6. Meccanica Hamiltoniana

Il formalismo di Lagrange è molto comodo per fare cambi di coordinate e imporre vincoli al moto

La cosa antipatica è che non si capisce mai bene se $\dot{q}$ è una variabile indipendente da q.
Inoltre abbiamo visto che il piano $(\dot{q}, q)$ fornisce una rappresentazione utile del moto detta ritratto di fase.

Il formalismo Hamiltoniano consiste nell' introdurre una variabile $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ e trattare le variabili (p, q) come davvero indipendenti ("spazio delle fasi")

Vedremo che questa rappresentazione più elegante permette di mettere in evidenza alcune proprietà importanti del moto e di formulare facilmente la teoria delle perturbazioni.

a. Formulazione Hamiltoniana, trasformata di Legendre, principio di azione.

$\mathcal{L}(\dot q, q)$ Consideriamo $\dot q$ come una variabile davvero indipendente

$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}(\dot q, q)$ e invertiamo $\dot q = \dot q(p,q)$

$$H(p,q) = p\,\dot q(p,q) - \mathcal{L}[\dot q(p,q), q]$$

Mostriamo che le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} \dot p = -\dfrac{\partial H(p,q)}{\partial q} \\ \dot q = \dfrac{\partial H(p,q)}{\partial p} \end{cases}$$

dalle equazioni di Eulero-Lagrange:

- $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = \frac{d}{dt}p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

  infatti $$\frac{\partial H}{\partial q} = \cancel{p\frac{\partial \dot q}{\partial q}} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}\frac{\partial \dot q}{\partial q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

- $$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot q + \cancel{p\frac{\partial \dot q}{\partial p}} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}\frac{\partial \dot q}{\partial p}}$$

Osserviamo che $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0$

La Hamiltoniana è una costante del moto

Esempio:

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = p/m$$

dunque $H(p,q) = p\dot{q} - \mathcal{L}(\dot{q}, q) = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + V(q)$

$$= \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

La funzione Hamiltoniana coincide con l'energia scritta in termini di p, q

L'operazione

$$H(p,q) = p\,\dot{q}(p,q) - \mathcal{L}[\dot{q}(p,q), q]$$

con $\dot{q}$ soluzione di $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(\dot{q},q)$

è detta "trasformata di Legendre"

Possiamo scrivere

$$H(p,q) = \max_{\dot{q}} \left[p\,\dot{q} - \mathcal{L}(\dot{q},q) \right]$$

La condizione di massimo è $\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[p\,\dot{q} - \mathcal{L}(\dot{q},q)\right] = p - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0$

In generale abbiamo

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[p\,\dot{q} - \mathcal{L}(\dot{q},q)\right]}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}$$

$= 0$ per la condizione di massimo

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[p\,\dot{q} - \mathcal{L}(\dot{q},q)\right]}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}$$

La trasformata di Legendre si può invertire:

$$\mathcal{L}(\dot{q},q) = \min_{p} \left[p\,\dot{q} - H(p,q) \right]$$

La condizione di minimo è $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$

Principio di azione nella forma Hamiltoniana

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left[p(t)\,\dot{q}(t) - H(p(t), q(t)) \right]}_{}$$

Consideriamo questa come una lagrangiana $\mathcal{L}(\dot{q}, \dot{p}, q, p)$

Abbiamo dunque

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dfrac{d}{dt} p = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} = 0 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = \dot{q} - \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

che sono le equazioni di Hamilton

In presenza di più coordinate $\mathcal{L}(\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N, q_1, \cdots, q_N)$ tutto si generalizza:

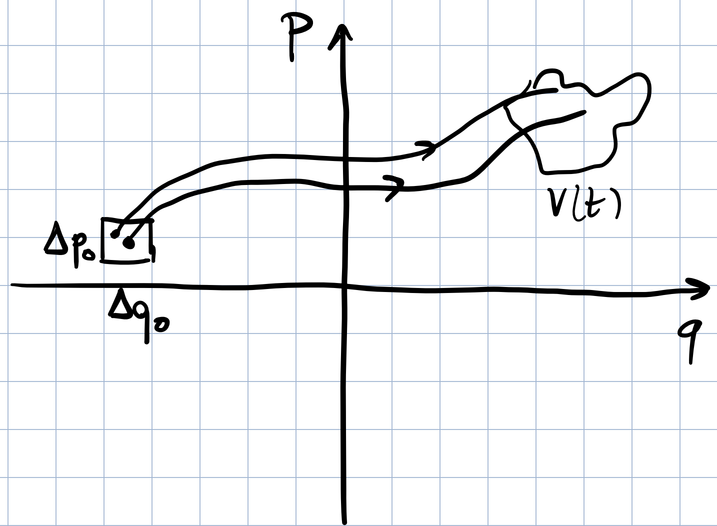
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\begin{aligned} H(p_1, \cdots, p_N, q_1, \cdots, q_N) &= p \cdot \dot{q} - \mathcal{L}(\dot{q}, q) \\ &= \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\dot{q}, q) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

b. Evoluzione del volume nello spazio delle fasi

Nella formulazione Hamiltoniana il ritratto di fase diventa il moto nello spazio delle fasi



$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

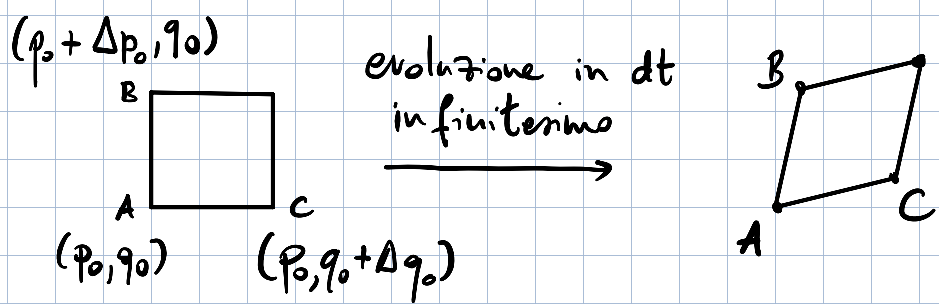
$$p(0), q(0) \rightarrow p(t), q(t)$$

Considieriamo un piccolo volume di spazio delle fasi

$$V(0) = \Delta p(0)\, \Delta q(0) = \Delta p_0\, \Delta q_0$$

Al tempo t questo volume evolve in un certo $V(t)$.

