 m_B^2 (\pi^2)^3 + \dots
\end{aligned} \tag{7.25}$$

mit

$$v_1 = -\frac{1}{8} \tag{7.26}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \tag{7.27}$$

$$v_3 = -\frac{1}{16} \tag{7.28}$$

$$v_4 = \frac{1}{2} . \tag{7.29}$$

Die Vorzeichen sind so eingerichtet, daß die zugehörigen Graphen jeweils einen der Faktoren v_i liefern. Das globale Minuszeichen vor dem Integral gleicht das Minuszeichen im Exponenten von $\mathcal{Z} \sim e^{-\frac{1}{t_B} \mathcal{H}_{Bos}}$ aus, die Minuszeichen vor v_2 und v_4 kommen von den i 's aus der Ersetzung $\nabla \rightarrow ik$. Im Anhang werden die 5 Graphen in 2-Loop- und die 45 Graphen in 3-Loop-Ordnung aufgelistet sowie ihre kombinatorischen Faktoren, ihre „Graphenfaktoren“ v_1, \dots, v_4 sowie die divergenten Anteile der zugehörigen Graphen angegeben.

Für die supersymmetrische Hamiltonfunktion lautet die Entwicklung

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{Susy} &= -\frac{1}{2} \int d^d x d^2 \theta \frac{1}{2} \bar{D} \pi D \pi + \frac{1}{2} \bar{D} \sigma D \sigma - 2m_B \sigma \\
&= - \int d^d x d^2 \theta - v_0 m_B + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \bar{D} \pi D \pi - m_B \pi^2 \right) \\
&\quad + v_2 \frac{1}{2} (\pi \bar{D} \pi) (\pi D \pi) + v_4 \frac{1}{2} (\pi \bar{D} \pi) (\pi D \pi) \pi^2 + \dots \\
&\quad + v_1 m_B (\pi^2)^2 + v_3 m_B (\pi^2)^3 + \dots
\end{aligned} \tag{7.30}$$

mit

$$v_0 = 1 \tag{7.31}$$

$$v_1 = \frac{1}{8} \tag{7.32}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \tag{7.33}$$

$$v_3 = \frac{1}{16} \tag{7.34}$$

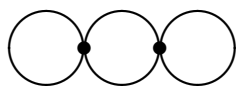
$$v_4 = \frac{1}{2} . \tag{7.35}$$

Auch hierfür sind im Anhang die divergenten Anteile der zugehörigen Graphen angegeben.

7.4 Konsistenztest für die Zahl der Graphen

Bei einer so großen Anzahl von Graphen kann man leicht den einen oder anderen vergessen. Für die 3-Loop-Rechnung wurde deshalb folgender Konsistenztest durchgeführt: Betrachten wir zwei unterscheidbare Vertices V_1 und V_2 mit jeweils 4 Beinen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, daraus einen Einteilchen-irreduziblen Graphen zu bilden? 2 Typen von Graphen sind möglich:

Typ 1:  : $4! = 24$ Stück (7.36)

Typ 2:  : $\binom{4}{2}^2 = 72$ Stück (7.37)

Zusammen sind das 96 Graphen. Wir sollten deshalb genau 96 Graphen proportional zu $v_1 v_2$ finden. Sind V_1 und V_2 ununterscheidbar, sollte sich diese Zahl auf $\frac{96}{2} = 48$ reduzieren. Dieser Fall ist für die Graphen proportional zu v_1^2 oder v_2^2 gegeben. Wir können diese Vorhersagen im Anhang explizit überprüfen, sofern wir dort $n = 1$ setzen. Für einen 6-Punkt-Vertex gibt es genau $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ Möglichkeiten, einen Graphen zu bilden. Auch diese Zahl finden wir im Anhang bestätigt.

7.5 Bestimmung von $\beta(t_R)$ und $\zeta(t_R)$

Insgesamt erhalten wir für die freie Energie bis zur 3. Ordnung in t_B die folgenden Resultate:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{Bos}^{(3)}(t_B, H_B) = & \frac{H_B}{t_B} + \frac{nH_B^{1+\varepsilon/2}}{\varepsilon(2+\varepsilon)} + \frac{t_B H_B^{1+\varepsilon}(2n-n^2)}{8\varepsilon^2} \\ & + \frac{H_B^{1+3\varepsilon/2} t_B^2 n (20\varepsilon - 20n\varepsilon + 3n^2\varepsilon + 16 - 20n + 12n\varepsilon^2 - 12\varepsilon^2 + 6n^2)}{96\varepsilon^3} \end{aligned} \quad (7.38)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{Susy}^{(3)}(t_B, H_B) = & -\frac{H_B}{t_B} - \frac{nH_B^{1+\varepsilon}}{2\varepsilon(1+\varepsilon)} - \frac{t_B H_B^{1+2\varepsilon}(2n-n^2)}{8\varepsilon^2} \\ & - \frac{H_B^{1+3\varepsilon} t_B^2 n (12\varepsilon - 12n\varepsilon + 3n^2\varepsilon + 8 - 10n + 3n^2)}{48\varepsilon^3} \end{aligned} \quad (7.39)$$

Drücken wir hierin t_B und H_B mittels

$$t_B = \mu^{-\varepsilon} Z_1 t_R \quad (7.40)$$

$$H_B = \frac{Z_1}{\sqrt{Z}} H_R \quad (7.41)$$

durch t_R und H_R aus, so können wir $Z_1(t_R)$ und $Z(t_R)$ aus der Forderung, daß \mathcal{F} endlich sei, extrahieren. Die expliziten Rechnungen sind einfach aber langwierig. Sie wurden mit Hilfe des Computer-Algebra-Systems MAPLE durchgeführt.

Ihr Resultat lautet:

$$Z_{Bos}(t_R) = 1 + \frac{n}{\varepsilon} t_R + \frac{n(2n-1)}{2\varepsilon} t_R^2 + \left(\frac{n(n-2)}{4\varepsilon} + \frac{n(n-1)}{3\varepsilon^2} + \frac{n(2n-1)(3n-2)}{6\varepsilon^3} \right) t_R^3 + O(t_R^4) \quad (7.42)$$

$$Z_{Susy}(t_R) = 1 + \frac{n}{\varepsilon} t_R + \frac{n(2n-1)}{2\varepsilon} t_R^2 + \frac{n(2n-1)(3n-2)}{6\varepsilon^3} t_R^3 + O(t_R^4) \quad (7.43)$$

$$Z_{1,Bos} = 1 + \frac{n-1}{\varepsilon} t_R + \left(\frac{n-1}{2\varepsilon} + \frac{(n-1)^2}{\varepsilon^2} \right) t_R^2 + O(t_R^3) \quad (7.44)$$

$$Z_{1,Susy} = 1 + \frac{n-1}{\varepsilon} t_R + \frac{(n-1)^2}{\varepsilon^2} t_R^2 + O(t_R^3) \quad (7.45)$$

Die β - und ζ -Funktionen ergeben sich aus (6.87) und (6.88):

$$\beta_{Bos}(t_R) = \varepsilon t_R + (1-n)t_R^2 + (1-n)t_R^3 + O(t_R^4) \quad (7.46)$$

$$\beta_{Susy}(t_R) = \varepsilon t_R + (1-n)t_R^2 + O(t_R^4) \quad (7.47)$$

$$\zeta_{Bos}(t_R) = n t_R + \frac{3}{4} n(n-1) t_R^3 + O(t_R^4) \quad (7.48)$$

$$\zeta_{Susy}(t_R) = n t_R + O(t_R^4) \quad (7.49)$$

Auffallend ist, daß die supersymmetrischen Funktionen zwar dieselben Anfangsglieder haben wie die bosonischen, daß aber die Terme proportional zu t_R^3 identisch verschwinden.

7.6 Konsistenztest für die Renormierungskonstanten

Aufgrund der großen Anzahl an Graphen ist es wichtig, einen Konsistenztest für die Richtigkeit des Renormierungs-Verfahrens durchzuführen.

