

SIXIÈME PRÉCEPTORAT DE PHYSIQUE STATISTIQUE:
CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN

1. Rappelez l'expression des niveaux d'énergie d'une particule de masse m dans une boîte cubique de dimensions $L \times L \times L$.
2. On suppose que la boîte en question est en équilibre avec un réservoir de bosons sans interactions, au potentiel chimique μ et à la température T . Donnez le nombre moyen de particules dans chaque état quantique et montrez que $\mu < 0$.
3. On note $z = e^{\beta\mu}$ la fugacité du système. Exprimez le nombre total de particules par unité de volume sous forme d'une somme. En faisant le passage à la limite, montrer qu'il apparaît une densité maximale de particules $n_c(T)$. Que vaut $n_c(T = 0)$? A quoi vous attendez-vous pour un nombre fixé de bosons qu'on refroidirait à volume constant à $T = 0$? Que vaudrait alors le potentiel chimique qui correspondrait à la même distribution?
4. En réalité, en effectuant le passage d'une somme à une intégrale, on suppose que le nombre d'occupation d'un état varie lentement en fonction de son énergie. Cette approximation est-elle justifiée si le potentiel chimique tend vers zéro?
5. Dans la réalité, quand on diminue la température du système à densité constante n , au dessous de la température critique T_c défini par $n_c(T_c) = n$, le potentiel chimique tend vers zéro et un nombre *macroscopique* de particules peuple l'état fondamental. On souhaite étudier le formalisme grand canonique pour étudier ce phénomène car les calculs y sont plus aisés. Si on considère ensuite une situation à nombre de particules constant, on fait le passage entre les deux descriptons en supposant que le potentiel chimique évolue de façon à ce que le nombre moyen de particules du système se conserve. En supposant que le nombre d'occupation des premiers états excités est faible devant celui du fondamental et qu'on peut alors leur appliquer la formule intégrale du 3, donnez l'expression de la population de l'état fondamental en fonction de la température. En déduire l'expression du potentiel chimique. Notre nouvelle approximation est-elle justifiée? Justifiez le terme de 'Condensation de Bose-Einstein' utilisée pour ce phénomène.
6. Que se passerait-il avec des Fermions?
7. Que se passerait-il en dimension 2?
8. Recherche personnelle: quelles sont les réalisations expérimentale de cette 'condensation de Bose-Einstein'? A quelles densités et températures correspondent-elles?
9. Calculez l'expression de la fonction de partition grand canonique au dessus et en dessous de T_c . En déduire l'expression du grand potentiel.
10. En déduire l'expression de la pression et esquissez l'allure du diagramme de phase dans le plan P, v . Bien distinguer $T < T_c$ et $T > T_c$. Dans le second cas, montrer qu'à haute température, on retrouve bien l'équation d'état des gaz parfaits classiques.

11. Donnez l'expression de l'énergie interne, et de l'entropie du système.
12. Calculez enfin la capacité calorifique $C_{V,N}$. Discutez les limites haute et basse température.

Formulaire

Vous serez amenés à utiliser les fonctions suivantes:

$$g_p(z) = z g'_{p+1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{z^{-1} e^x - 1},$$

appelées quelquefois fonctions polylogarithmiques. Vous aurez à envisager les valeurs $z = 3/2$ et $5/2$. Pour $z \ll 1$, $g_p(z) \simeq z$, mais vous aurez surtout besoin d'examiner le comportement de $g_p(z)$ quand $z \rightarrow 1^-$. Pour $p > 1$, $g_p(1) = \zeta(p)$, où ζ est la fonction de Riemann, ce qui donne $g_{3/2}(1) = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2,612$ et $g_{5/2}(1) = \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \simeq 1,342$. On rappelle que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi}/2$ et que $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 3\sqrt{\pi}/4$.