

THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

TD n°1: Probabilités et moyennes.

On considère un système binaire, typiquement un système de N spins s'alignant dans deux positions dans la direction d'un champ magnétique: chaque spin (moment magnétique nucléaire, orbitale électronique) peut se trouver dans deux états:

- ↑ (up) avec la probabilité p
- ↓ (down) avec la probabilité q ($p + q = 1$)

1. Dénombrement (cas discret)

- Calculer la probabilité d'observer N^+ spins up parmi N spins.

2. Fonction de partition (factorisation, calcul des moments)

- Calculer l'aimantation M d'un état en fonction de N^+ et N .
- Calculer l'aimantation moyenne \overline{M} (1^{er} moment), $\overline{M^2}$ (2nd moment) et l'écart type (ou variance) σ .
- Quelle est l'importance des fluctuations de l'aimantation à la limite macroscopique (c'est-à-dire quand $N \rightarrow \infty$)?

3. Distribution gaussienne ou loi normale

On suppose (pour simplifier) que $p = q = \frac{1}{2}$. L'aimantation (due uniquement aux fluctuations) reste alors faible.

- Montrer, en utilisant la formule de Stirling $N! \sim \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$, que la probabilité d'observer une aimantation M suit une loi normale: $P(M) = C e^{-\frac{M^2}{2N}}$, où C est une constante à déterminer.

4. Densité de probabilité (formalisme continu)

- En considérant cette loi comme fonction continue de M , calculer les deux premiers moments \overline{M} et $\overline{M^2}$. Comparer avec les résultats du 2.

On donne: $\int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-au^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Remarques

Dans le cas général, la loi normale s'écrit $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}$, où \overline{x} est la valeur moyenne, et $\sigma^2 = \overline{x^2}$ la variance.

Cette loi est essentielle en physique statistique car, quelle que soit la distribution des variables microscopiques (ex spins: up, down), la variable macroscopique associée (ici l'aimantation) suit toujours une loi normale (cf théorème de la limite centrale).