In die explizite Bestimmung der Renormierungskonstanten Z und Z_1 geht wesentlich die Tatsache ein, daß unser Renormierungsschema massenskalen-, also μ -unabhängig ist. Wir erhalten deshalb aus der Forderung, daß die freie Energie endlich sei, 10 statt der 5 Gleichungen, die notwendig sind, um $Z(t_R)$ bis zur 3. und $Z_1(t_R)$ bis zur 2. Ordnung in t_R zu bestimmen. Die übrigen 5 Gleichungen müssen daher identisch erfüllt sein und ermöglichen einen hochsensiblen Konsistenztest. Einen weiteren Konsistenztest können wir anhand der β - und ζ -Funktionen vornehmen. Diese müssen wegen (6.83) endlich sein. Auch dieser Test ist überaus sensitiv.

Ohne Beweis sei erwähnt, daß die Endlichkeit der Renormierungsgruppenfunktionen den t' Hooftschen Polgleichungen [24] entspricht. Nach t' Hooft enthalten bereits die Terme proportional $\frac{1}{\varepsilon}$ sämtliche Informationen. Wir sehen diese Eigenschaft explizit, wenn wir die β - oder ζ -Funktion mit allgemeinen Z -Faktoren berechnen.

Kapitel 8

Renormierung von polynomialen Operatoren in π und σ

Dieses Kapitel behandelt die Renormierung von polynomialen Operatoren in π und σ . Im Englischen werden sie als „soft operators“ bezeichnet. Sie sind relevante Operatoren. (Vgl. [7], [17], [28] und Abschnitt 6.4.)

Wir hatten in Abschnitt 6.3 gesehen, daß wir zum masselosen nichtlinearen Sigma-Modell einen Term

$$\int \sigma_B H_B \equiv \int \sqrt{1 - \pi_B^2} H_B = \sqrt{1 - Z\pi_R^2} \frac{Z_1}{\sqrt{Z}} H_R \quad (8.1)$$

hinzuaddieren konnten, der sich multiplikativ renormieren ließ, d.h.

$$H_B = \frac{Z_1}{\sqrt{Z}} H_R . \quad (8.2)$$

Setzen wir $H_B = t_B c_{\sigma,B}$, so renormiert sich unsere neue Quelle $c_{\sigma,B}$ wie

$$c_{\sigma,B} = \frac{1}{\sqrt{Z}} c_{\sigma,R} . \quad (8.3)$$

Nun werden sich beliebige Polynome in π und σ im allgemeinen nicht mehr multiplikativ renormieren lassen. Vielmehr werden sie bei der Renormierung untereinander mischen. Koppeln wir die neuen Polynome gemäß

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} - c_{i,B} t_B \int p_i , \quad (8.4)$$

so werden die zugehörigen Quellen durch eine Matrix Z_{ik} renormiert:

$$c_{i,B} = \sum_k Z_{ik} c_{k,B} \quad (8.5)$$

Die Feldrenormierung ist nach wie vor durchzuführen.

Wie läßt sich ein Mischen verhindern? Das masselose nichtlineare Sigma-Modell ist $O(N)$ -symmetrisch. Bei der Renormierung sollten deshalb nur Polynome in π und σ mischen, die zur selben irreduziblen Darstellung der $O(N)$ gehören. Das explizite Renormierungsschema bricht nun die $O(N)$ -Invarianz dadurch, daß es σ durch π ausdrückt. Wir erwarten deshalb, daß nur die Polynome in π und σ mischen, die

1. zur selben irreduziblen Darstellung gehören
2. $O(N - 1)$ -invariant sind.

Diese zwei Bedingungen legen für jede irreduzible Darstellung genau ein Polynom fest, das deshalb multiplikativ renormiert werden kann. Bevor wir die explizite Rechnung durchführen, müssen wir einige Sätze über harmonische Polynome wiederholen. Ein funktionalanalytischer Zugang findet sich bei Triebel [25].

Seien $\{x_1, \dots, x_N\}$ kartesische Koordinaten im \mathbb{R}^N , so bildet die Menge aller Elementarpolynome e_i , d.h. aller Produkte in den x_i , eine vollständige Basis für die analytischen Funktionen auf dem \mathbb{R}^N . Diese lassen sich nach ihrem Grad ordnen: Ein Polynom p_l nennen wir homogen vom Grad l , wenn $p_l(kx_1, \dots, kx_N) = k^l p_l(x_1, \dots, x_N)$.

Betrachten wir die Sphäre $S^{N-1}(r) \subset \mathbb{R}^N$ mit Radius r um den Ursprung, so lassen sich alle auf $S^{N-1}(r)$ analytischen Funktionen durch die Restriktionen der e_i auf die Sphäre darstellen. Allerdings sind diese übervollständig. Nehmen wir stattdessen eine Basis für die harmonischen Polynome h_i des \mathbb{R}^N , das sind Polynome mit $\Delta h_i = 0$, so bilden deren Restriktionen auf die Kugel eine vollständige Basis für die analytischen Funktionen auf $S^{N-1}(r)$ [25]. In Kugelkoordinaten $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_{N-1}, r\}$, $\vartheta_i \in S^{N-1}(r)$, r Radialkomponente, kann der Laplace-Operator als

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta_i} f + \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} f \quad (8.6)$$

geschrieben werden [14]. Untersuchen wir ein harmonisches Polynom, das homogen vom Grad l ist:

$$h_l(x_1, \dots, x_N) = r^l \tilde{h}_l(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{N-1}) . \quad (8.7)$$

Wir erhalten so

$$\begin{aligned} 0 = \Delta h_l &= r^{l-2} \Delta_{\vartheta_i} \tilde{h}_l + \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} r^l \tilde{h}_l \\ &= r^{l-2} \Delta_{\vartheta_i} \tilde{h}_l + l(l + N - 2) r^{l-2} \tilde{h}_l \end{aligned} \quad (8.8)$$

bzw.

$$L^2 h_l = l(l + N - 2) h_l , \quad (8.9)$$

wobei wir zur Abkürzung

$$L^2 := -\frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta_i} \quad (8.10)$$

eingeführt haben. L^2 wird in der Quantenmechanik als Operator des Drehimpulsquadrates eingeführt. In der Mathematik firmiert er unter dem Namen Beltrami-Operator zweiter Art. Seine Eigenfunktionen zum Eigenwert $l(l + N - 2)$ nennen wir abkürzend Eigenfunktionen zum Drehimpuls l . Wir suchen nun alle harmonischen Polynome, die homogen vom Grade l sind, deren Einschränkungen auf die Kugel also Eigenfunktionen zum Drehimpuls l sind, und die $O(N - 1)$ -invariant bzgl. der durch σ ausgezeichneten Achse sind. Der allgemeine Ansatz hierfür lautet:

$$h_l = \sigma^l + c_{l-2} \sigma^{l-2} \pi^2 + c_{l-4} \sigma^{l-4} (\pi^2)^2 + c_{l-6} \sigma^{l-6} (\pi^2)^3 + \dots \quad (8.11)$$

Wegen ¹

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma^p(\pi^2)^q) &= (\Delta\sigma^p)(\pi^2)^q + \sigma^p\Delta(\pi^2)^q \\ &= p(p-1)\sigma^{p-2}(\pi^2)^q + 2q(n+2q-2)\sigma^p(\pi^2)^{q-2}\end{aligned}\quad (8.12)$$

gilt:

$$\begin{aligned}0 = \Delta h_l &= l(l-1)\sigma^{l-2} + \\ &\quad c_{l-2}2n\sigma^{l-2} + c_{l-2}(l-2)(l-3)\sigma^{l-4}(\pi^2) + \\ &\quad c_{l-4}4(n+2)\sigma^{l-4}(\pi^2)^2 + c_{l-4}(l-4)(l-5)\sigma^{l-6}(\pi^2)^2 + \\ &\quad c_{l-6}6(n+4)\sigma^{l-6}(\pi^2)^2 + c_{l-6}(l-6)(l-7)\sigma^{l-8}(\pi^2)^3 + \\ &\quad \dots\end{aligned}\quad (8.13)$$

Daraus folgt:

$$c_{l-2} = -\frac{l(l-1)}{2n}\quad (8.14)$$

$$c_{l-4} = -\frac{(l-2)(l-3)}{4(n+2)}c_{l-2} = \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{8n(n+2)}\quad (8.15)$$

$$c_{l-6} = -\frac{(l-4)(l-5)}{6(n+4)}c_{l-4} = -\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)(l-4)(l-5)}{48n(n+2)(n+4)}\quad (8.16)$$

