# Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 13 maggio 2025
## Proff V. Mastropietro, M. Papinutto, F. Zamponi

**Esercizio 1 [10 punti].** Sia dato un sistema descritto dalla Lagrangiana

$$L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \gamma\dot{x}y - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\gamma^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 \ ,$$

dove $\gamma$ e $k$ sono costanti reali.

1. Calcolare l'Hamiltoniana del sistema $H(x,y,p_x,p_y)$.
2. Scrivere le equazioni di Hamilton e da esse derivare le equazioni di Newton del sistema, ovvero $\ddot{x} = f(x,y,\dot{x},\dot{y})$ e $\ddot{y} = g(x,y,\dot{x},\dot{y})$.
3. Ricordare che un punto di equilibrio è un dato iniziale $(x,y,\dot{x}=0,\dot{y}=0)$ tale che $\ddot{x}=0$ e $\ddot{y}=0$. Indicare quindi l'insieme dei dati iniziali corrispondenti ai punti di equilibrio.

**Esercizio 2 [10 punti].** Un punto materiale di massa $m$ si muove in tre dimensioni cartesiane $(x,y,z)$. Il punto è vincolato alla superficie $z = a\left(\frac{1}{2}x^2+y^2\right)$ ed è soggetto all'azione della forza peso diretta verso il basso lungo l'asse $z$.

Usando unità di misura tali che $m=g=a=1$ e le coordinate generalizzate $(x,y)$:

1. Determinare la Lagrangiana del sistema.
2. Determinare gli integrali primi del moto.
3. Usando gli integrali primi, discutere l'esistenza di orbite circolari nel piano $(x,y)$, ovvero soluzioni della forma $x(t) = R\cos(\omega t)$, $y(t) = R\sin(\omega t)$ con $R \neq 0$ e $\omega \neq 0$.

**Esercizio 3 [10 punti].** Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p + q^3 \\ \dot{p} &= -3q^2p - 3q^5 \end{aligned} \qquad (1)$$

1. Verificare che tale sistema è Hamiltoniano e calcolare l'Hamiltoniana $H(q,p)$ corrispondente. Mostrare che $H(p,q) = g(p,q)^2/2$ per una opportuna funzione $g(p,q)$.
2. Usando il risultato precedente, si cerchi una trasformazione canonica indipendente dal tempo tale che $K(Q,P) = \frac{P^2}{2}$ con $P = g(p,q)$. Si trovi una funzione generatrice del secondo tipo $F(q,P)$ che generi tale trasformazione canonica.
*Suggerimento*: ricordare che $p = \frac{\partial F(q,P)}{\partial q}$ e sostituire questa relazione in $P = g(p,q)$ per ottenere una equazione differenziale dove appaiono solo $q, P$. Integrare questa equazione differenziale per ottenere $F(q,P)$.
3. Ricordando che $Q = \frac{\partial F}{\partial P}$, determinare la trasformazione canonica $(q,p) \to (Q,P)$ generata da $F(q,P)$ e la sua inversa $(Q,P) \to (q,p)$.
4. Risolvere le equazioni del moto per le variabili $(Q,P)$ e usare la trasformazione canonica determinata al punto precedente per scrivere le soluzioni $(q(t),p(t))$ delle equazioni (1) con condizioni iniziali $q(0)=2$ e $p(0)=-4$.

# Soluzioni

**Esercizio 1.**

1. I momenti sono $p_x = \dot{x} + \gamma y$ e $p_y = \dot{y}$. La Hamiltoniana è

$$\begin{aligned}
H &= p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L \\
&= p_x(p_x - \gamma y) + p_y^2 - \frac{1}{2}[p_x^2 + \gamma^2 y^2 - 2\gamma y p_x + p_y^2] - \gamma(p_x - \gamma y)y + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 y^2 + \frac{1}{4}y^4 \\
&= \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 - \gamma y p_x + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}y^4
\end{aligned}$$

2. Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x - \gamma y \ , \\
\dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y \ , \\
\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \ , \\
\dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = \gamma p_x - y^3 \ ,
\end{aligned}$$

   Dalle equazioni di Hamilton otteniamo

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \dot{p}_x - \gamma\dot{y} = -kx - \gamma\dot{y} \ , \\
\ddot{y} &= \dot{p}_y = \gamma p_x - y^3 = \gamma\dot{x} + \gamma^2 y - y^3 \ .
\end{aligned}$$

3. Le condizioni di equilibrio sono $\dot{x} = \ddot{x} = \dot{y} = \ddot{y} = 0$. Otteniamo dunque $x = 0$ e

$$y^3 - \gamma^2 y = 0 \ ,$$

   le cui soluzioni sono $y = 0$ e $y = \pm\gamma$. I tre punti di equilibrio $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ sono dunque $(0, 0, 0, 0)$, $(0, \gamma, 0, 0)$ e $(0, -\gamma, 0, 0)$.

