

THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

TD n°6 et 7: Statistiques quantiques: de la naine blanche au corps noir.

Ce TD traite de la statistique des gaz quantiques. Dans la première partie, on établira les expressions de la pression moyenne et du nombre moyen de particules d'un gaz de fermions et d'un gaz de bosons. On appliquera ensuite ces résultats à l'étude de la stabilité des naines blanches, puis de la chaleur spécifique des métaux et enfin du rayonnement du corps noir.

1. Gaz de fermions et de bosons

On considère un ensemble de N particules dans un volume constant V , et à une température T donnée. Le système peut échanger des particules avec le réservoir, et N n'est donc pas fixé. On note μ le potentiel chimique. Pour décrire ce gaz, on se place dans l'ensemble grand-canonique.

Les particules sont quantiques, et peuvent se trouver sur un nombre discret de niveaux d'énergie indicés par la lettre λ . On note N_λ le nombre de particule sur le niveau d'énergie ϵ_λ . Se donner une 'configuration', c'est se donner une valeur de N_λ pour chaque niveau.

- Que valent le nombre de particules et l'énergie totale d'une configuration donnée?
- Quel est son poids statistique? Exprimer la fonction de partition Z_{GC} du système?

On a besoin du grand-potentiel $J = -kT \ln Z_{GC}$ pour en déduire les diverses quantités physiques moyennes par dérivation.

- Calculer la fonction de partition des bosons sans interaction pour lesquels aucune restriction n'est donnée sur les N_λ . Comment se modifie ce calcul dans le cas de fermions pour lesquels chaque niveau d'énergie est occupé au plus par une seule particule?
- En déduire les J^B et J^F correspondants, ainsi que les nombres moyens de particules associés N^B et N^F .

La somme sur l'indice λ est liée à la nature quantique des particules. Pour aller plus loin dans les calculs, on va, comme dans le TD n°2, introduire une densité d'état $\rho(\epsilon) = AV\epsilon^{1/2}$ (en trois dimensions), où V est le volume et A une constante qui dépend du spin s et de la masse m des particules considérées: $A = \frac{2s+1}{2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{1}{2\pi^2}$.

- Par quoi va-t-on remplacer les \sum_λ qui apparaissent dans les expressions des N ? Calculer les nouvelles expressions de N^B et N^F .
- Comment calcule-t-on la pression moyenne P à partir de J ? Calculer

P^B et P^F .

On va maintenant faire un développement hautes et basses températures des expressions précédentes.

- Montrer que quand $\beta\mu \ll 1$, on retrouve (presque) la loi des gaz parfaits classiques.
- Montrer que lorsque $T \rightarrow 0$, la pression du gaz de fermions tend vers une valeur finie.
- Comment se comporte au contraire le gaz de bosons aux basses températures?

2. Exemples spécifiques

1) Stabilité des naines blanches

Les naines blanches sont des étoiles vieilles, parvenues au stade ultime de leur évolution : elles ont épuisé le combustible (hydrogène dans un premier temps puis hélium) qui alimente les réactions nucléaires fournissant l'énergie dans les étoiles plus jeunes, et se sont contractées considérablement sous l'effet des forces de gravitation. Ainsi, typiquement leur rayon R est de l'ordre de celui de la Terre, tandis que leur masse est de l'ordre de celle du Soleil : $R \sim 5000km$, $M \sim 10^{30}kg$, ce qui aboutit à une densité volumique $\rho \sim 5 \times 10^6 g/cm^3$, typiquement 10^6 fois supérieure à celle de la Terre.