⋮

Allerdings müssen wir, um die Störungsentwicklung explizit durchführen zu können, σ wieder durch π ausdrücken:

$$\begin{aligned}h_l &= \sigma^l + c_{l-2}\sigma^{l-2}\pi^2 + c_{l-4}\sigma^{l-4}(\pi^2)^2 + c_{l-6}\sigma^{l-6}(\pi^2)^3 + \dots \\ &= \dots \\ &= 1 - \frac{l(l+n-1)}{2n}\pi^2 + \frac{l(l-2)(n+l+1)(n+l-1)}{8n(n+2)}(\pi^2)^2 \\ &\quad - \frac{l(l-2)(l-4)(n+l+3)(n+l+1)(n+l-1)}{48n(n+2)(n+4)}(\pi^2)^3 + \dots \\ &=: 1 + g_2(l)\pi^2 + g_4(l)(\pi^2)^2 + g_6(l)(\pi^2)^3 + \dots\end{aligned}\quad (8.17)$$

Das so eindeutig bestimmte Polynom h_l addieren wir als Störung zu unseren Hamilton-Funktionen

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} - ct_B \int h_l, \quad (8.18)$$

führen die Störungsentwicklung für die freie Energie durch und sammeln die Terme linear in c . (Die Summe der Terme proportional zu c^0 ist die freie Energie, die wir in Abschnitt 7 berechnet und renormiert hatten.) Betrachten wir (8.17), so sehen wir, daß 3 verschiedene Arten von Termen beitragen:

1. ein Term c

¹Wir verwenden der Einfachheit halber wieder $n = N - 1$.

2. Terme, die aus der Ersetzung von $\frac{1}{2}H_B\pi^2 \rightarrow \frac{1}{2}\left(H_B + c\frac{l(l+n-1)}{n}\right)\pi^2$ herrühren. Diese kann man dadurch berechnen, daß man $c\frac{l(l+n-1)}{2n}\pi^2$ als zusätzliche Wechselwirkung auffaßt und die Störungsrechnung mit diesem Zusatzterm durchführt. Diese Prozedur ist einfach aber umständlich.

Untersuchen wir stattdessen einen typischen bosonischen Graphen:

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{m_B^2}{m_B^2 + k^2} = -\frac{f}{\varepsilon} m_B^{2+\varepsilon} \quad (8.19)$$

Er ist zu ersetzen durch

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{m_B^2}{\left(m_B^2 + c\frac{l(l+n-1)}{n}\right) + k^2} &= -\frac{f}{\varepsilon} m_B^2 \left(m_B^2 + c\frac{l(l+n-1)}{n}\right)^{\varepsilon/2} \\ &= -\frac{f}{\varepsilon} m_B^\varepsilon \left(m_B^2 + c\frac{\varepsilon}{2} \frac{l(l+n-1)}{n} + O(c^2)\right). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Die Verallgemeinerung für höhere Ordnungen ist trivial. Aufpassen muß man allerdings bei Graphen mit Ableitungskopplung:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-k^2}{k^2 + m_B^2} \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{m_B^2}{k^2 + m_B^2} = \frac{-f}{\varepsilon} m_B^{2+\varepsilon} \\ &\rightarrow \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-k^2}{k^2 + \left(m_B^2 + c\frac{l(l+n-1)}{n}\right)} \\ &\equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{m_B^2 + c\frac{l(l+n-1)}{n}}{k^2 + \left(m_B^2 + c\frac{l(l+n-1)}{n}\right)} \\ &= -\frac{f}{\varepsilon} m_B^{2+\varepsilon} \left(1 + \frac{c}{m_B^2} \frac{l(l+n-1)}{n}\right)^{1+\varepsilon/2} \\ &= -\frac{f}{\varepsilon} m_B^\varepsilon \left(m_B^2 + c\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{l(l+n-1)}{n} + O(c^2)\right) \end{aligned} \quad (8.21)$$

Ein analoges Resultat gilt im supersymmetrischen Fall.

3. Terme aus $g_4(\pi^2)^2$ und $g_6(\pi^2)^3$. Auch diese Terme wurden schon berechnet. Für sie sind im Anhang v_1 durch $(v_1 + cg_4)$ und v_3 durch $(v_3 + cg_6)$ zu ersetzen und anschließend die in c linearen Terme zu extrahieren.

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{F}_{Bos} = & 1 + \frac{l(l+n-1)}{2\varepsilon} m_B^\varepsilon t_B \\
& + \left(\frac{l(l+n-1)(nl-2n+l^2-l+2)}{8\varepsilon^2} + \frac{l(l+n-1)(n+6)}{8\varepsilon} \right) m_B^{2\varepsilon} t_B^2 \\
& + \left(\frac{l(l+n-1)(nl-2n+l^2-l+2)(nl-4n+l^2-l+4)}{48\varepsilon^3} \right. \\
& \quad + \frac{l(l+n-1)(3ln^2-12n^2-61n+3l^2n+15nl+18l^2-18l+46)}{48\varepsilon^2} \\
& \quad \left. + \frac{3l(l+n-1)(n+6)^2}{64\varepsilon} \right) m_B^{3\varepsilon} t_B^3
\end{aligned} \tag{8.22}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta\mathcal{F}_{Susy} = & 1 + \frac{l(l+n-1)}{2\varepsilon} m_B^\varepsilon t_B \\
& + \left(\frac{l(l+n-1)(nl-2n+l^2-l+2)}{8\varepsilon^2} - \frac{l(l+n-1)(n-2)}{4\varepsilon} \right) m_B^{2\varepsilon} t_B^2 \\
& + \left(\frac{l(l+n-1)(nl-2n+l^2-l+2)(nl-4n+l^2-l+4)}{48\varepsilon^3} \right. \\
& \quad - \frac{l(l+n-1)(n-2)(nl-3n+l^2-l+3)}{8\varepsilon^2} \\
& \quad \left. + \frac{3l(l+n-1)(n-2)^2}{16\varepsilon} \right) m_B^{3\varepsilon} t_B^3
\end{aligned} \tag{8.23}$$

Verwenden wir die Renormierung der Felder und der Temperatur aus Kapitel 7, so können wir wie dort Z_l extrahieren:

$$\begin{aligned}
Z_{l,Bos} = & 1 - \frac{l(l+n-1)}{2\varepsilon} t_R + \frac{l(l+n-1)(nl-2n+2+l^2-l)}{\varepsilon^2} t_R^2 \\
& - \left(\frac{l(n-1)(l+n-1)}{8\varepsilon} + \frac{l(n+1)(l+n-1)}{6\varepsilon^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{l(l+n-1)(nl-2n+2+l^2-l)(nl-4n+4-l+l^2)}{48\varepsilon^3} \right) t_R^3
\end{aligned} \tag{8.24}$$

$$\begin{aligned}
Z_{l,Susy} = & 1 - \frac{l(l+n-1)}{2\varepsilon} t_R + \frac{l(l+n-1)(nl-2n+2+l^2-l)}{\varepsilon^2} t_R^2 \\
& - \frac{l(l+n-1)(nl-2n+2+l^2-l)(nl-4n+4-l+l^2)}{48\varepsilon^3} t_R^3
\end{aligned} \tag{8.25}$$

Die zugehörigen ζ -Funktionen

$$\zeta_l := \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \bigg|_B \ln Z_l = \beta(t_R) \frac{\partial}{\partial t_R} \ln Z_l(t_R) \tag{8.26}$$

lauten:

$$\zeta_{l,Bos} = -\frac{l(l+n-1)}{2}t_R - \frac{3l(n-1)(l+n-1)}{8}t_R^3 + O(t_R^4) \quad (8.27)$$

$$\zeta_{l,Susy} = -\frac{l(l+n-1)}{2}t_R + O(t_R^4) \quad (8.28)$$

Es wurden im übrigen dieselben Konsistenztests durchgeführt wie in Kapitel 7. Interessant ist insbesondere das Ergebnis für $l = 1$:

$$\zeta_{1,Bos} = -\frac{n}{2}t_R - \frac{3n(n-1)}{8}t_R^3 + O(t_R^4) \quad (8.29)$$

$$\zeta_{1,Susy} = -\frac{n}{2}t_R + O(t_R^4) \quad (8.30)$$

Es stimmt bis auf einen Faktor $-\frac{1}{2}$ mit den ζ -Funktionen (7.48) und (7.49) überein. Das liegt daran, daß wegen (8.3) und (8.18)

$$Z_l|_{l=1} = \frac{1}{\sqrt{Z}}. \quad (8.31)$$

Man vergleiche Fußnote 6 auf Seite 53.

