

QUATRIÈME PRÉCEPTORAT DE PHYSIQUE STATISTIQUE : CAPACITÉ CALORIFIQUE D'UN CRISTAL HARMONIQUE

1 ÉCHAUFFEMENT

On considère un oscillateur harmonique classique. Rappeler l'expression de l'énergie moyenne et de la capacité calorifique du système (Loi de Dulong et Petit). Comparez au graphe ci-joint.

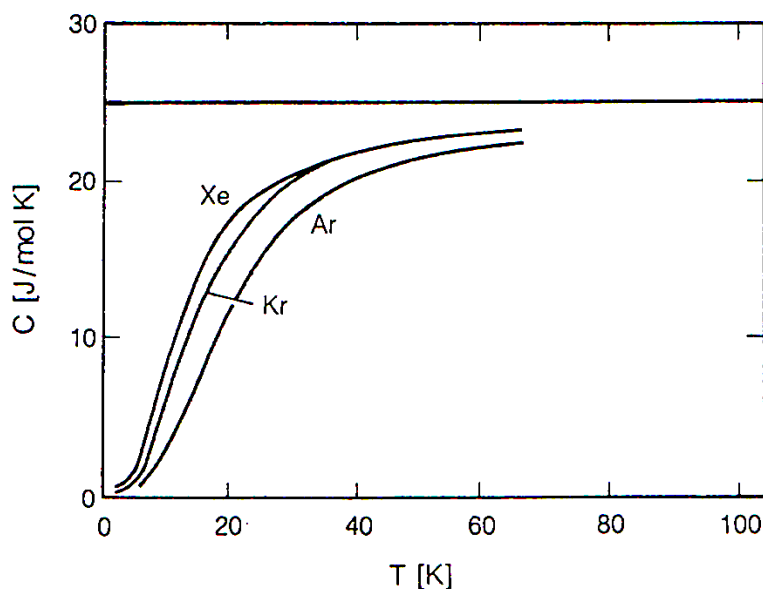


FIG. 1 – Capacité calorifique molaire de l'Argon, du Xenon, et du Krypton en fonction de la température[1].

2 MODÈLE D'EINSTEIN

Einstein a proposé en 1907 de décrire les vibrations d'un cristal comme une collection d'oscillateurs harmoniques indépendants de même fréquence [2]. Dans ce modèle naïf, chaque oscillateur représente les vibrations d'un atome (ou d'un ion) du cristal autour de sa position d'équilibre. Malgré sa simplicité, ce modèle a permis d'expliquer la chute de la capacité calorifique des solides à basse température représentée par la figure 1, et a donc constitué un des premiers succès majeurs de la théorie quantique.

1. On considère un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 . Rappeler l'expression des niveaux d'énergie du système.
2. Que vaut la fonction de partition grand-canonique ?
3. Donne l'expression de l'énergie et de la capacité calorifique du système.
4. Donnez et commentez les comportements de la capacité calorifique à basse et haute température.

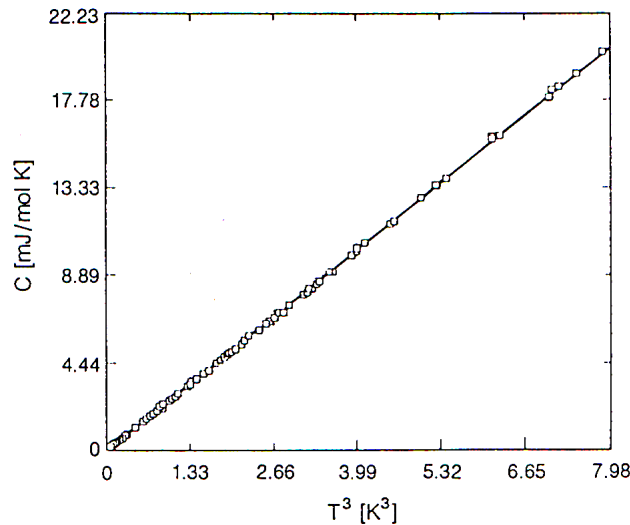


FIG. 2 – Capacité calorifique molaire de l'Argon à basse température [1].

5. Comment relier ω_0 aux propriétés mécaniques du cristal (module de Young, masse des atomes) ?
6. Qu'entend-t-on ici par haute température ? Basse température ?

3 SOLIDE UNIDIMENSIONNEL

Le principal défaut du modèle d'Einstein est qu'il ignore les interactions entre les déplacements des différents atomes. On considère ici le modèle plus réaliste d'un solide harmonique. Pour simplifier, on considère ici une chaîne unidimensionnelle de N atomes de masse m reliés entre eux par un ressort de raideur k .

1. Quels sont les modes propres du systèmes ?
2. Donnez l'expression des niveaux d'énergie du système en appliquant des conditions aux limites périodiques (dites de Born-Von Karman) : on suppose que la chaîne est bouclée sur elle même et que les déplacements du $(N + 1)^{\text{ème}}$ atome coïncident avec ceux du premier.
3. Donnez l'expression de l'énergie du système et de la capacité calorifique. Montrez qu'on retrouve la loi de Dulong et Petit à haute température.
4. Donnez un développement à basse température de la capacité calorifique. Pour cela, transformez la somme du 2 en intégrale, et linéarisez la relation de dispersion des modes propres obtenue au 1.
5. Comparez avec les prédictions du modèle d'Einstein et commentez.

4 SOLIDE TRIDIMENSIONNEL

Comment modifier les résultats de la partie précédente pour décrire un solide tridimensionnel ? Comparez aux résultats expérimentaux résumés par la figure 2 et commentez.

Références

- [1] F. Pobell, *Matter and Methods at Low Temperatures*, Springer, 2007.
- [2] A. Einstein, "Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme", *Annalen der Physik*, **22**, pp. 180-190, 1907.