Consideriamo una evoluzione
$$\dot{p} = f_p(p,q)$$
$$\dot{q} = f_q(p,q)$$



A: $(p_0, q_0) \rightarrow (p_0 + f_p(p_0 q_0)\,dt,\ q_0 + f_q(p_0, q_0)\,dt)$

B: $(p_0 + \Delta p_0, q_0) \rightarrow (p_0 + \Delta p_0 + f_p(p_0 + \Delta p_0, q_0)\,dt,\ q_0 + f_q(p_0 + \Delta p_0, q_0)\,dt)$

C: $(p_0, q_0 + \Delta q_0) \rightarrow (p_0 + f_p(p_0, q_0 + \Delta q_0)\,dt,\ q_0 + \Delta q_0 + f_q(p_0, q_0 + \Delta q)\,dt)$

$$f_p(p_0+\Delta p_0, q_0) - f_p(p_0,q_0) \sim \frac{\partial f_p}{\partial p}\Delta p_0 \quad \text{per } \Delta p_0, \Delta q_0 \text{ piccoli}$$
$$f_q(p_0, q_0+\Delta q_0) - f_q(p_0,q_0) \sim \frac{\partial f_q}{\partial q}\Delta q_0$$

Allora
$$\vec{AB} \approx \left(\Delta p_0 + \frac{\partial f_p}{\partial p}\Delta p_0\, dt,\ \frac{\partial f_q}{\partial p}\Delta p_0\, dt\right) = (b_p, b_q)$$
$$\vec{AC} \approx \left(\frac{\partial f_p}{\partial q}\Delta q_0\, dt,\ \Delta q_0 + \frac{\partial f_q}{\partial q}\Delta q_0\, dt\right) = (c_p, c_q)$$

$$V(dt) = |b_p c_q - b_q c_p| = \Delta p_0 \Delta q_0 \left[1 + \left(\frac{\partial f_p}{\partial p} + \frac{\partial f_q}{\partial q}\right)dt + o(dt^2)\right]$$

Otteniamo che per un volume infinitesimo
$$\frac{dV}{dt} = \lim_{dt\to 0} \frac{V(dt)-V(0)}{dt} = \Delta p_0 \Delta q_0 \cdot \left(\frac{\partial f_p}{\partial p} + \frac{\partial f_q}{\partial q}\right) = \Delta p_0 \Delta q_0 \times \nabla\cdot f$$

Nel caso Hamiltoniano: Teorema di Liouville

$$f_p(p,q) = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad f_q(p,q) = \frac{\partial H}{\partial p}$$

dunque
$$\nabla\cdot f = -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0$$

Un volume infinitesimo si conserva $\rightarrow$ anche un volume finito

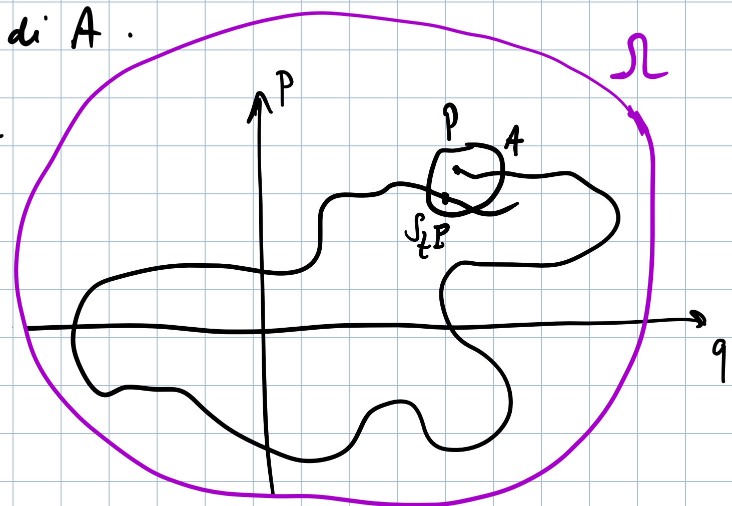
Indichiamo ora con S_t l'evoluzione temporale, ovvero
$$\{p(t), q(t)\} = S_t\{p(0), q(0)\}$$

Teorema di ricorrenza di Poincaré

Ipotesi: il moto avviene in un sottoinsieme Ω finito dello spazio delle fasi

Tesi: scelti un insieme $A \subset \Omega$ e un tempo T arbitrari, l'insieme dei punti $P \in A$ tali che $\exists t > T$ tale che $S_t P \in A$ (="ricorrenti") ha volume uguale al volume di A.

[ovvero l'insieme $P \in A$ che non ritorna mai in A per $\forall t > T$ ha misura nulla.]



Dimostrazione per assurdo

Neghiamo la tesi

Supponiamo per assurdo che esistano T, A tali che l'insieme dei punti $P \in A$ ricorrenti ha misura nulla.

Allora $V(S_{kT} A \cap A) \leq V(P \in A \text{ ricorrenti}) = 0$, $\forall k = 1, 2, 3, \dots$

Osserviamo che $V(A \cap B) = 0 \iff V[S_t(A \cap B)] = V[S_t A \cap S_t B] = 0$ per la conservazione del volume.

