Gaz parfait de fermions à deux dimensions

On suppose que les N électrons à la surface d'un solide sont indépendants et que la seule interaction qu'ils subissent est un effet de confinement à l'intérieur d'une boîte rectangulaire de côtés $L_x = L_y = L$. On notera $V = L^2$ la surface totale de la boîte, qu'on supposera toujours très grande, $V \to \infty$.

1. Ecrire l'équation de Schrödinger pour les fonctions d'onde stationnaires d'une particule quantique de masse m. Quelles sont les solutions, et les énergies ϵ associées, si l'on applique des conditions aux limites strictes aux bords de la boîte ? Même question pour des conditions aux limites périodiques.

2. Définir et calculer la densité d'états $\rho(\epsilon)$. On considèrera les deux types de conditions aux limites et on supposera que la particule est de spin 1/2.

3. Rappeler l'expression de la fonction $f(\epsilon)$ de Fermi-Dirac, qui exprime la probabilité qu'un niveau d'énergie ϵ soit occupé par un fermion quand la température du système est T et son potentiel chimique μ. On notera $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$ où k_B désigne la constante de Boltzmann. Représenter son allure pour différentes valeurs de la température, et montrer que son graphe est symétrique par rapport au point $(\mu, 1/2)$.

4. Quelle condition fixe le potentiel chimique μ ? Calculer μ en fonction de la densité électronique superficielle $n = N/V$ et de la temperature T. Tracer la courbe représentant μ en fonction de T, à n fixé.

5. Expliciter la valeur du niveau de Fermi ϵ_F, limite du potentiel chimique à température nulle, en fonction de la densité électronique de surface $n = N/V$. Sachant que l'ordre de grandeur de n dans un solide est $\sim \text{Å}^{-2}$, retrouver l'ordre de grandeur de ϵ_F. Définir une échelle de température T_F associée au niveau de Fermi et la comparer aux températures usuelles.

6. Quelle est la vitesse maximale d'une particule du gaz ? Quelle condition doit satisfaire la densité superficielle n pour que les formules non relativistes utilisées ici soient valables ? Préciser numériquement cette condition pour des électrons, en estimant leur nombre par Å^2; quel est l'ordre de grandeur correspondant de la température de Fermi ? Comparez avec la densité superficielle d'un solide; qu'en concluez-vous ?

7. On suppose dans cette question que $T = 0$. Quelle est l'énergie totale E_0 des N électrons ? Comment peut-on définir une pression pour ce système de particules ? La calculer, ainsi que le module de compression $-V \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_N$. Montrer que $p = E_0/V$.

8. On s'intéresse maintenant au régime des basses températures, et l'on cherche un développement systématique (dit développement de Sommerfeld) en puissances de la température d'intégrales du type
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \ f(\epsilon) g(\epsilon) \ , \tag{1}$$
où g est une fonction régulière arbitraire. On sépare la valeur à $T = 0$ en réécrivant cette expression comme
$$I = \int_{-\infty}^{\mu} d\epsilon \ g(\epsilon) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \ \widehat{f}(\epsilon) g(\epsilon) \ . \tag{2}$$

Expliciter $\widehat{f}$ et tracer son allure pour différentes températures. En déduire le développement

$$I = \int_{-\infty}^{\mu} d\epsilon\ g(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 g'(\mu) + \dots\ , \tag{3}$$

en utilisant l'égalité $\int_0^\infty dx \frac{x}{1+e^x} = \frac{\pi^2}{12}$. Quelle est la forme de la suite du développement ?

9. Déterminez le comportement de la chaleur spécifique à l'ordre le plus bas en température. Vous appliquerez pour cela le développement de Sommerfeld au calcul du nombre de particules et de l'énergie, et vous utiliserez l'expression du potentiel chimique obtenue en précédence.

10. Que donne le développement de Sommerfeld si on l'applique au calcul du potentiel chimique μ ? Peut-on comprendre cette anomalie à partir de l'expression exacte de μ obtenue en précédence ?