

QUATRIÈME TD DE PHYSIQUE STATISTIQUE:
GAZ DE FERMI, ETOILES NAINES BLANCHES

1 Première partie: limite classique

1. Soit une particule de masse m dans un cube de volume $L \times L \times L$. Rappeler les valeurs possibles pour son impulsion (p_x, p_y, p_z) avec des conditions aux limites périodiques.
2. Calculer le nombre d'états quantiques dans un volume $d^3\vec{p}$ de l'espace des impulsions, suffisamment grand pour que ce nombre soit très grand.
3. On rappelle qu'en formalisme grand-canonique, pour des particules sans interaction, une configuration est donnée par les nombres d'occupation des différents états propres à une particule. Quel est le poids d'une de ces configurations? On fera apparaître la fonction de partition grand canonique Z_{GC} dont on rappellera l'expression. On considère des fermions sans spins et on notera μ leur potentiel chimique.
4. Donner l'expression du grand potentiel $J = -k_B T \ln Z_{GC}$ sous forme d'une somme sur les états propres.
5. Comment s'expriment le nombre de particules et la pression? Dans la limite d'un grand volume, exprimer le résultat sous la forme d'une intégrale sur le vecteur d'onde des particules.
6. Dans la limite non relativiste, exprimer le grand potentiel, le nombre de particules et la pression sous forme d'une intégrale sur l'énergie.
7. Donner le nombre de particules sous la forme du rapport V/λ^3 multiplié par une intégrale sans dimension, ne dépendant que de la fugacité du gaz $e^{\beta\mu}$.
8. Faire une intégration par parties pour faire disparaître les logarithmes dans l'expression de la pression. Montrer qu'à basse densité, on retrouve la loi des gaz parfaits. Qu'entend on ici par basse densité?

2 Deuxième partie: gaz de Fermi à basse température

On désormais en outre que la température tend vers 0 (mais reste non nulle), et que le nombre moyen de particules reste fixé.

1. Montrer que le potentiel chimique tend vers une valeur finie E_F , qu'on appelle énergie de Fermi. Donner l'expression de l'énergie de Fermi et de la pression en fonction de la densité électronique. Dans quel régime de température ces résultats restent-ils valables?
2. Que se passe-t-il pour un système de bosons?
3. On ajoute au système des noyaux atomiques de charge $Z|e|$ et de masse $A m_n$, où m_n est la masse d'un nucléon, de telle sorte que la charge totale du système soit nulle. On s'intéresse toujours au niveau de plus basse énergie du système, et on néglige les

interactions. Expliquer sans calcul pourquoi la contribution des noyaux à l'énergie cinétique du système est négligeable à basse température.

4. Quel est l'ordre de grandeur de la distance entre deux électrons voisins dans le système ? Quelle est l'énergie potentielle électrostatique correspondante ? A quelle condition sur la densité est-il légitime de négliger les interactions ? Comparer avec un gaz parfait classique.

3 Troisième partie : étoiles naines blanches

Les étoiles naines sont celles dans lesquelles plus aucune réaction nucléaire ne se produit, suite à l'épuisement des ressources en combustible. La matière d'une telle étoile peut être modélisée, à une très bonne approximation, comme un gaz de Fermi analogue à celui de la partie précédente. Nous nous contenterons d'une modélisation simple d'étoile homogène à l'intérieur d'une sphère de rayon R . M désignera la masse de l'étoile.

1. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle. On notera G la constante de gravitation universelle. Calculer la pression due aux forces gravitationnelles P_G . Quel est son signe?
2. En utilisant les résultats de la première partie, calculer la pression totale à la surface de l'étoile dans la limite non relativiste en fonction de M, m_n, R, m_e . On notera $\mu_e = A/Z$ le nombre de nucléons par électron, qui est proche de 2.
3. Montrer qu'il existe un rayon d'équilibre qu'on calculera en fonction de M . Commenter le résultat.
4. Expliquer pourquoi l'approximation non relativiste devient de moins en moins bonne au fur et à mesure que la masse augmente.
5. En revenant à la formulation en terme de vecteur d'onde, donner les expressions de la pression et de l'énergie de Fermi dans la limite ultrarelativiste où $E = pc$.
6. Montrer qu'il n'y a plus de rayon d'équilibre. Montrer que l'étoile s'effondre sur elle-même au-delà d'une certaine masse, dite masse de Chandrasekhar, qu'on exprimera en fonction de $\mu_e m_n$ et de la masse de Planck $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c/G}$. On calculera numériquement sa valeur.
7. Savez vous ce que devient une naine blanche dont la masse est supérieure à la masse de Chandrasekhar?