- Partant de la force de gravitation entre 2 objets de masse m_1 et m_2 , montrer que l'énergie potentielle de gravitation vaut $E_G \simeq -GM^2/R$ où $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ est la constante universelle de gravitation. En déduire que les forces de gravitation sont l'équivalent d'une pression P_G qui est *négative*.
- Calculer l'ordre de grandeur du volume par atome, en déduire que les constituants de la naine blanche sont forcément ionisés.
- En mesurant le rayonnement émis par l'astre et en le comparant à la Loi de Planck (voir 2)), on estime que la température vaut typiquement $T \sim 10^7 K$. A partir du lien entre N/V et μ , calculer le potentiel chimique à Température nulle (qu'on notera T_F) pour le gaz d'électrons. Montrer que vu les ordres de grandeurs en jeu, la naine Blanche est "dans la limite des températures *nulles*".
- Quelle est la pression P_F du gaz d'électrons ? Montrer qu'elle est très supérieure à celle du gaz de noyaux. Comparer alors P_G et P_F . Conclure que c'est la pression de température nulle du gaz d'électrons, liée au principe de Pauli introduisant une sorte de "répulsion effective" entre fermions, qui empêche la naine blanche de s'écrouler sous l'effet de sa propre gravitation.

2) Rayonnement du corps noir.

Il est bien connu qu'un corps chauffé à une température élevée, émet de la lumière visible, c'est à dire rayonne de l'énergie. Cette constatation banale est cependant assez compliquée à modéliser en général. En effet, un bilan détaillé montre que pour deux corps

1 et 2, on a $\frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2}$ où $B(\lambda, T)$ est la densité spectrale de puissance rayonnée par unité d'angle solide, tandis que $A(\lambda, T)$ est le coefficient d'absorption pour la longueur d'onde λ de photon considérée. Par définition du Corps Noir $A = 1$ en toutes circonstances, ce qui simplifie considérablement le problème. Notons que le Corps Noir est le corps qui émet le plus (cf. bilan détaillé) et que le Corps Noir n'apparaît véritablement noir que si il est à basse T : chauffé à une Température élevée il émet de la lumière visible : il n'apparaît donc pas "noir", contrairement à ce que son nom indique.

Le fait de considérer une enceinte fermée, dont les parois (suffisamment épaisses pour ne pas être transparentes) sont portées à une température T , est une bonne réalisation pratique du Corps Noir. En effet, même si les parois ne vérifient pas $A = 1$, du fait que l'enceinte est close, tout photon émis sera finalement absorbé, même si cela ne se produit qu'après un grand nombre de réflexions. En supposant que l'ensemble des photons présents dans la cavité est en équilibre avec le réservoir d'énergie constitué par les parois de l'enceinte, nous allons chercher le nombre de photons pour un λ donné, ainsi que la dépendance en λ de ce nombre de photons.

- Même ainsi simplifié, le problème posé comporte une difficulté qui tient à ce que le nombre *total* de photons (contenus dans l'enceinte plus les parois) n'est pas fixé. En effet, le nombre de photons s'ajuste en fonction de T , contrairement au TD.4 sur l'adsorption où le nombre total d'atomes (adsorbés plus dans le réservoir) était fixé. Il n'est donc pas possible de se placer directement en ensemble grand canonique. Pour tourner la difficulté, nous admettrons ce résultat de Mécanique Quantique : un ensemble de n photons de même fréquence ν_0 est assimilable à un oscillateur harmonique dans son n ième état, d'énergie $E_n(\nu_0) = h\nu_0(n + 1/2)$.

Calculer $Z(\nu_0, T)$. En déduire le nombre moyen de photons $N(\nu_0, T)$ et montrer que *le potentiel chimique des photons est nul*. Préciser N dans la limite classique et dans celle de température nulle.

- Pour les photons, le calcul de la densité d'états $g(\nu)$ est spécial. En effet, ces particules étant de masse nulle, elles obéissent à la relation d'Einstein $E = h\nu = pc$ où p est leur quantité de mouvement et c la vitesse de la lumière.

En utilisant cette définition de E , ainsi que des conditions aux limites de bords durs pour quantifier les vecteurs d'onde $K = p/\lambda$, trouver $g(\nu)$.

- Donner la répartition spectrale des photons (Loi de Planck), c'est à dire la distribution d'énergie à T fixée, en fonction de ν .

Montrer que cette courbe a un maximum.

En admettant que ce maximum est donné par $\nu_{max} = 2.82 \times k_B T/h$ déduire de la couleur du Soleil sa température de surface.

- En intégrant sur ν montrer que la puissance totale rayonnée par un corps noir est proportionnelle à T^4 (loi de Stefan-Boltzmann).