Gaz parfait de bosons

Exercice 1: Gaz parfait de bosons, propriétés générales

On considère un systme de N bosons sans spin, indépendants et soumis à un effet de confinement à l'intérieur d'une boîte rectangulaire (à deux dimensions, $d = 2$) ou cubique (à trois dimensions, $d = 3$) de côté L. On notera $V = L^d$ la surface ou le volume totale de la boîte.

1. Définir et calculer la densité d'états $\rho(\epsilon)$ à $d = 2, 3$ (réutiliser les résultats du tutorat précedent).

2. Rappeler l'expression de la fonction $N_B(\epsilon)$ de Bose-Einstein, qui exprime la probabilité qu'un niveau d'énergie ϵ soit occupé par un boson quand la température du système est T et son potentiel chimique μ. On notera $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$ où k_B désigne la constante de Boltzmann.

3. Quelle condition fixe le potentiel chimique μ ? Montrer que si le volume V est fini, on a $\mu < 0$ pour un gaz parfait de Bosons.

Exercice 2: Gaz parfait de bosons à deux dimensions

1. Calculer la fonction qui lie μ à la densité superficielle $n = N/V$ et à la temperature T dans la limite $V \to \infty$ en supposant que $\mu < 0$. Tracer la courbe représentant μ en fonction de n, à T fixé. Montrer que l'hypothèse $\mu < 0$ est verifiée pour toute valeur finie de n et que $\mu \to 0$ quand $n \to \infty$. En conclure que *le phénomène de condensation de Bose-Einstein ne se produit pas à deux dimensions.*

2. Calculer μ en fonction de T à n fixé. Montrer que $e^{\beta\mu} = 1 - e^{-T_0/T}$ et donner l'expression de la temperature T_0. En utilisant cette expression, écrire l'énergie du gaz pour $T \gg T_0$ et pour $T \ll T_0$ en utilisant l'égalité $\int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$. Commenter les deux résultats.

Exercice 3: Gaz parfait de bosons à trois dimensions

On considère maintenant le gaz à trois dimensions, et on discutera le phénomène de condensation de Bose-Einstein. Il sera utile d'introduire la *fugacité* $z = e^{\beta\mu}$. Vous serez amenés á utiliser les fonctions suivantes:

$$g_\ell(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\ell} = \frac{1}{\Gamma(\ell)} \int_o^\infty \frac{x^{\ell-1} dx}{z^{-1} e^x - 1}, \tag{1}$$

appelées quelquefois fonctions polylogarithmiques. Vous aurez à envisager les valeurs $\ell = 3/2$ et $5/2$. Pour $z \ll 1$, $g_\ell(z) \simeq z$, mais vous aurez surtout besoin d'examiner le comportement de $g_\ell(z)$ quand $z \to 1^-$. Pour $\ell > 1$, $g_\ell(1) = \zeta(\ell)$, où ζ est la fonction de Riemann, ce qui donne $g_{3/2}(1) = \zeta\left(\dfrac{3}{2}\right) \simeq 2,612$ et $g_{5/2}(1) = \zeta\left(\dfrac{5}{2}\right) \simeq 1,342$. On rappelle que $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi}/2$ et que $\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right) = 3\sqrt{\pi}/4$.

1. Dans la limite $V \to \infty$ et en supposant que $\mu < 0$, montrer que la condition qui lie μ à la densité $n = N/V$ et à la temperature T est
$$n = \frac{1}{\Lambda^3} g_{3/2}(z) \ . \tag{2}$$
où Λ est la longueur d'onde thermique. Tracer de façon schematique la courbe représentant n en fonction de μ, à T fixé, et comparer avec le résultat obtenu à deux dimensions. Montrer que à trois dimensions n reste fini quand $\mu \to 0$ et trouver la valeur de densité n_c qui correspond à la limite $\mu \to 0$. Ceci semble conduire a une contradiction, parce que aucun valeur de μ ne correspond aux densités $n > n_c$.

2. Cette contradiction apparente nous amène à reflechir mieux aux hypothèses qu'on a fait. Quand on augmente la densité et on approche la limite $n \to n_c^-$, on trouve que $\mu \to 0^-$, ce qui contradit l'hypothèse qu'on a fait pour trouver l'equation (2). Répéter donc le calcul de la densité en fonction du potentiel chimique qu'on a fait au point 1 toujours en considerant V très grand, mais maintenir separée la contribution de l'état fondamental. Montrer qu'on trouve la condition
$$n = \frac{1}{V} \frac{1}{1-z} + \frac{1}{\Lambda^3} g_{3/2}(z) \ . \tag{3}$$
En déduire qu'il y un problème d'échange de limites entre $V \to \infty$ et $\mu \to 0$.

3. Sachant que pour $z \to 1^-$ on a $g_{3/2}(z) = g_{3/2}(1) - C\sqrt{1-z}$, montrer que pour V très grand:
$$z(n,T) = \begin{cases} z_0(n,T) \ , & n < n_c \ , \\ 1 - \left(\frac{\Lambda^3}{CV}\right)^{2/3} \ , & n = n_c \ , \\ 1 - \frac{1}{V}\frac{1}{n-n_c} \ , & n > n_c \ . \end{cases} \tag{4}$$
où $z_0(n,T)$ est la solution de l'equation (2). Tracer de façon schematique la courbe représentant z en fonction de n. Discuter la limite $V \to \infty$.

4. Déduire du résultat précédent que le nombre de bosons dans l'état fondamental est donné par $N_0 = V(n - n_c)$ pour $n > n_c$, et donc diverge quand $V \to \infty$. On appelle ce phénomène *condensation de Bose-Einstein*.

5. A chaque temperature T, on trouve une densité critique $n_c(T)$. Donner l'expression de $n_c(T)$. On definit une temperature critique $T_c(n)$ à travers de l'inversion de cette relation. Donner l'expression de $T_c(n)$. Tracer le diagramme de phase du gaz dans le plan (n,T).

6. Dans la même approximation qui conduit à l'equation (3), calculez l'expression de la fonction de partition grand canonique au dessus et en dessous de T_c. En déduire l'expressions du grand potentiel
$$\Omega = T\log(1-z) - \frac{TV}{\Lambda^3} g_{5/2}(z) \ , \tag{5}$$
de la pression, de l'énergie interne, et de l'entropie du système. Discutez les limites de haute et basse température.

7. Quelle est la différence avec le rayonnement du corps noir vu en travaux dirigés?

8. Recherche personnelle: quelles sont les réalisations expérimentale de cette "condensation de Bose-Einstein" ? A quelles densités et températures correspondent-elles ? Comparer avec l'expression de $T_c(n)$ qu'on a trouvé pour le gaz parfait.