

CINQUIÈME PRÉCEPTORAT DE PHYSIQUE STATISTIQUE :  
GAZ DE FERMİ DÉGÉNÉRÉ ET CAPACITÉ CALORIFIQUE DES MÉTAUX

## 1 RAPPEL : DENSITÉ D'ÉTAT POUR DES PARTICULES DANS UNE BOÎTE

On considère une particule de masse  $m$  dans une boîte de dimensions  $L^D$  ( $D$  est ici la dimension de l'espace). On considère que le potentiel de confinement est nul à l'intérieur de la boîte et infini à l'extérieur.

1. Donner l'expression des niveaux d'énergie.
2. On considère que le volume de la boîte tend vers l'infini. Le nombre d'états propres dont l'énergie est comprise entre  $\epsilon$  et  $\epsilon + d\epsilon$  vaut alors  $D(\epsilon)d\epsilon$ , où  $D(\epsilon)$  désigne la densité énergétique d'états. Donner l'expression de  $D(\epsilon)$ .

## 2 GAZ DE FERMİ A TEMPÉRATURE NULLE

On considère maintenant que la boîte est en équilibre avec un réservoir de fermions de spin  $1/2$ , sans interaction, de potentiel chimique  $\mu$  et de température  $T$ .

1. Donner le nombre moyen de particules sous forme d'une intégrale sur l'énergie faisant intervenir  $D(\epsilon)$ .
2. On se place à température nulle. Le potentiel chimique est alors par définition égale à l'énergie de Fermi du système  $\epsilon_F$ . Exprimer  $\epsilon_F$  en fonction de la densité volumique de particules  $n$  pour  $D = 2$  et  $D = 3$ .

## 3 DÉVELOPPEMENT DE SOMMERFELD

On cherche à calculer la différence entre l'énergie interne du gaz de fermions à la température  $T$  et sa valeur à température nulle :

$$(1) \quad \Delta U = U(T) - U(T = 0) = \int_0^\infty \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon - \int_0^\infty \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon, T = 0) d\epsilon,$$

où  $f(\epsilon, T)$  désigne la distribution de Fermi-Dirac :

$$(2) \quad f(\epsilon, T) = \frac{1}{1 + e^{(\epsilon - \mu)/k_B T}}.$$

Pour cela on utilise l'expansion de Sommerfeld, que nous allons étudier dans les questions qui suivent. On cherche à évaluer une intégrale de la forme :

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

Plus précisément, on se propose de démontrer que :

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\infty}^{+\mu} H(\epsilon) d\epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (k_B T)^{2n} \frac{d^{2n-1}}{d\epsilon^{2n-1}} H(\epsilon)|_{\epsilon=\mu},$$

où

$$(5) \quad a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{d}{dx} \frac{1}{e^x + 1}.$$

Pour cela, on introduit  $K$ , la primitive de  $H$ , qui s'annule en  $-\infty$  :

$$(6) \quad K(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\epsilon} H(\epsilon') d\epsilon'.$$

1. Montrer que

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\epsilon) \left( -\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right).$$

2. Effectuer un développement de Taylor de  $K(\epsilon)$  autour de  $\epsilon = \mu$ , et montrer que

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\infty}^{+\mu} H(\epsilon) d\epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\epsilon - \mu)^{2n}}{(2n)!} \left( -\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) \frac{d^{2n-1}}{d\epsilon^{2n-1}} H(\epsilon)|_{\epsilon=\mu}.$$

3. Conclure.

4. Que vaut l'énergie de Fermi d'un métal typique ? Expliquer pourquoi, dans la pratique, on peut se contenter d'un développement de Sommerfeld à l'ordre 2.

## 4 GAZ DE FERMİ A BASSE TEMPERATURE

1. Ecrire le développement de Sommerfeld à l'ordre 2 pour le nombre de fermions<sup>1</sup>, et montrer que :

$$(9) \quad \mu = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{D'(\epsilon_F)}{D(\epsilon_F)}.$$

2. Ecrire le développement de Sommerfeld à l'ordre 2 pour l'énergie interne du gaz de fermions et montrer que :

$$(10) \quad U(T) = U(T=0) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D(\epsilon_F)$$

3. En déduire la capacité calorifique du gaz de Fermions à basse température et comparer avec la figure suivante. En particulier, chercher à établir el lien avec le préceptorat précédent (sur la capacité calorifique des cristaux).

4. Comparer l'expression obtenue à la question précédente avec l'expression de la capacité calorifique d'un gaz de particules classiques. Quelle est l'effet de la statistique de Fermi-Dirac sur la capacité calorifique ?

<sup>1</sup>On donne  $a_2 = \frac{\pi^2}{6}$ .

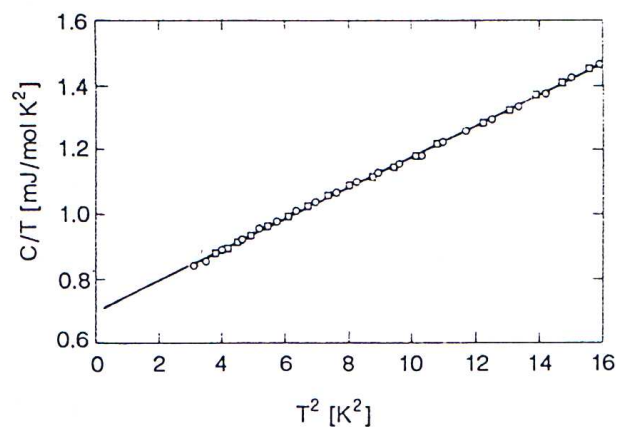


FIG. 1 – Capacité calorifique molaire du cuivre à basse température, divisée par  $T$ . Source : [1], adapté de [2].

## Références

- [1] F. Pobell, *Matter and Methods at Low Temperatures*, Springer, 2007.
- [2] H. Ibach et H. Lüth, , *Solid State Physics, an Introduction to Theory and Experiments*, Springer, 1991.