

THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

tutorat n°6

Physique statistique des systèmes ‘athermaux’ Modélisation de la prise de décision d’un groupe

Le but de ce tutorat est d’illustrer le fait que l’on peut utiliser les outils de la physique statistique pour modéliser le comportement de systèmes complexes qui sortent du cadre traditionnel de la physique. Nous allons ici nous intéresser aux mécanismes de la prise de décision d’un groupe. Ce sujet est inspiré d’un article dont les références sont données à la fin de l’énoncé. Vous êtes invités à y jeter un coup d’œil pour vous aider à répondre aux questions.

Faire un choix est bien sûr quelque chose de compliqué en général, et qui dépend de beaucoup de paramètres. Nous allons faire plusieurs hypothèses simplificatrices pour arriver à une théorie qui ressemble à un modèle d’Ising à la température nulle. On suppose que le choix de chacune des N personnes du groupe se résume à une alternative, par exemple:

- ★ voter pour ou contre lors d’un referendum
- ★ juger (en son âme et conscience) si quelqu’un est coupable ou non-coupable dans un jury de tribunal
- ★ décider d’acheter ou de vendre un bien ou une action

La question est de savoir ce que va décider le groupe. Ce choix va être fonction des interactions entre les membres du groupe, de l’influence d’une éventuelle pression extérieure, ou bien des convictions ou données personnelles de chacun des individus.

Puisque le choix de chaque personne est binaire, on le modélise par une variable $c_i = \pm 1$, $i = 1, N$. Le choix du groupe est alors donné par

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i \quad (1)$$

qui peut prendre $N + 1$ valeurs distinctes entre -1 et 1 .

1. Système de N personnes sans interaction

On suppose pour commencer que les personnes n’interagissent pas entre elles.

- À quels autres problèmes vous fait penser le calcul de C ?
- Quelle est la valeur moyenne de C ? Commentaires? Quelle est l’échelle des fluctuations relative autour de cette valeur moyenne?

2. Interactions de paires

On introduit à présent une interaction entre personnes deux à deux.

- Soient i et j deux personnes en interaction. Quels sont les quatre situations possibles? Pourquoi seul le produit $c_i c_j$ est-il intéressant?
- Si on note E_{ij} l'importance du désaccord entre i et j , $-E_{ij} c_i c_j$ est le degré de conflit entre ces deux personnes. Il est minimum en cas d'accord, et maximum dans le cas contraire. Pour simplifier on prendra par la suite le même $E_{ij} = E$ pour tous le monde. Que vaut G_E , le degré de conflit du groupe? À quoi cette quantité vous fait-elle penser?
- Pour savoir quelle va être la décision du groupe, il faut se donner une règle sur la ligne de conduite que suit chaque individu.

Postulat: *Chaque personne cherche à minimiser son désaccord avec ses voisins.*

Ce postulat vous semble-t-il raisonnable? Comment le traduiriez-vous en termes de spins?

- À quel état aboutirait une simulation Monte-Carlo qui partirait d'une situation où les c_i sont initialisés aléatoirement à ± 1 (rappel: on est à $T = 0$)? Que vaut C à la fin de cette simulation? Commentaires?
- On peut retrouver le même résultat en calculant directement G_E . On peut écrire G_E comme une double somme:

$$G_E = -\frac{E}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_j \right) c_i, \quad (2)$$

où l'on a supposé que tous les individus communiquent entre eux. Exprimer le facteur entre parenthèses en fonction de N , C et c_i , et en déduire G_E . Quelles sont les valeurs de C qui minimisent cette quantité?

3. Biais personnel et 'frustration'

- Pour tenir compte d'une influence extérieure globale sur l'ensemble du groupe (pression sociale, media, ...), on introduit un champ S . Si $S c_i > 0$, la personne i est en accord avec cette influence, et en désaccord dans le cas contraire. Comment s'écrit le G_S correspondant pour le groupe?
- Que donne le postulat de minimisation sur la somme $G = G_E + G_S$? Commentaires?
- Dans sa décision, un individu fait également intervenir ses *a priori*, ses goûts, ses informations privées, son expérience personnelle, etc ... On modélise tout ça par un champ local S_i . Comment s'écrit le G_I correspondant pour le groupe?
- Au total, chaque individu veut minimiser son désaccord avec (i) ses voisins, (ii) les influences extérieures et (iii) ses propres idées. Il est rarement possible de tout combiner et il en résulte en général une certaine 'frustration'. Pouvez-vous donner un exemple simple de frustration magnétique?

4. Exemple

On considère un groupe de N personnes dont la moitié possède un *a priori* personnel $S_i = +S_0$ et l'autre moitié $S_j = -S_0$. On suppose qu'il n'y a pas d'influence extérieure $S = 0$. On note c_i^+ le choix de la première moitié et c_j^- celui de la seconde.

- Calculer C et G en fonction de ces paramètres.
- Quels sont les quatre cas possibles? Que valent leurs C et G respectifs?
- Quel est le cas que l'on peut éliminer d'emblée?
- En fonction de la valeur de $NE/2$ par rapport à celle de S_0 , discuter les deux cas restants.
- Comment se modifient ces résultats si maintenant les *a priori* des deux groupes n'ont pas la même 'force', i.e. si par exemple $S_j = -\alpha S_0$, avec $0 < \alpha < 1$?
- En général les deux sous-groupes sont de taille différente: il y a une minorité (M personnes) et une majorité ($N - M$). La minorité est souvent 'plus motivée' que la majorité, ce qui justifie l'inégalité $0 < \alpha < 1$. Calculer C et G et discuter les différents cas. En particulier, les interactions jouent-elles pour ou contre la minorité?

Référence:

S. Galam and J.-D. Zucker,
From individual choice to group decision-making,
Physics A **287**, pp 644-659 (2000).