Allora:

$V[S_T A \cap A] = 0$

$V[S_{2T} A \cap A] = 0$ $\quad V[S_{2T} A \cap S_T A] = 0$

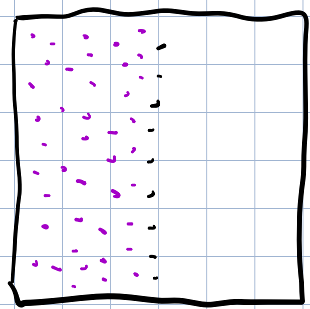
$V[S_{3T} A \cap A] = 0$ $\quad V[S_{3T} A \cap S_T A] = 0$ $\quad V[S_{3T} A \cap S_{2T} A] = 0$

e così via. Dunque $S_{kT} A$ è un insieme di volumi disgiunti e

$$V\left(\bigcup_{j=0}^{k-1} S_{jT} A\right) = k\, V(A) \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$$

contro l'ipotesi che $V(\Omega)$ è finito

Il teorema di ricorrenza di Poincaré è stato importante nel dibattito sui fondamenti della meccanica statistica.



Gas in un volume V

Siccome il moto avviene a energia costante

$$H = \sum_i \frac{\underline{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j} v(|\underline{q}_i - \underline{q}_j|)$$

Supponiamo un potenziale limitato dal basso, $v(r) \geq -B$

Il volume della superficie $H=E$ è finito,

- $\frac{1}{2m}\sum_i \underline{p}_i^2 \leq E + \frac{N(N-1)}{2}B$ è il volume di una sfera
- le $\underline{q}_i$ sono confinate nel volume V

Allora $\exists T$ tale che il gas ritorna vicino allo stato iniziale: sembra contraddire il secondo principio della termodinamica

Il problema non sussiste (cf. libro Gallavotti)

C. Trasformazioni Canoniche

Abbiamo detto che la forza del formalismo di Lagrange è di facilitare i cambiamenti di coordinate.

Come funzionano i cambiamenti di coordinate nel formalismo Hamiltoniano?

Scriviamo le equazioni di Hamilton in forma compatta:

$$\underline{x} = (q, p) \in \mathbb{R}^2$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\partial H/\partial p \\ -\partial H/\partial q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H/\partial q \\ \partial H/\partial p \end{pmatrix} = \eta \, \underline{\nabla} H$$

Che condizioni deve soddisfare un cambio di coordinate per mantenere questa struttura?

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} Q(p,q) \\ P(p,q) \end{pmatrix} = \underline{y}(\underline{x})$$

$$K(\underline{y}) = H(\underline{x}(\underline{y})) \qquad \frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial K}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

Nuova Hamiltoniana

$$\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \eta_{jk} \frac{\partial H}{\partial x_k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \eta_{jk} \frac{\partial K}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_k}$$

indici ripetuti sottintendono una somma

In forma matriciale

$$\dot{\underline{y}} = J \eta J^T \underline{\nabla} K \qquad \text{con} \qquad J_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Perché la struttura Hamiltoniana sia mantenuta bisogna che

$$J \eta J^T = \eta \qquad\qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

In componenti

$$J \eta J^T = \begin{pmatrix} -\frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \\ -\frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} = \{Q, P\} = 1$$

$$-\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = \{P, Q\} = -\{Q, P\} = -1$$

avendo introdotto la parentesi di Poisson

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}$$

o per molte coordinate

$$\{A, B\} = \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \right]$$

Proprietà importanti delle parentesi di Poisson.

$$\frac{d A(\underline{p}(t), \underline{q}(t))}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i \right] = \sum_i \left[- \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] = \{A, H\}$$

$$\{p_i, p_j\} = \sum_k \left[\cancel{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \cancel{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}} \right] = 0$$

$$\{q_i, q_j\} = 0$$

$$\{p_i, q_j\} = \sum_k \left[\cancel{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}} \cancel{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right] = -\sum_k \delta_{ik} \delta_{jk} = -\delta_{ij}$$

Se ci sono più componenti

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

La condizione $J \eta J^T = \eta$ diventa

$$\{P_i, P_j\} = 0$$

$$\{Q_i, Q_j\} = 0$$

$$\{P_i, Q_j\} = -\delta_{ij}$$

ovvero **una trasformazione è canonica se e solo se conserva le parentesi di Poisson**

Osserviamo anche che le parentesi di Poisson sono invarianti sotto una trasformazione canonica:

$$\{A,B\} = \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \right] = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial x_i}\eta_{ij}}\underbrace{\frac{\partial B}{\partial x_j}}$$

$$\underline{x} = (q_1 \cdots q_n \; p_1 \cdots p_n)$$

Indici ripetuti si sommano

$$A'(Q,P) = A\big(p(Q,P),\, q(Q,P)\big)$$

ovvero

$$A'(y) = A(x(y)) \qquad \text{e inversamente} \qquad A(x) = A'(y(x))$$

$$\{A,B\}_x = \frac{\partial A}{\partial x_i}\eta_{ij}\frac{\partial A}{\partial x_j} = \frac{\partial A'}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\eta_{ij}\frac{\partial A'}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial A'}{\partial y_k}\underbrace{J_{ki}\eta_{ij}J_{lj}}\frac{\partial A'}{\partial y_l} = \frac{\partial A'}{\partial y_k}\eta_{kl}\frac{\partial A'}{\partial y_l} =$$

$$J\eta J^T = \eta$$

se la trasformazione è canonica

$$= \{A',B'\}_y$$

Verifichiamo cosa succede con un normale cambio di coordinate:

$$Q(p,q) = Q(q) \qquad \text{non dipende da } p$$

Usando $\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \times \dot{q}$ abbiamo

$$P(p,q) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{1}{\frac{\partial Q}{\partial q}} = \frac{1}{\frac{\partial Q}{\partial q}} \times p$$