Eine Einschränkung muß in diesem Zusammenhang allerdings gemacht werden: Unsere Ausführungen liefern keinen Beweis dafür, daß h_l überhaupt renormiert werden kann. Bewiesen wurde dies nur für h_1 .

Ein weiterer Punkt soll nicht unerwähnt bleiben: Die Renormierbarkeit der h_1 -Einschiebung wurde im supersymmetischen Fall für beliebige Quellen $c(x, \theta)$ bewiesen. Benutzt man deshalb statt $m_B \rightarrow m_B + c$, $c \ll m_B$ die Ersetzung $m_B \rightarrow m_B + c\delta^2(\theta)$, $c \ll m_B$, so ist das Modell nach wie vor renormierbar. Die Beiträge proportional zu c aus $(\ln \mathcal{Z})/V$ sind gerade die Änderung der freien Energie \mathcal{F}_{Susy} für den Einschub h_1 . Der logische Vorteil dieser Methode ist, daß der Term $\delta^2(\theta)$ eine θ -Integration weghebt und diese nicht mehr von Hand weggelassen werden muß. Die Methode läßt sich für alle h_l verwenden.

Kapitel 9

Verallgemeinerungen

Der Beweis der Renormierbarkeit des nichtlinearen Sigma-Modells wurde bei Anwesenheit eines Termes $H_B \sigma$ in der Hamiltonfunktion geführt. Es stellt sich die Frage, ob eine Infrarot-Regularisierung nicht auch mit einem anderen harmonischen Polynom h_l aus Kapitel 8 möglich ist. Um diese Frage zu beantworten, ersetzt man \mathcal{H}_{Susy} in Gleichung (7.30) durch

$$\mathcal{H}_{Susy} = -\frac{1}{2} \int d^d x d^2 \theta \frac{1}{2} \bar{D} \pi D \pi + \frac{1}{2} \bar{D} \sigma D \sigma + \frac{1}{g_2(l)} H_B h_l(\pi^2) , \quad (9.1)$$

wobei (vgl. (8.17))

$$h_l(\pi^2) = 1 + g_2(l) \pi^2 + g_4(l) (\pi^2)^2 + g_6(l) (\pi^2)^3 + \dots . \quad (9.2)$$

Der Faktor vor $H_B h_l(\pi^2)$ wurde so gewählt, daß sich dieselbe freie Hamiltonfunktion und damit derselbe freie Propagator ergeben wie in (4.41). Ändert man v_0 (7.31), v_1 (7.32) und v_3 (7.34) entsprechend ab, so lassen sich wieder die freie Energie und daraus die β - und ζ -Funktionen berechnen. Betrachten wir speziell den supersymmetrischen Fall. Während sich Z_1 und die β -Funktion nicht ändern, geht Z über in

$$\begin{aligned} Z_{Susy} = 1 + \frac{l(l+n-1)}{\varepsilon} t_R + \frac{l(l+n-1)(nl+n-1-l+l^2)}{2\varepsilon^2} t_R^2 \\ + \frac{l(l+n-1)(nl+n-1-l+l^2)(nl+2n-2-l+l^2)}{6\varepsilon^3} t_R^3 \end{aligned} \quad (9.3)$$

und ζ_{Susy} in

$$\zeta_{Susy} = l(l+n-1) t_R + O(t_R^4) . \quad (9.4)$$

Hierdurch wird die freie Energie endlich, d.h. die freie Energie ist – zumindest in 3-Loop-Ordnung – mit beliebigen harmonischen Polynomen als Infrarot-Regularisator renormierbar. Das Ergebnis (9.4) stimmt mit (8.28) überein, wenn man die unterschiedliche Definition der ζ -Funktionen – vgl. Fußnote 6 auf Seite 53 und Kapitel 8 – berücksichtigt. Diese Eigenschaft ist sehr hilfreich, will man die Ergebnisse auf andere nichtlineare Sigma-Modelle verallgemeinern. Es gilt der folgende

Satz 9.1 *Die ζ -Funktion in n -Loop-Ordnung ist durch den Term proportional $H_B t_B^{n-1}/\varepsilon$ in \mathcal{F} vollständig bestimmt. Insbesondere verschwindet sie, wenn der Term aus \mathcal{F} Null ist.*

Der Beweis ergibt sich aus den folgenden zwei Lemmata:

Lemma 9.2 *Der Term proportional t_R^n aus der ζ -Funktion ist durch den Term proportional t_R^n/ε in $Z(t_R)$ vollständig bestimmt. Verschwindet der Term in $Z(t_R)$, so auch der Term in $\zeta(t_R)$.*

Beweis: Sei $\beta(t_R) = \varepsilon t_R + a(t_R)$ und $Z(t_R) = 1 + c_1(t_R)/\varepsilon + c_2(t_R)/\varepsilon^2 + \dots$, $a(t_R)$ und $c_i(t_R)$ ε -unabhängig. Dann ist

$$\begin{aligned}\zeta(t_R) &= \beta(t_R) \frac{\partial}{\partial t_R} \ln Z(t_R) \\ &= (\varepsilon t_R + a(t_R)) \frac{\partial}{\partial t_R} \left(1 + \frac{c_1(t_R)}{\varepsilon} + \frac{c_2(t_R)}{\varepsilon^2} + \dots \right) \bigg/ \left(1 + \frac{c_1(t_R)}{\varepsilon} + \frac{c_2(t_R)}{\varepsilon^2} + \dots \right) \\ &= t_R \frac{\partial}{\partial t_R} c_1(t_R) ,\end{aligned}$$

da Terme proportional $1/\varepsilon^n$, $n > 0$ verschwinden müssen. \square

Lemma 9.3 *Der Term proportional t_R^n/ε in $Z(t_R)$ ist eindeutig durch den Term proportional t_B^{n-1}/ε in \mathcal{F} bestimmt. Verschwindet der Term in \mathcal{F} , so verschwindet auch der Term in $Z(t_R)$.*

Beweis: Entwickeln wir \mathcal{F} in eine Laurent-Reihe in ε und betrachten den Term proportional $H_R t_R^{n-1}/\varepsilon$. Um ihn zu bestimmen, muß \mathcal{F} bis zur Ordnung t_B^{n-1} berechnet werden¹. Beiträge liefert der Term proportional zu

$$\frac{H_B}{t_B} = \mu^\varepsilon \frac{H_R}{t_R} \frac{1}{\sqrt{Z(t_R)}} = \mu^\varepsilon \frac{H_R}{t_R} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c_1(t_R)}{\varepsilon} + \dots \right)$$

und der Term proportional zu

$$H_B^{1+n\varepsilon} t_B^{n-1} \frac{1}{\varepsilon} = \mu^\varepsilon H_R t_R^{n-1} \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O\left(\ln \frac{H_R}{\mu}\right) \right) .$$

Alle anderen Terme sind entweder von zu hoher Ordnung in $1/\varepsilon$ oder proportional zu $\ln(H_R/\mu)$. \square

In dieser Arbeit wurde ein N -Vektor-Modell, also ein nichtlineares Sigma-Modell mit einer $O(N)$ -Symmetrie, diskutiert. Untersucht man Parametrisierungen *anderer* nichtlinearer Sigma-Modelle mit Symmetrie-Gruppe S , so kann man feststellen:

1. Der freie Propagator stimmt bis auf Symmetrie-Gruppen-abhängige Größen mit dem in dieser Arbeit verwendeten freien Propagator überein.
2. Die Struktur der Wechselwirkungsterme ist bis auf Symmetrie-Gruppen-abhängige Größen dieselbe wie in dieser Arbeit.

¹Für die explizite Form von \mathcal{F} vgl. z.B. (7.39).

