Mécanique statistique d'un gaz parfait inhomogène

On considère un cylindre fermé contenant un gaz parfait de N particules de masse m. Le cylindre a pour hauteur H et le rayon de sa base est R. Il est orienté verticalement, et on tient compte de l'effet de la pesanteur. On dénote par z la direction verticale et par x, y les directions horizontales (l'intérieur du cylindre est donc défini par $0 \leq z \leq H$ et $x^2 + y^2 \leq R^2$). On suppose que la masse du cylindre est négligeable par rapport à celle du gaz et que ses parois agissent comme un bain thermique à la temperature T.

Exercice 1

1. Ecrire l'Hamiltonien $\mathcal{H}$ du gaz et sa fonction de partition Z.
2. Calculer l'énergie libre, l'énergie et la capacité thermique du gaz.
3. Calculer la densité moyenne $\rho(z)$ du gaz.
4. En supposant que le gaz est à l'équilibre en chaque point de l'espace, et en utilisant l'équation d'état d'un gaz parfait homogène, calculer la pression $P(z)$.
5. Justifier le calcul précédent à l'aide d'un calcul direct de la pression, de la façon suivante:
   - imaginer une surface fictive à la hauteur z dans le cylindre;
   - écrire la quantité de mouvement moyenne $\mathcal{P}$ qui serait transmise par le gaz à l'une des deux faces de la surface si les particules faisaient des collisions élastiques avec la surface;
   - calculer la moyenne de $\mathcal{P}$ et la relier à la pression.
6. Le calcul précédent montre que $P(z) = P(0) \exp(-z/z_0)$. Donner l'expression de z_0. L'atmosphère terrestre est composée majoritairement de diazote, dont la masse molaire est de 28 grammes par mole. Sachant que l'accélération de la pesanteur est $g = 9.81$ m/s^2 et supposant la temperature T égale à 300 K, calculer z_0 pour l'atmosphère terrestre. Sachant que $P(0) = 1$ bar, calculer la pression au sommet du Mont Blanc. En realité $z_0 = 7.64$ km et la pression au sommet du Mont Blanc est de 0.54 atm. Est-ce que nos approximations sont bonnes? D'où pourrait venir la différence?

Exercice 2

On suppose maintenant que le cylindre tourne à une vitesse angulaire constante ω.

1. Ecrire l'Hamiltonien $\mathcal{H}'$ du gaz dans le référentiel tournant.
2. Expliquer pourquoi la distribution de probabilité d'équilibre du gaz est proportionnelle à $\exp(-\beta\mathcal{H}')$ et non pas à $\exp(-\beta\mathcal{H})$.
3. Calculer le profil de densité $\rho(x, y, z)$ du gaz tournant et la pression moyenne à la surface laterale du cylindre.
4. Le cylindre est rempli d'un mélange de 5 moles d'Hélium (masse $m_{He} = 6.64 \cdot 10^{-27}$ Kg) et de 5 moles de diazote. On suppose que $H = 1$ m et que $R = 10$ cm, et que la temperature $T = 300$ K. Déterminer la vitesse de rotation du cylindre au-delà de laquelle la proportion d'atomes d'Hélium dans la region $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$ cm au centre du cylindre est supérieure à 90%. Utilisez toutes les approximations qui vous semblent raisonnables, et si nécessaire, un outil de calcul numérique.