Verifichiamo che è canonica:

$$\{P,Q\} = \frac{\partial P}{\partial q}\cancel{\frac{\partial Q}{\partial p}} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{1}{\frac{\partial Q}{\partial q}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial q} = -1$$

Dunque le trasformazioni canoniche sono una classe più generale in cui $Q(p,q)$ può dipendere da p

Funzioni generatrici

Concretamente, come possiamo costruire delle trasformazioni canoniche?

$$p, q \longrightarrow P, Q \qquad e \qquad K(P,Q) = H(p(P,Q), q(P,Q))$$

Ricordiamo il principio di azione Hamiltoniano:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[p\dot{q} - H(p,q) \right]$$

$$A' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[P\dot{Q} - K(P,Q) \right]$$

Vogliamo che le due azioni siano equivalenti come nel caso Lagrangiano

Dal momento che H è la stessa, il termine $\int H dt$ è invariante.

Dunque dobbiamo imporre

$$A - A' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[p\dot{q} - P\dot{Q} \right] = \underbrace{S(x_2) - S(x_1)}$$

scelta più generale possibile che dipende solo dalle condizioni al bordo

Se esiste una funzione $G_1(q,Q)$ tale che

$$p = \frac{\partial G_1}{\partial q} \qquad P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q}$$

allora

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial G_1}{\partial q}\,\dot q + \frac{\partial G_1}{\partial Q}\,\dot Q \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{dG_1}{dt} = G_1[q(t_2),Q(t_2)] - G_1[q(t_1),Q(t_1)]$$

dunque la trasformazione è canonica.

Verifichiamo che la trasformazione soddisfa la condizione di canonicità

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

Tutte queste derivate sono fatte su $Q(p,q)$ e $P(p,q)$.

Ma noi abbiamo

$$p(q,Q) = \left.\frac{\partial G_1}{\partial q}\right|_Q \quad \text{e} \quad P(q,Q) = -\left.\frac{\partial G_1}{\partial Q}\right|_q$$

Consideriamo $P(q,Q(p,q))$, allora

$$\left.\frac{\partial P}{\partial p}\right|_q = \left.\frac{\partial P}{\partial Q}\right|_q \cdot \left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial q}\right|_p = \left.\frac{\partial P}{\partial q}\right|_Q + \left.\frac{\partial P}{\partial Q}\right|_q \left.\frac{\partial Q}{\partial q}\right|_p$$

$$\{Q,P\} = \cancel{\left.\frac{\partial Q}{\partial q}\right|_p \left.\frac{\partial P}{\partial Q}\right|_q \left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q} - \left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q \left.\frac{\partial P}{\partial q}\right|_Q - \cancel{\left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q \left.\frac{\partial P}{\partial Q}\right|_q \left.\frac{\partial Q}{\partial q}\right|_p}$$

Osserviamo che $\left.\frac{\partial P}{\partial q}\right|_Q = -\frac{\partial^2 G_1}{\partial Q \partial q} = -\left.\frac{\partial p}{\partial Q}\right|_q$

dunque $$\{Q,P\} = \left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q \left.\frac{\partial p}{\partial Q}\right|_q = 1$$

La funzione generatrice fornisce un modo semplice per costruire trasformazioni canoniche.

Esempio: $$G_1(q,Q) = qQ$$

$$p = \frac{\partial G_1}{\partial q} = Q \qquad P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q} = -q$$

Questa trasformazione scambia p e q ed è canonica. Il formalismo di Hamilton tratta p e q in modo simmetrico.

Però con $G_1(q,Q)$ dobbiamo invertire la relazione

$$p = \frac{\partial G_1}{\partial q} = p(q,Q) \quad \text{per avere} \quad Q(p,q)$$

La nostra condizione era $\int_{t_1}^{t_2} dt \left[p\dot{q} - P\dot{Q} \right] = \int_{t_1}^{t_1} dt \, \frac{dG_1}{dt}$

Ma possiamo integrare per parti:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[p\dot{q} + \dot{P}Q - \frac{d}{dt}(PQ) \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{dG_1}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[p\dot{q} + Q\dot{P} \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt}\left[G_1 + PQ \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{dG_2}{dt}$$

ovvero possiamo scegliere

$G_2(q, P)$ con $\begin{cases} p = \dfrac{\partial G_2}{\partial q} \\ Q = \dfrac{\partial G_2}{\partial P} \end{cases}$

Analogamente possiamo scegliere

$G_3(p, Q)$ con $\begin{cases} q = -\dfrac{\partial G_3}{\partial p} \\ P = -\dfrac{\partial G_3}{\partial Q} \end{cases}$

$G_4(p, P)$ con $\begin{cases} q = -\dfrac{\partial G_4}{\partial p} \\ Q = \dfrac{\partial G_4}{\partial P} \end{cases}$

Purtroppo ognuna di queste forme dipende da una coordinata vecchia e una nuova, dunque dobbiamo sempre invertire una relazione.

d. Metodo di Hamilton-Jacobi

Osserviamo che $(p,q)=(p(t),q(t)) = S_t(\underset{P}{p(0)},\underset{Q}{q(0)})$

è una trasformazione canonica.

Dimostrazione

La composizione di due trasformazioni canoniche è canonica, perché a ogni passo conserviamo le parentesi di Poisson

Possiamo decomporre con $\Delta t = t/n$

$$S_t(P,Q) = S_{\Delta t} \circ S_{\Delta t} \circ S_{\Delta t} \dots \circ S_{\Delta t}(P,Q)$$

dunque basta dimostrarlo per Δt infinitesimo.