**Esercizio 2.**

1. Usando il vincolo $z = x^2/2 + y^2$ abbiamo $\dot{z} = x\dot{x} + 2y\dot{y}$. L'energia potenziale gravitazionale è $V = z$. La Lagrangiana è quindi

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - z = \frac{1}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (x\dot{x} + 2y\dot{y})^2] - x^2/2 - y^2 \ .$$

2. L'unico integrale primo del moto è l'energia generalizzata. Per ottenerla calcoliamo, ricordando che $\dot{z} = x\dot{x} + 2y\dot{y}$,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + \dot{z}x \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + \dot{z}2y$$

Di conseguenza

$$H = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L = \dot{x}(\dot{x} + \dot{z}x) + \dot{y}(\dot{y} + \dot{z}2y) - L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + z$$

ed esplicitando $z$ e $\dot{z}$ si ottiene

$$H = T + V = \frac{1}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (x\dot{x} + 2y\dot{y})^2] + x^2/2 + y^2 \ .$$

3. Cerchiamo soluzioni della forma $x(t) = R\cos(\omega t)$, $y(t) = R\sin(\omega t)$ e verifichiamo se $H$ è costante. Abbiamo

$$\dot{x} = -\omega R\sin(\omega t) \qquad \dot{y} = \omega R\cos(\omega t) \qquad \dot{z} = x\dot{x} + 2y\dot{y} = \omega R^2\sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

Sostituendo in $H$ ed usando $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ otteniamo

$$H = \frac{1}{2}\omega^2R^2 + \frac{1}{2}\omega^2R^4\sin^2(\omega t)[1 - \sin^2(\omega t)] + \frac{1}{2}R^2[1 + \sin^2(\omega t)] \ .$$

Questa funzione è chiaramente dipendente dal tempo. Ad esempio, ricordando che $\sin(0) = 0$ e $\sin(\pi/2) = 1$, abbiamo

$$H(t = 0) - H(t = \frac{\pi}{2\omega}) = \frac{1}{2}R^2 \ .$$

Dato che $H$ dovrebbe essere una costante del moto, concludiamo che i moti circolari uniformi non possono essere soluzioni delle equazioni del moto.

**Esercizio 3.**

1.

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = p + q^3 \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -3q^2 p - 3q^5 \\
\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} &= -\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = 3q^2
\end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}
H &= \int \dot{q} dp = \frac{p^2}{2} + q^3 p + f(q) \\
-3q^2 p - 3q^5 = \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -3q^2 p - f'(q) \\
\Rightarrow f'(q) &= 3q^5 \qquad \Rightarrow f(q) = \frac{1}{2} q^6 \\
\Rightarrow H &= \frac{p^2}{2} + q^3 p + \frac{q^6}{2} = \frac{1}{2}(p + q^3)^2
\end{aligned}$$

Ponendo

$$g(p, q) = p + q^3 \qquad \Rightarrow \qquad H(p, q) = g(p, q)^2/2$$

2. Ricordando che $p = \frac{\partial F}{\partial q}$ e che $g(p, q) = p + q^3$ possiamo sostituire

$$P = g\left[\frac{\partial F(q, P)}{\partial q}, q\right] = \frac{\partial F(q, P)}{\partial q} + q^3 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{\partial F(q, P)}{\partial q} = P - q^3 \ .$$

Integrando si ottiene

$$F(q, P) = Pq - \frac{q^4}{4} + h(P)$$

Dal momento che ci interessa una qualunque soluzione, possiamo scegliere $h(P) = 0$.

3. Abbiamo

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\partial F(q, P)}{\partial P} = q \\
P &= p + q^3
\end{aligned}$$

Le trasformazioni inverse sono:

$$\begin{aligned}
q &= Q \\
p &= P - Q^3
\end{aligned}$$

4. Le eq. del moto per $(Q, P)$ sono:

$$\begin{aligned}
\dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = P \\
\dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0
\end{aligned}$$

di conseguenza

$$\begin{aligned}
P(t) &= P_0 = \text{costante} \\
Q(t) &= P_0 t + Q_0
\end{aligned}$$

Usando il fatto che $q(t) = Q(t)$, $p(t) = P_0 - Q(t)$ e le condizioni iniziali sono $q(0) = 2$ e $p(0) = -4$ si ottiene $P_0 = 4$ e $Q_0 = 2$ da cui la soluzione delle eq. del moto originali risulta

$$\begin{aligned}
q(t) &= 2 + 4t \\
p(t) &= 4 - (4t + 2)^3
\end{aligned}$$