Tutorat N.1: Mouvement Brownien

A. Théorie de Langevin

Sous l'effet de l'agitation thermique, des particules en suspension dans un fluide sont animées d'un mouvement incessant et aléatoire appelé mouvement Brownien (Brown, 1827), décrit successivement par A.Einstein (1905), M. von Smoluchowski (1906), P.Langevin (1908), et étudié expérimentalement par J.Perrin.

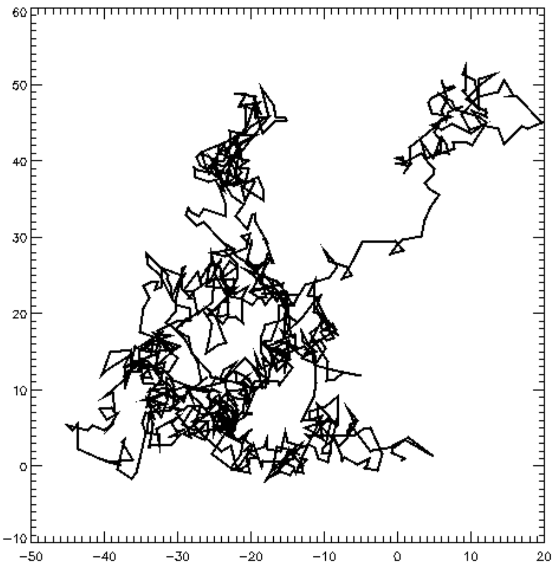

FIG. 1: Exemple d'un mouvement Brownien en deux dimensions

On note $\vec{r}$ la position du centre de gravité d'une particule de masse M, $\vec{F}_s$ la force totale que le solvant exerce sur cette particule, et $\vec{F}_e$ la somme des forces externes qui agissent sur la particule. Langevin a proposé de décomposer $\vec{F}_s$ en une composante moyenne $\left\langle \vec{F}_s \right\rangle = -\zeta \frac{d\vec{r}}{dt}$ décrivant la friction du fluide (ζ est le coefficient de friction), et une composante aléatoire $\vec{\eta}(t)$ indépendante de la vitesse et de la position, soit:

$$\vec{F}_s = -\zeta \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\eta}(t) \tag{1}$$

On suppose la force aléatoire de moyenne nulle, et décorrélée dans le temps:

$$\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t') \ . \tag{2}$$

Par simplicité on raisonnera dans la suite à une dimension, notée x.

1. Ecrire l'équation qui régit la position de la particule et la résoudre en absence de force externe, $\vec{F}_e = \vec{0}$. Montrer que la solution générale est

$$x(t) = x_0 + v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) + \int_0^t dt' \frac{\tau \eta(t')}{m} [1 - e^{-(t-t')/\tau}] \ . \tag{3}$$

   Quelle est la valeur de l'échelle de temps τ qui apparaît naturellement?

2. Déduire de l'expression de $x(t)$ le déplacement quadratique moyen $\Delta(t) = \left\langle [x(t) - x_0]^2 \right\rangle$. Développer son expression pour les temps courts et longs devant τ. Pour le temps longs, montrer que $\Delta(t) \sim 2Dt$ et calculer D.

3. Calculer la valeur de τ pour une particule de rayon $b = 10$ nm, de masse volumique $\rho = 1$ g cm^{-3}, dont le coefficient de friction est donné par la loi de Stokes $\zeta = 6\pi\eta b$ dans un solvant de viscosité $\eta = 10^{-3}$ Pa s.

4. On considère maintenant une situation où le terme de friction est dominant par rapport à l'inertie, $|M\ddot{x}| \ll |\zeta\dot{x}|$; au même temps la particule est soumise à l'action d'une force linéaire, $F_e = -kx$ (ces forces peuvent être produite par des pièges optiques). Ecrire l'equation du mouvement dans ce cas et la resoudre. Calculer l'energie potentielle $V(t) = k\left\langle x(t)^2\right\rangle/2$. Montrer qu'une nouvelle échelle de temps τ' apparaît et donner son expression. Montrer que pour $t \gg \tau'$, $V(t)$ tend vers une valeur d'équilibre. En déduire que, pour que le principe d'équipartition de l'énergie soit valable, la condition $\sigma^2 = 2\zeta k_B T$ est nécessaire.

5. En utilisant la condition sur σ^2 déduite au point précedent, montrer que $D = k_B T/\zeta$. On considère maintenant une particule soumise à l'action d'une force externe constante dans le temps F_e. Comment le résultat (3) est modifié en présence de cette force externe? Calculer la valeur moyenne $\langle x(t)\rangle$ en présence de la force externe; montrer que, pour les temps longs dévant τ, on obtient $\langle x(t)\rangle = \mu F_e t$, et calculer la constance μ (μ est dite *mobilité*). Déduire de ce résultat la *rélation de Einstein*, $D = \mu\, k_B T$.

B. Mouvement Brownien et marche aléatoire

La trajectoire d'une particule soumise à l'agitation thermique est décrite par une marche au hasard sur un réseau cubique : l'objet effectue N pas successifs de longueur a, le pas du réseau. L'orientation de chaque pas est choisie au hasard, indépendamment de celle des pas déjà effectués. On note $\vec{R}$ le vecteur qui lie le début et la fin de la marche:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{a}_i \tag{4}$$

où $\vec{a}_i$ est le vecteur qui décrit le saut i. Que valent $\left\langle \vec{R} \right\rangle$ et $\left\langle |\vec{R}|^2 \right\rangle$?

On se place maintenant à une dimension et on suppose que la particule se trouve à l'origine au début de la marche. Calculer le nombre de trajectoires qui, après N pas, se trouvent à une position $x = na$ sur l'axe x de la marche. En déduire la probabilité $p_N(x)$ corrispondante.

1. On suppose que $n = \nu N$, et que N est très grand pendant que ν est fini. En utilisant l'approximation $N! \sim N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}$, montrer que

$$\frac{1}{N}\log p_N(x) \sim -\frac{1}{2}[(1+\nu)\log(1+\nu) + (1-\nu)\log(1-\nu)] \tag{5}$$

2. On suppose que $n \ll N$. En utilisant l'approximation $N! \sim N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}$, montrer que $p_N(x)$ est une loi Gaussienne, et que sa variance est $\left\langle x^2 \right\rangle = Na^2$.