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \rightarrow \quad p = P - \frac{\partial H}{\partial q}(P,Q)\Delta t$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \rightarrow \quad q = Q + \frac{\partial H}{\partial p}(P,Q)\Delta t$$

Verifichiamo che la parentesi di Poisson è uguale a uno:

$$\{q,p\} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = \left(1+\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}\Delta t\right)\left(1-\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\Delta t\right) + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\Delta t^2$$

$$= 1 + O(\Delta t^2)$$

qui all'ordine più basso in Δt abbiamo $P=p$ e $Q=q$

Componendo $n = t/\Delta t$ trasformazioni abbiamo un errore

$$\sim n\,\Delta t^2 = \frac{t^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Dunque ad ogni tempo t esiste una trasformazione canonica che mappa

$$S_t^{-1}(p(t), q(t)) = (p(0), q(0)) = (P, Q)$$

Ovvero nella nuova rappresentazione P e Q sono costanti.

Riusciamo a costruire esplicitamente questa trasformazione? Se sì, abbiamo risolto le equazioni del moto.

Il metodo di Hamilton-Jacobi consiste nel tentare di utilizzare le trasformazioni canoniche per risolvere le equazioni di Hamilton.

Per prima cosa bisogna generalizzare la nozione di trasformazione canonica ad una Hamiltoniana dipendente dal tempo.

Ripartiamo da

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[p\,\dot{q} - H(p,q,t) \right]$$

$$A' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[P\dot{Q} - K(P,Q,t) \right]$$

e $A - A' = S(x_2) - S(x_1)$

Ora però la trasformazione, e dunque la funzione generatrice, dipenderanno dal tempo. Usiamo una generatrice del secondo tipo, $G_2(q, P, t)$.

Vogliamo che

$$p\dot{q} - H(p,q,t) - P\dot{Q} + K(P,Q,t) = \frac{d}{dt}\left[G_2 - PQ\right] =$$

$$= \frac{\partial G_2}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial G_2}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial G_2}{\partial t} - P\dot{Q} - Q\dot{P}$$

Questo è vero se

$$p = \frac{\partial G_2}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial G_2}{\partial P} \qquad K = H + \frac{\partial G_2}{\partial t}$$

che generalizza il caso precedente.

Possiamo trovare una $G_2(q,P,t) = S(q,P,t)$ tale che $K=0$?

Se ci riusciamo, allora
$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0$$
$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0$$

e dunque le P, Q sono delle costanti che corrispondono alle costanti di integrazione del moto, ovvero i dati iniziali $P(0), Q(0)$.

Usando le equazioni precedenti troviamo

$$\frac{\partial S(q,P,t)}{\partial t} + H(p,q,t) = 0$$

Sappiamo che P è una costante e $p = \frac{\partial G_2}{\partial q} = \frac{\partial S}{\partial q}$

dunque

$$\frac{\partial S(q,P,t)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q}, q, t\right) = 0$$

Equazione di Hamilton - Jacobi

Hamilton-Jacobi per una Hamiltoniana indipendente da t

Possiamo generalizzare il conto precedente ogni volta che $H(p,q)$ non dipende da t. Allora

$$\frac{\partial S(q,P,t)}{\partial t} = -H\left(\frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q}, q, \cancel{t}\right)$$

Osserviamo che il lato di destra non dipende esplicitamente dal tempo. Allora S deve essere una funzione lineare del tempo.

Chiamiamo $P = E$ e cerchiamo $S(q,E,t) = W(q,E) - Et$

dunque $$\boxed{E = H\left(\frac{\partial W(q,E)}{\partial q}, q\right)}$$

Osserviamo che la nuova coordinata canonica P non è altro che l'energia, $E = P$

A questo punto dobbiamo

- risolvere per $W(q,E)$
- imporre $Q = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W}{\partial E}$
- invertire per trovare (p,q) in funzione di (E,Q)

Questa procedura si può generalizzare ad alcuni casi in dimensione più alta quando le variabili sono separabili, ad esempio nel problema dei due corpi (cf. note di Hitoshi Murayama)

Se ci sono più coordinate abbiamo

$$\frac{\partial S(q_1 \cdots q_k, P_1 \cdots P_k, t)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial S}{\partial q_k}, q_1 \cdots q_k, t\right) = 0$$

Equazione di Hamilton – Jacobi

Se H non dipende dal tempo, abbiamo

$$S(q_1 \cdots q_k, P_1 \cdots P_k, t) = W(q_1 \cdots q_k, P_1 \cdots P_k) - P_1 t \quad \text{e} \quad P_1 = E$$

con

$$E = H\left[\frac{\partial W}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial W}{\partial q_k}, q_1 \cdots q_k\right]$$

In questo caso, l'energia è una delle coordinate P, le altre sono le altre costanti di integrazione della equazione per $W(q_1 \cdots q_k, t)$

Confrontiamo i vari metodi che abbiamo studiato nel caso semplice del moto unidimensionale di un punto materiale in un potenziale $V(q)$

Lagrange

$$\mathcal{L}(\dot q, q) = \frac{1}{2} m \dot q^2 - V(q)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = m\ddot q = -V'(q)$$

Una equazione differenziale del secondo ordine, due dati iniziali $(\dot q_0, q_0)$

Hamilton

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

$$\begin{cases} \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -V'(q) \\ \dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \end{cases}$$

Due equazioni differenziali del primo ordine, due dati iniziali (p_0, q_0)

Hamilton-Jacobi (H non dipende dal tempo)