Erfüllt sind diese Bedingungen zumindest für Matrix-Modelle, vgl. [17]. Für diese Modellklasse gilt:

Satz 9.4

$$\zeta_{Susy}(t_R) = at_R + O(t_R^4) , \quad a \in \mathbb{R}$$

Beweis: Aus dem Anhang ist ersichtlich, daß *kein* 2-Loop- und *kein* 3-Loop-Graph einen Term proportional zu $1/\varepsilon$ zur freien Energie beiträgt. Satz 9.1 liefert dann für die angegebene Klasse nichtlinearer Sigma-Modelle das gewünschte Ergebnis. \square

Dieser Satz läßt sich unter denselben Bedingungen noch verschärfen zu

Satz 9.5 *Sei $\zeta_{Bos} = at_R + O(t_R^2)$. Dann gilt:*

$$\zeta_{Susy} = at_R + O(t_R^4)$$

Beweis: Zur freien Energie in 1-Loop-Ordnung trägt genau ein Graph – vgl. z.B. (7.21) – bei. Wegen Satz 9.4 ist es deshalb hinreichend, die Behauptung für *ein* nichtlineares Sigma-Modell, bei dem die ζ -Funktion in 1-Loop-Ordnung nicht verschwindet, zu beweisen. Das ist in dieser Arbeit geschehen, vgl. (7.48) und (7.49). \square

Kapitel 10

Zusammenfassung und Ausblick

Das Renormierungsverhalten des bosonischen und des supersymmetrischen nichtlinearen Sigma-Modells wurde an Hand eines N -Vektor-Modells verglichen. Neben der Renormierungs- β -Funktion in 2-Loop-Ordnung, Gleichung (7.47), verschwindet im supersymmetrischen Fall im Gegensatz zum bosonischen Fall auch die Renormierungs- ζ -Funktion in 3-Loop-Ordnung, Gleichung (7.49). Analog verschwindet die Renormierungs- ζ -Funktion für polynomiale Operatoren in den Feldern π und σ , sog. „Soft Operators“, Gleichung (8.28). Dieses Verhalten findet man auch bei anderen supersymmetrischen nichtlinearen Sigma-Modellen, vgl. Kapitel 9.

Damit konnte das Problem der Renormierung polynomialer Operatoren in den Feldern in dritter Ordnung der Störungstheorie abschließend behandelt werden.

Auffallend ist, daß das supersymmetrische Modell, obwohl – oder vielleicht besser weil – es mehr Freiheitsgrade enthält, ein einfacheres Renormierungsverhalten zeigt als das bosonische Modell. Im bosonischen Modell findet man, daß der Fixpunkt der Renormierungsgruppentransformation instabil unter Störungen durch Operatoren mit vielen Gradienten wird [29]. Es wäre deshalb interessant zu untersuchen, ob diese Instabilität auch im supersymmetrischen Fall auftritt.

Anhang A

Das Integral $I(l)$

Für die dimensionelle Regularisierung in $d = 2 + \varepsilon$ Dimensionen benötigt man das Integral:

$$\begin{aligned} I(l) &:= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m^2)^l} \\ &= \frac{\Omega^d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dk k^{d-1} \frac{1}{(k^2 + m^2)^l} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Hierbei ist

$$\Omega^d = 2 \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (\text{A.2})$$

der Flächeninhalt der Oberfläche einer d -dimensionalen Kugel. Nach einigen Umformungen erhält man¹:

$$\begin{aligned} I(l) &= \frac{\Omega^d}{2(2\pi)^d} m^{d-2l} \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{d-2}{2}}}{(1+x)^l} \\ &= \frac{\Omega^d}{2(2\pi)^d} m^{d-2l} B\left(\frac{d}{2}, l - \frac{d}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^d}{\Gamma(\frac{d}{2}) (2\pi)^d} m^{d-2l} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(l - \frac{d}{2})}{\Gamma(l)} \\ &= m^{2l-1+\varepsilon} \frac{\Gamma(-\frac{\varepsilon}{2} + l - 1)}{2\Gamma(l) \Gamma(1 - \frac{\varepsilon}{2})} f, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} f &= \frac{\Omega(d)}{(2\pi)^d} \Gamma\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (2\sqrt{\pi})^{-\varepsilon} \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Man erhält damit:

$$I(1) = -\frac{1}{\varepsilon} m^\varepsilon f \quad (\text{A.4})$$

¹Für die Definition der B - und Γ -Funktion vgl. [2]

$$I(2) = \frac{1}{2} m^{-2+\varepsilon} f \tag{A.5}$$

$$I(3) = \frac{1}{4} m^{-4+\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) f \tag{A.6}$$

$$I(4) = \frac{1}{6} m^{-6+\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) f \tag{A.7}$$

Anhang B

Beispiele supersymmetrischer Graphen

Unter Vernachlässigung etwaiger Symmetriefaktoren gilt:

$$\text{Diagram: a circle with a vertical line passing through its center, with a dot at the intersection} = -\frac{t}{\varepsilon} m^\varepsilon f \quad (\text{B.1})$$

Beweis: Der angegebene Graph ist¹:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \prec \pi^*(k, \theta') \pi(k, \theta) \succ \Big|_{\theta=\theta'} \\ &= -t \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) \Big|_{k, \theta} \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta=\theta'}}_{-1} \frac{1}{k^2 + m^2} \\ &= t \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m^2} \\ &= -\frac{t}{\varepsilon} m^\varepsilon f \end{aligned}$$

$$\text{Diagram: a circle with a vertical line passing through its center, with a dot at the intersection and a small vertical tick mark on the line} = 0 \quad (\text{B.2})$$

Beweis: vgl. (2.152) ff..

$$\text{Diagram: a circle with a vertical line passing through its center, with a dot at the intersection and two small vertical tick marks on the line} = \frac{t}{\varepsilon} m^{1+\varepsilon} f \quad (\text{B.3})$$

¹ $\prec \dots \succ$ bedeutet den Erwartungswert, bei dem die Impulserhaltung schon ausgenutzt wurde.

Beweis:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \prec \frac{1}{2} \bar{D}_\alpha \big|_{-k, \theta'} \pi^*(k, \theta') D_\alpha \big|_{k, \theta} \pi(k, \theta) \succ \big|_{\theta=\theta'} \\
&= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{2} D_\alpha \big|_{k, \theta} \prec \pi(k, \theta) \pi^*(k, \theta') \succ \bar{D}_\alpha \big|_{-k, \theta'} \right) \big|_{\theta=\theta'} \\
&= -t \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{2} D_\alpha \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) \big|_{k, \theta} \delta^2(\theta - \theta') \bar{D}_\alpha \big|_{-k, \theta'} \right) \big|_{\theta=\theta'} \frac{1}{k^2 + m^2} \\
&= t \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \underbrace{\left(\bar{D}_\alpha \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) D_\alpha \big|_{k, \theta} \delta^2(\theta - \theta') \right) \big|_{\theta=\theta'}}_{-2m} \frac{1}{k^2 + m^2} \\
&= \frac{t}{\varepsilon} m^{1+\varepsilon} f
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \theta \\ \hline \bullet \\ \circ \\ \bullet \\ \hline \theta' \end{array} = -t^2 m^{\varepsilon-1} f \quad (\text{B.4})$$

Wie angedeutet, sollen eventuelle Anhängsel an der Stelle θ' schon kontrahiert sein.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta' \prec \pi^*(k, \theta) \pi(k, \theta') \succ \prec \pi^*(k, \theta') \pi(k, \theta) \succ \\
&= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta' \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \\
&\quad (-t) \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) \big|_{k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') (-t) \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) \big|_{k, \theta} \delta^2(\theta - \theta') \\
&= t^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta' \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \\
&\quad \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) \big|_{k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) \big|_{-k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') \\
&= t^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta' \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right)^2 \big|_{k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') \times \delta^2(\theta - \theta') \\
&= t^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right)^2 \big|_{k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') \big|_{\theta=\theta'}}_{-2m} \\
&= -t^2 m^{\varepsilon-1} f
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \theta \\ \hline \bullet \\ \circ \\ \bullet \\ \hline \theta' \end{array} = t^2 m^\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) f \quad (\text{B.5})$$

Beweis:

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta' \prec \bar{D}_\alpha \pi^*(k, \theta) \pi(k, \theta') \succ \prec D_\alpha \pi(k, \theta) \pi^*(k, \theta') \succ$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta' \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \\
&\quad (-t) \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) \Big|_{k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') (-\bar{D}_\alpha \Big|_{k, \theta}) \\
&\quad (-t) D_\alpha \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) \Big|_{k, \theta} \delta^2(\theta - \theta') \\
&= \frac{1}{2} t^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta' \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \\
&\quad \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) (-\bar{D}_\alpha) \Big|_{k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) (-D_\alpha) \Big|_{-k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') \\
&= -\frac{1}{2} t^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta' \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \bar{D}_\alpha \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right)^2 D_\alpha \Big|_{k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') \times \delta^2(\theta - \theta') \\
&= -\frac{1}{2} t^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \underbrace{\bar{D}_\alpha (-k^2 + m^2 + m \bar{D} D) D_\alpha \Big|_{k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta = \theta'}}_{2(k^2 - m^2)} \\
&= t^2 m^\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) f
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \theta \\ \hline \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \hline \theta' \end{array} = t^2 m^\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) f \quad (\text{B.6})$$

Beweis: Aus Symmetriegründen muß dieser Graph mit dem vorherigen übereinstimmen.

$$\begin{array}{c} \theta \\ \hline \bullet \\ \circlearrowright \\ \bullet \\ \hline \theta' \end{array} = -t^2 m^{1+\varepsilon} \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1 \right) f \quad (\text{B.7})$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta' \prec \bar{D}_\beta \pi(k, \theta') \bar{D}_\alpha \pi^*(k, \theta) \succ \prec D_\alpha \pi(k, \theta) D_\beta \pi^*(k, \theta') \succ \\
&= \frac{1}{4} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta' \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \\
&\quad (-t) \bar{D}_\beta \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) \Big|_{k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') (-\bar{D}_\alpha \Big|_{k, \theta}) \\
&\quad (-t) D_\alpha \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) \Big|_{k, \theta} \delta^2(\theta - \theta') (-\bar{D}_\beta \Big|_{k, \theta'}) \\
&= \frac{t^2}{4} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta' \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \\
&\quad \bar{D}_\beta \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) (-\bar{D}_\alpha) \Big|_{k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') D_\beta \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) D_\alpha \Big|_{-k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') \\
&= \frac{t^2}{4} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^2 \theta' \frac{1}{(k^2 + m^2)^2}
\end{aligned}$$

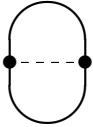
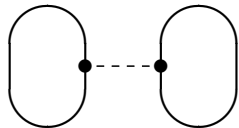
$$\begin{aligned}
& \bar{D}_\alpha \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) \bar{D} D \left(\frac{1}{2} \bar{D} D + m \right) D_\alpha \Big|_{k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') \times \delta^2(\theta - \theta') \\
&= \frac{t^2}{4} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \underbrace{\bar{D}_\alpha \left(m \bar{D} D \frac{1}{2} \bar{D} D + \frac{1}{2} \bar{D} D \bar{D} D m \right) D_\alpha \Big|_{k, \theta'} \delta^2(\theta - \theta') \Big|_{\theta = \theta'}}_{8mk^2} \\
&= -t^2 m^{1+\varepsilon} \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1 \right) f
\end{aligned}$$

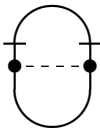
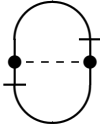
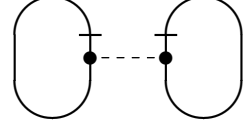
Anhang C

Die Graphen in 2- und 3-Loop-Ordnung

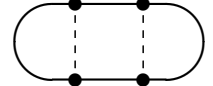
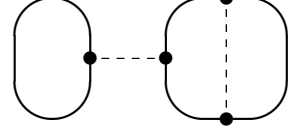
In den untenstehenden Tabellen sind sämtliche Graphen in 2- und 3-Loop-Ordnung aufgelistet. Mit K wird der kombinatorische Faktor bezeichnet. GF steht für „Graphenfaktoren“, das sind die Faktoren, die von den Vertizes herrühren. I_{Bos} bzw. I_{Susy} gibt den Wert des zugehörigen Integrals an. (Vgl. (A.4) und [28].)

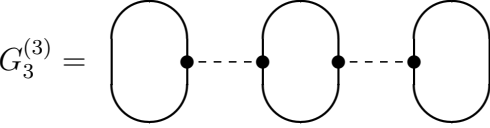
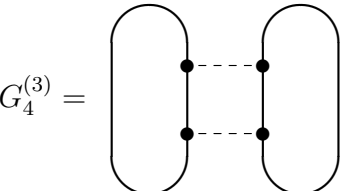
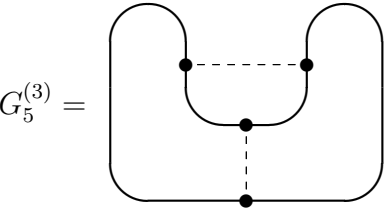
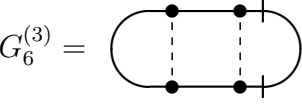
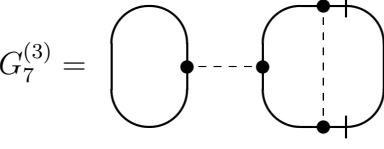
Für die Graphen in 2-Loop-Ordnung gilt:

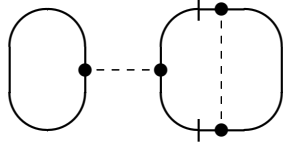
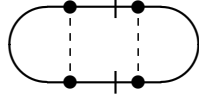
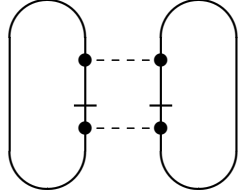
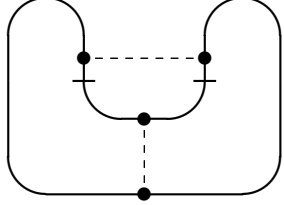
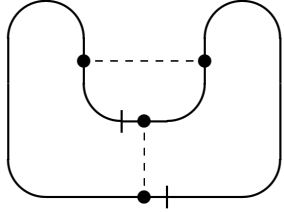
$G_1^{(2)} = $ 	$K = 2n$
	$GF = v_1$
	$I_{Bos} = \frac{1}{\varepsilon^2}$
	$I_{Susy} = \frac{1}{\varepsilon^2}$
$G_2^{(2)} = $ 	$K = n^2$
	$GF = v_1$
	$I_{Bos} = \frac{1}{\varepsilon^2}$
	$I_{Susy} = \frac{1}{\varepsilon^2}$

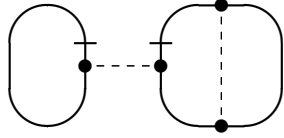
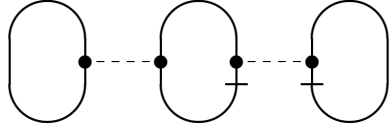
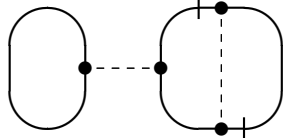
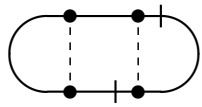
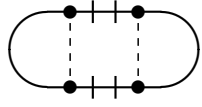
$G_3^{(2)} = $ 	$K = n$
	$GF = v_2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{\varepsilon^2}$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{\varepsilon^2}$
$G_4^{(2)} = $ 	$K = n$
	$GF = v_2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_5^{(2)} = $ 	$K = n^2$
	$GF = v_2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$

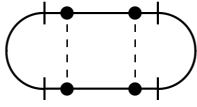
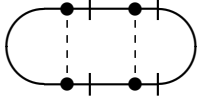
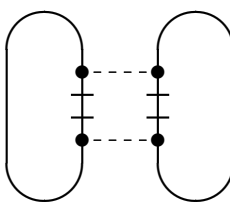
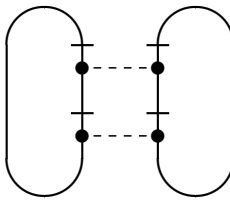
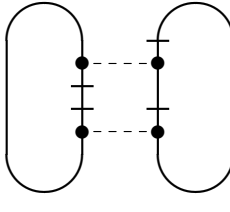
Für die Graphen in 3-Loop-Ordnung gilt:

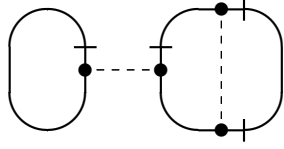
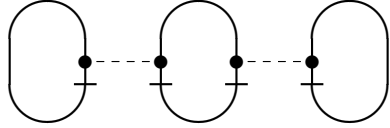
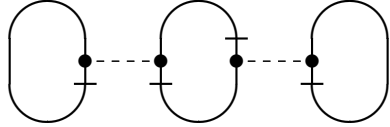
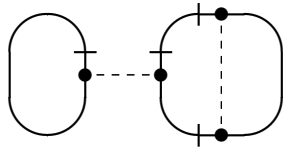
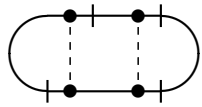
$G_1^{(3)} = $ 	$K = 16n$
	$GF = v_1^2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2}$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{\varepsilon^2}$
$G_2^{(3)} = $ 	$K = 16n^2$
	$GF = v_1^2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2}$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{\varepsilon^2}$

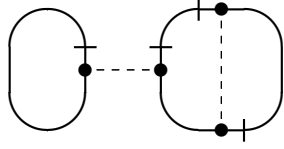
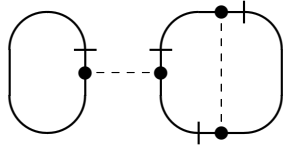
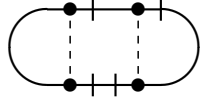
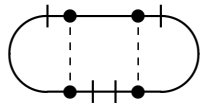
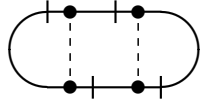
$G_3^{(3)} =$ 	$K = 4n^3$
	$GF = v_1^2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2}$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{\varepsilon^2}$
$G_4^{(3)} =$ 	$K = 4n^2$
	$GF = v_1^2$
	$I_{Bos} = O(\varepsilon^0)$
	$I_{Susy} = O(\varepsilon^0)$
$G_5^{(3)} =$ 	$K = 8n$
	$GF = v_1^2$
	$I_{Bos} = O(\varepsilon^0)$
	$I_{Susy} = O(\varepsilon^0)$
$G_6^{(3)} =$ 	$K = 8n$
	$GF = v_1 v_2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2}$
	$I_{Susy} = \frac{1}{\varepsilon^2}$
$G_7^{(3)} =$ 	$K = 4n^2$
	$GF = v_1 v_2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2}$
	$I_{Susy} = \frac{1}{\varepsilon^2}$

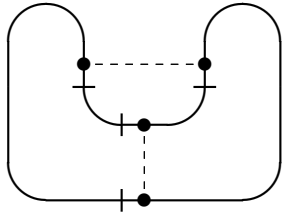
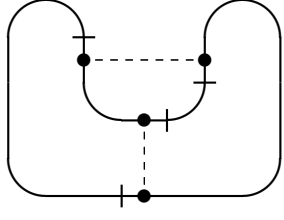
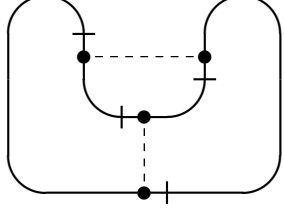
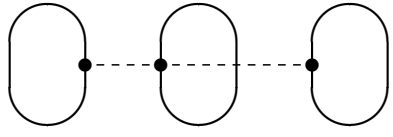
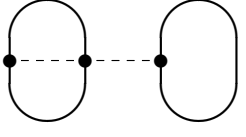
$G_8^{(3)} =$ 	$K = 4n^2$
	$GF = v_1 v_2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^3}$
	$I_{Susy} = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^3}$
$G_9^{(3)} =$ 	$K = 8n$
	$GF = v_1 v_2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^3}$
	$I_{Susy} = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^3}$
$G_{10}^{(3)} =$ 	$K = 8n^2$
	$GF = v_1 v_2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$
	$I_{Susy} = \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$
$G_{11}^{(3)} =$ 	$K = 8n$
	$GF = v_1 v_2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$
	$I_{Susy} = \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$
$G_{12}^{(3)} =$ 	$K = 8n$
	$GF = v_1 v_2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$
	$I_{Susy} = \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$

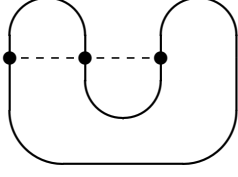
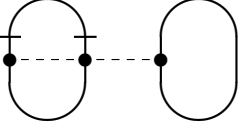
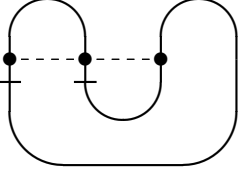
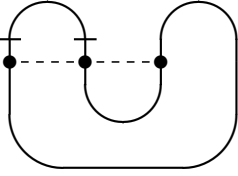
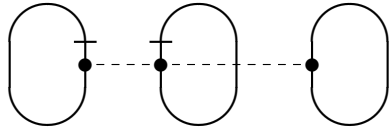
$G_{13}^{(3)} =$ 	$K = 16n$
	$GF = v_1 v_2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{14}^{(3)} =$ 	$K = 8n^3$
	$GF = v_1 v_2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{15}^{(3)} =$ 	$K = 8n^2$
	$GF = v_1 v_2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{16}^{(3)} =$ 	$K = 16n$
	$GF = v_1 v_2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{17}^{(3)} =$ 	$K = n$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2} + 2 \frac{1}{\varepsilon^3}$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{\varepsilon^2} - 2 \frac{1}{\varepsilon^3}$

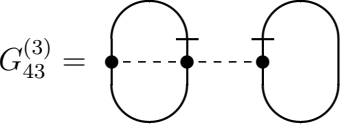
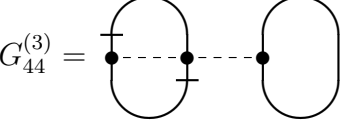
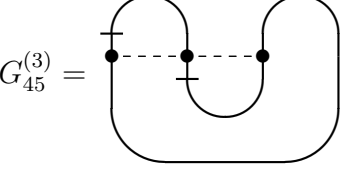
$G_{18}^{(3)} = $ 	$K = n$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2}$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{\varepsilon^2}$
$G_{19}^{(3)} = $ 	$K = 2n$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^3}$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon^3}$
$G_{20}^{(3)} = $ 	$K = n^2$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$
$G_{21}^{(3)} = $ 	$K = n^2$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon^2} + O(\varepsilon^0)$
	$I_{Susy} = O(\varepsilon^0)$
$G_{22}^{(3)} = $ 	$K = 2n^2$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{6} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{6} \frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$

$G_{23}^{(3)} = $ 	$K = 4n^2$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{24}^{(3)} = $ 	$K = 2n^3$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{25}^{(3)} = $ 	$K = 2n^3$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{26}^{(3)} = $ 	$K = 4n^2$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{27}^{(3)} = $ 	$K = 4n$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$

$G_{28}^{(3)} = $ 	$K = 4n^2$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{29}^{(3)} = $ 	$K = 4n^2$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{30}^{(3)} = $ 	$K = 4n$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{31}^{(3)} = $ 	$K = 2n$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{32}^{(3)} = $ 	$K = 2n$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$

$G_{33}^{(3)} =$ 	$K = 6n$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{6} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{6} \frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$
$G_{34}^{(3)} =$ 	$K = n$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^0)$
$G_{35}^{(3)} =$ 	$K = n$
	$GF = v_2^2$
	$I_{Bos} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon^2} + O(\varepsilon^0)$
	$I_{Susy} = O(\varepsilon^0)$
$G_{36}^{(3)} =$ 	$K = n^3$
	$GF = v_3$
	$I_{Bos} = -\frac{1}{\varepsilon^3}$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{\varepsilon^3}$
$G_{37}^{(3)} =$ 	$K = 6n^2$
	$GF = v_3$
	$I_{Bos} = -\frac{1}{\varepsilon^3}$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{\varepsilon^3}$

$G_{38}^{(3)} =$ 	$K = 8n$
	$GF = v_3$
	$I_{Bos} = -\frac{1}{\varepsilon^3}$
	$I_{Susy} = -\frac{1}{\varepsilon^3}$
$G_{39}^{(3)} =$ 	$K = n^2$
	$GF = v_4$
	$I_{Bos} = -\frac{1}{\varepsilon^3}$
	$I_{Susy} = \frac{1}{\varepsilon^3}$
$G_{40}^{(3)} =$ 	$K = 2n$
	$GF = v_4$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{41}^{(3)} =$ 	$K = 2n$
	$GF = v_4$
	$I_{Bos} = -\frac{1}{\varepsilon^3}$
	$I_{Susy} = \frac{1}{\varepsilon^3}$
$G_{42}^{(3)} =$ 	$K = n^3$
	$GF = v_4$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$