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}(q,E)\right)^2 + V(q)$$

$$\begin{cases} Q = \dfrac{\partial W}{\partial E}(q,E) - t \\ P = \dfrac{\partial W}{\partial q}(q,E) \end{cases}$$

e dunque

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\left(E - V(q)\right)}$$

Troviamo infine

$$S(q,E,t) = -Et + \int_{q_-}^{q} dx \sqrt{2m[E - V(x)]}$$

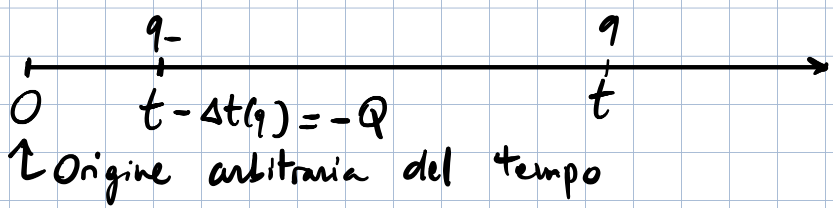
avendo fissato arbitrariamente la costante di integrazione dato che S è definita a meno di una costante.

Scriviamo

$$Q = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \int_{q_-}^{q} dx \frac{m}{\sqrt{2m[E - V(x)]}} = -t + \int_{q_-}^{q} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

questo è $\Delta t(q_- \to q)$ ovvero il tempo per andare da q_- a q

$$Q = \Delta t(q) - t$$
$$= -t_0$$



Dunque $-Q$ è il tempo dell'ultimo passaggio da q_- e non dipende dal tempo, ovvero Q è costante.

Dunque le coordinate canoniche sono

$$\begin{cases} E(p,q) = \dfrac{p^2}{2m} + V(q) \\ -t_0(p,q) = -t + \displaystyle\int_{q_-}^{q} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))}} \end{cases}$$

Abbiamo espresso il moto in termini di due costanti, un tempo di riferimento t_0 e l'energia E.

e. Integrabilità

Abbiamo visto che in principio si può sempre trovare una trasformazione canonica tale che
$K(P,Q,t) = 0$ e dunque P, Q sono costanti.

Tuttavia, anche se $H(p,q)$ non dipende dal tempo, questa trasformazione dipende dal tempo. Funziona a volte come metodo di soluzione ma non fornisce informazioni qualitative sul moto.

Possiamo trovare una trasformazione canonica indipendente dal tempo che mappa $H(p,q)$ in una Hamiltoniana semplice?

Chiedere $H = 0$ è troppo. Possiamo chiedere
$(p,q) \to (I,\theta)$ con $K(I,\theta) = H(I)$.

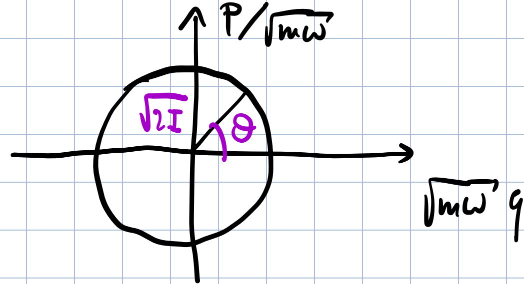
Se esiste una trasformazione del genere, allora

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{\partial K}{\partial I} = \omega(I) \\ \dot{I} = -\dfrac{\partial K}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad \text{dunque} \quad \begin{cases} \theta(t) = \theta(0) + \omega(I)t \\ I(t) = I(0) \end{cases}$$

Se θ è un angolo allora il moto è periodico di periodo $T(I) = 2\pi/\omega(I)$.

Le variabili (I,θ) sono dette azione-angolo.

Esempio: l'oscillatore armonico



$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

Poniamo
$$\begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{2I}{m\omega}}\, \sin\theta \\ p = \sqrt{2Im\omega}\, \cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} I = \dfrac{1}{\omega}\left[\dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2 q^2}{2}\right] \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{m\omega q}{p}\right) \end{cases}$$

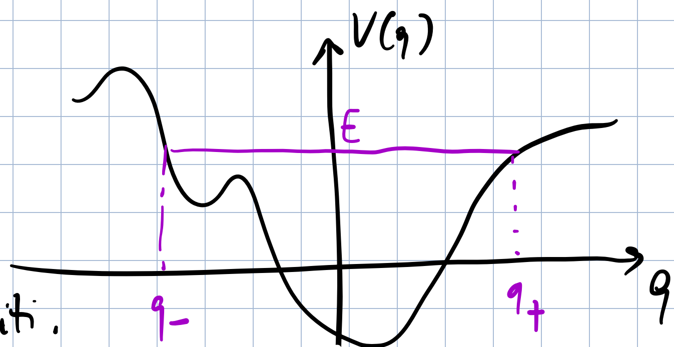
Allora $K(I,\theta) = \omega I$ non dipende da θ.

Verifichiamo che è canonica:

$$\{I,\theta\} = \frac{\partial I}{\partial q}\frac{\partial \theta}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial p}\frac{\partial \theta}{\partial q}$$

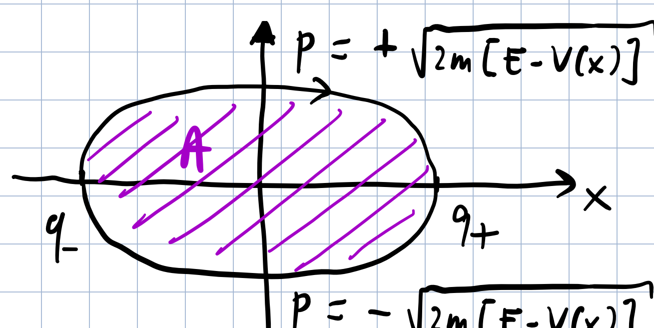
$$= m\omega q \, \frac{-\frac{m\omega q}{p^2}}{1+\left(\frac{m\omega q}{p}\right)^2} - \frac{p}{m\omega}\, \frac{\frac{m\omega}{p}}{1+\left(\frac{m\omega q}{p}\right)^2} = -1$$

Esempio: moti unidimensionali



Dobbiamo restringere il moto (ovvero il dato iniziale) alla regione dove (q_-, q_+) sono finiti.