$G_{43}^{(3)} = $ 	$K = 4n^2$
	$GF = v_4$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{44}^{(3)} = $ 	$K = n^2$
	$GF = v_4$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$
$G_{45}^{(3)} = $ 	$K = 4n$
	$GF = v_4$
	$I_{Bos} = 0$
	$I_{Susy} = 0$

Anhang D

Verzeichnis der verwendeten Symbole

- N = Anzahl der π und σ -Felder
 n = Dimension der Sphäre, Anzahl der π -Felder, $n = N - 1$
 $d = 2 + \varepsilon$ = Raumdimension
 m_B = nackte Masse,
 m_R = renormierte Masse
 μ = Massenskala
 H_B = nacktes äußeres (Magnet-)Feld,
 $H_B = m_B^2$ (bosonisch), $H_B = m_B$ (supersymmetrisch)
 H_R = renormiertes äußeres Feld
 t_B = nackte Temperatur
 t_R = renormierte Temperatur
 Z = Renormierungskonstante für die Wellenfunktion
 Z_1 = Renormierungskonstante für die Temperatur
 $C^\omega(\mathbb{R}^2)$ = Menge aller analytischen Funktionen auf \mathbb{R}^2
 \mathcal{G} = der von einer Graßmann-Variablen aufgespannte Raum
 \mathcal{H} = Hamiltonfunktion
 \mathcal{F} = freie Energie
 i, j, \dots = Feldindizes ($\pi^i \dots$)
 $\alpha, \beta, \dots, \kappa$ = Spinorindizes
 λ, μ, ν, \dots = Raumindizes
 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ Metrik des \mathbb{R}^2
 $g_{ij}(\varphi)$ = Metrik der Sphäre
 \mathcal{Z} = Zustandssumme
 $\mathcal{W} = \ln \mathcal{Z}$
 Γ = Legendre-Transformierte von \mathcal{W}

$G^{(n)}$ = n -Punkt-Korrelationsfunktion

β = Renormierungs- β -Funktion

ζ = Renormierungs- ζ -Funktion

Literaturverzeichnis

- [1] E. Abers, B. Lee: Gauge Theories, Phys. Rep. 9, Nr. 1 (1973) 1-141
- [2] Abramowitz, Stegun: Pocketbook of Mathematical Functions, Harri-Deutsch-Verlag (1984)
- [3] L. Alvarez-Gaumé, D. Z. Freedman und S. Mukhi: The Background Field Method and The Ultraviolet Structure of the Supersymmetric Nonlinear Sigma-Model, Annals of Physics 134 (1981) 85-109
- [4] D. Amit: Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena, World Scientific (1984)
- [5] F. Berezin: The Method of Second Quantization, Academic Press (1965)
- [6] E. Brézin und J. Zinn-Justin: Spontaneous Breakdown of Continuous Symmetries near two Dimensions, Phys. Rev. B 14 (1976) S. 3110 ff.
- [7] E. Brézin, J. Zinn-Justin und J. C. Le Guillou: Anomalous Dimensions of Composite Operators near two Dimensions for Ferromagnets with $O(n)$ -Symmetry, Phys. Rev. B 14 (1976) S. 4976 ff.
- [8] E. Brézin, J. Zinn-Justin und J. C. Le Guillou: Renormalization of the Nonlinear Sigma-Model in $2 + \varepsilon$ Dimensions, Phys. Rev. D 14 (1976) S. 2615 ff.
- [9] S. Coleman und J. Mandula: All Possible Symmetries of the S-Matrix, Phys. Rev. 159, Nr. 5 (1967) S. 1251 ff.
- [10] Cornwell: Group Theory in Physics, Band 3, Academic Press (1989)
- [11] P. Fayet und S. Ferrara: Supersymmetry, Phys. Rep. 32, Nr. 5 (1976) 249-334
- [12] J. A. Gracey: Probing the Supersymmetric $O(N)$ σ -Model to $O(1/N^2)$: Critical Exponent η , Nucl. Phys. B 348 (1991) 737-756
- [13] M. T. Grisaru A. E. M. van de Ven und D. Zanon: Four-Loop-Divergences-Function for the $N = 1$ Supersymmetric Nonlinear Sigma-Model in two Dimensions, Nucl. Phys. B 277 (1986) 409-428
- [14] D. Gromoll, W. Klingenberg und W. Meyer: Riemannsche Geometrie im Großen, Springer-Verlag (1967)

- [15] R. Haag, J. Lopuszanski und M. Sohnius: All Possible Generators of Supersymmetry of the S-Matrix, Nucl. Phys. B88 (1975) 257 ff.
- [16] S. Hikami und E. Brézin: Three-Loop-Calculations in the Two-Dimensional Nonlinear Sigma-Model, J. Phys. A 11, Nr. 6 (1978) 1141 ff.
- [17] D. Höf, F. Wegner: Calculation of Anomalous Dimensions for the Nonlinear Sigma-Model, Nucl. Phys. B 275 (1986) 561 ff.
- [18] C. Itzykson und J.-M. Drouffe: Statistical Field Theory, Band 1, Cambridge University Press (1989)
- [19] L. D. Landau, I. M. Lifshitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band 2 (Feldtheorie), Akademie-Verlag Berlin (1984)
- [20] S. Ma: Modern Theory of Critical Phenomena, Benjamin Publishers (1976)
- [21] S. Pokorski: Gauge Field Theories, Cambridge University Press (1987)
- [22] A. Salam und J. Strathdee: Feynman-Rules for Superfields, Nucl. Phys. B 86 (1975) 142 ff.
- [23] M. Sohnius: Introducing Supersymmetry, Phys. Rep. 128, Nr. 2&3 (1985) 39-204
- [24] G. 't Hooft: Dimensional Regularization and the Renormalization Group, Nucl. Phys. B 61 (1973) 455-468
- [25] H. Triebel: Höhere Analysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (1972)
- [26] D. V. Volkov und V. P. Akulov: Is the Neutrino a Goldstone Particle? Phys. Lett. 46 B (1973) 109
- [27] F. Wegner: The Critical State, General Aspects, in C. Domb, M. Green (Hrsg.): Phase Transitions and Critical Phenomena, Band 6, Academic Press London (1986) 7 ff.
- [28] F. Wegner: Anomalous Dimensions for the Nonlinear Sigma-Model in $2 + \varepsilon$ Dimensions (I), Nucl. Phys. B 280 (1987) 193 ff.
- [29] F. Wegner: Anomalous Dimensions of High-Gradient Operators in the n -Vector-Model in $2 + \varepsilon$ Dimensions, Z. Phys. B 78 (1990) 33-43
- [30] J. Wess und B. Zumino: Supergauge Transformations in 4 Dimensions, Nucl. Phys. B 70 (1974) 39-50
- [31] K. Wilson, J. Kogut: The Renormalization Group and the ε -Expansion, Phys. Rep. 12 (1974) 75-200
- [32] J. Zinn-Justin: Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Clarendon Press Oxford (1989)

Danksagung

Es bleibt mir die angenehme Aufgabe, allen jenen zu danken, die direkt oder indirekt zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben:

- Herrn Prof. Dr. Franz Wegner für die interessante Themenstellung und die stete Bereitschaft zu intensiven und fruchtbaren Diskussionen,
- Herrn Prof. Dr. Michael Schmidt für Anregungen und die Zweitkorrektur der Arbeit,
- Herrn Stefan Kehrein für zahlreiche wertvolle Diskussionen über die “Wunder” der Renormierung,
- schließlich den Mitgliedern des Instituts für die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Wichtige Teile der Arbeit haben in Dr. Reinhild Aust, Felix Finster, Stefan Kehrein, Dr. habil. Reimer Kühn und Dr. Lothar Sütterlin aufmerksame und kritische Leser gefunden, die eine Reihe von gedanklichen und sprachlichen Ungenauigkeiten und gewöhnlichen technischen Fehlern haben vermeiden helfen. Auch dafür mein herzlicher Dank.