Definiamo



$$I(E) = \frac{1}{\pi}\int_{q_-(E)}^{q_+(E)} dx\, \sqrt{2m(E-V(x))}$$

$$= A(E)/2\pi = \frac{1}{2\pi}\oint p\, dq$$

Scegliamo la trasformazione canonica

$$\begin{cases} I = I(E(p,q)) = \frac{1}{\pi}\int_{q_-}^{q_+} dx \sqrt{2m[E-V(x)]} \\ \theta = \frac{2\pi}{T(E)} t(p,q) = \frac{2\pi}{T(E)} \int_{q_-(E)}^{q} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}} \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} E(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \\ T(E) = 2\int_{q_-(E)}^{q_+(E)} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}} \end{cases}$$

ovvero dati $(p,q) \to E(p,q) \to T(E) \to (I,\theta)$

Abbiamo

$$\frac{dI}{dE} = \frac{1}{\pi}\int_{q_-(E)}^{q_+(E)} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}} + \frac{1}{\pi}\underbrace{\sqrt{2m[E-V(q_+)]}}_{=0}\frac{dq_+}{dE} + \frac{1}{\pi}\underbrace{\sqrt{2m[E-V(q_-)]}}_{=0}\frac{dq_-}{dE}$$

per def. di $q_\pm$

$$= \frac{T(E)}{2\pi} = \frac{1}{\omega(E)} \qquad \text{e dunque} \qquad \frac{dE}{dI} = \omega(E)$$

(Coerente con $\frac{dK}{dI} = \omega(I)$ perché K è l'energia)

Mostriamo che la trasformazione è canonica usando la funzione generatrice $G_2(P,q) = S(I,q)$

$$S(I,q) = \int_{q_-(E(I))}^{q} dx \sqrt{2m[E(I)-V(x)]}$$

Allora

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2m[E(I)-V(q)]} = p \\ \frac{\partial S}{\partial I} = \int_{q_-(E)}^{q} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E(I)-V(x)]}} \cdot \frac{dE}{dI} = \omega(E)\, t(p,q) = \theta \end{cases}$$

Troviamo le giuste derivate di S

In generale, per un sistema a più dimensioni:

$$H(p_1 \cdots p_n, q_1 \cdots q_n)$$

- Se esiste una trasformazione canonica

$$(\underline{p}, \underline{q}) \longrightarrow (\underline{I}, \underline{\theta}) \in \mathcal{V} \times [0, 2\pi)^n$$

$$H(\underline{p}, \underline{q}) \longrightarrow K(\underline{I})$$

allora
$$\begin{cases} \dot{I}_i = -\dfrac{\partial K}{\partial \theta_i} = 0 \\ \dot{\theta}_i = \dfrac{\partial K}{\partial I_i} = \omega_i(I) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_i(t) = I_i(0) \\ \theta_i(t) = \theta_i(0) + \omega_i(I)\, t \end{cases}$$

Il sistema è detto integrabile per quadrature

e tutti i moti sono quasi-periodici (o periodici)

- Viceversa, teorema di Liouville-Arnold

Se esistono n funzioni $I_i(\underline{p}, \underline{q})$ tali che

$\{H, I_i\} = 0 \quad \forall i$ ovvero sono costanti del moto

e $\{I_i, I_j\} = 0 \quad \forall i, j$

allora il sistema è integrabile per quadrature.

f. Piccole perturbazioni di un sistema integrabile

Abbiamo visto alcuni sistemi per i quali

$\underline{p}, \underline{q} \to \underline{I}, \underline{\theta}$ e $K(\underline{I})$ non dipende da $\underline{\theta}$.

Tutti i moti sono quasi periodici o periodici.

La lista include:

- Tutti i sistemi unidimensionali confinati
- I moti centrali (problema dei due corpi)
- I sistemi armonici
- La trottola libera e la trottola simmetrica pesante

Forse tutti i sistemi sono integrabili, e tutti i moti sono quasi periodici?

Proviamo allora a perturbare un sistema integrabile la cui Hamiltoniana è $H_0(\underline{I})$ e vediamo che succede.

$$H_\varepsilon(\underline{I}, \underline{\theta}) = H_0(\underline{I}) + \varepsilon \, f(\underline{I}, \underline{\theta})$$

Piccola perturbazione

Vediamo se possiamo trovare una trasformazione canonica verso un nuovo sistema integrabile $(\underline{I}', \underline{\theta}')$

Usiamo la funzione generatrice del secondo tipo

$$G_2(\underline{I}',\underline{\theta}) = \underline{I}'\cdot\underline{\theta} + \varepsilon\,\phi(\underline{I}',\underline{\theta})$$

con

$$\begin{cases} \theta_i' = \dfrac{\partial G_2}{\partial I_i'} = \theta_i + \varepsilon \dfrac{\partial \phi(\underline{I}',\underline{\theta})}{\partial I_i'} \\[2ex] I_i = \dfrac{\partial G_2}{\partial \theta_i} = I_i' + \varepsilon \dfrac{\partial \phi(\underline{I}',\underline{\theta})}{\partial \theta_i} \end{cases}$$

Quando $\varepsilon = 0$ questa trasformazione è l'identità, quando ε è piccolo dunque è vicina.

Dal momento che $\underline{I} = \underline{I}' + o(\varepsilon)$ possiamo scrivere

$$I_i = I_i' + \varepsilon \frac{\partial \phi(\underline{I},\underline{\theta})}{\partial \theta_i} + o(\varepsilon^2)$$ dunque al primo ordine la trasformazione è

$$\begin{cases} \theta_i' = \theta_i + \varepsilon \dfrac{\partial \phi(\underline{I},\underline{\theta})}{\partial I_i} + o(\varepsilon^2) \\[2ex] I_i' = I_i - \varepsilon \dfrac{\partial \phi(\underline{I},\underline{\theta})}{\partial \theta_i} + o(\varepsilon^2) \end{cases}$$

Come determiniamo $\phi(\underline{I}',\underline{\theta})$?

La nuova Hamiltoniana è

al primo ordine $\underline{I}=\underline{I}',\ \underline{\theta}=\underline{\theta}'$

$$K(\underline{I}',\underline{\theta}') = H_0\left[\underline{I}' + \varepsilon \nabla_{\underline{\theta}}\phi(\underline{I}',\underline{\theta})\right] + \varepsilon\, f(\underline{I}',\underline{\theta}')$$

$$\approx H_0(\underline{I}') + \varepsilon\, \nabla_{\underline{I}} H_0(\underline{I}')\cdot\nabla_{\underline{\theta}}\phi(\underline{I}',\underline{\theta}') + \varepsilon\, f(\underline{I}',\underline{\theta}') + o(\varepsilon^2)$$

Ricordiamo che

$$\omega_i(\underline{I}) = \frac{\partial H_0(\underline{I})}{\partial I_i} \quad \text{o} \quad \underline{\omega}(\underline{I}) = \nabla_{\underline{I}} H_0(\underline{I})$$

Per mantenere l'integrabilità vogliamo che la correzione in ε non dipenda da $\underline{\theta}'$, dunque

$$H_1(\underline{I}') = \underline{\omega}(\underline{I}') \cdot \nabla_{\underline{\theta}} \phi(\underline{I}', \underline{\theta}') + f(\underline{I}', \underline{\theta}')$$

Notiamo che θ_i' sono angoli in $[0, 2\pi)$ dunque se integriamo abbiamo che l'integrale di $\nabla_{\underline{\theta}}\phi$ è nullo e

$$H_1(\underline{I}') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\underline{\theta}' \, f(\underline{I}', \underline{\theta}')$$

La correzione ad H è la media della perturbazione.

Come troviamo ϕ?

Sviluppiamo in serie di Fourier:

$$\phi(\underline{I}', \underline{\theta}') = \sum_{\underline{k}} \phi_{\underline{k}}(\underline{I}') e^{i \underline{k} \cdot \underline{\theta}'}$$

$$f(\underline{I}', \underline{\theta}') = \sum_{\underline{k}} f_{\underline{k}}(\underline{I}') e^{i \underline{k} \cdot \underline{\theta}'}$$

con $\underline{k} \in \mathbb{Z}^n$

e dunque

$$i[\underline{\omega}(\underline{I}) \cdot \underline{k}] \, \phi_{\underline{k}}(\underline{I}) = f_{\underline{k}}(\underline{I})$$

ovvero

$$\phi_{\underline{k}}(\underline{I}) = \frac{-f_{\underline{k}}(\underline{I})}{i[\underline{\omega}(\underline{I}) \cdot \underline{k}]} \quad \text{per } \underline{k} \neq \underline{0}$$

Qui vediamo il possibile problema.
(detto "problema dei piccoli denominatori")

Ad esempio per $n=2$ abbiamo la funzione generatrice

$$\phi(I_1', I_2', \theta_1, \theta_2) = \sum_{k_1, k_2} \frac{f_{k_1,k_2}(I_1' I_2')}{i[\omega_1(\underline{I}')k_1 + \omega_2(\underline{I}')k_2]} e^{i\underline{k}\cdot\underline{\theta}}$$

dove $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Dunque se $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$, il denominatore si annulla per infiniti valori di k_1, k_2.

Anche se $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$, sappiamo che i razionali sono densi dunque il denominatore potrebbe diventare molto piccolo.

Genericamente, al variare di $\underline{I}$, ω_1/ω_2 varia con continuità e incontra infiniti valori razionali.

Teorema di trivialità di Poincaré

Genericamente, una perturbazione di un sistema integrabile non può essere trasformata in un sistema integrabile da una trasformazione canonica $T(\underline{I}, \underline{\theta}, \varepsilon)$ che dipende analiticamente da $\underline{I}, \underline{\theta}, \varepsilon$ e tende all'identità per $\varepsilon \to 0$.

Infatti, se la trasformazione fosse analitica in $(\underline{I},\underline{\theta},\varepsilon)$, la sua derivata prima rispetto ad ε in $\varepsilon=0$ sarebbe una funzione analitica di $\underline{I},\underline{\theta}$.

Ma questo richiede $f_{\underline{k}}(\underline{I})=0$ ogni volta che $\underline{\omega}(\underline{I})\cdot\underline{k}=0$

Dato che $\underline{\omega}(\underline{I})$ dipende da H_0 mentre $f_{\underline{k}}(\underline{I})$ dipende dalla perturbazione, e le due sono indipendenti, genericamente non c'è ragione per cui la proprietà richiesta sia vera.

Cambiamento di prospettiva

Invece di integrare tutto il sistema, possiamo chiederci se, per ε piccolo, esiste un moto del sistema perturbato che sia quasi periodico con le stesse frequenze del moto imperturbato, ovvero $\underline{\omega}=\underline{\omega}_0$

Se $\underline{\omega}\cdot\underline{k}=0$ per $\underline{k}\in\mathbb{Z}^n$ al primo ordine in ε abbiamo un denominatore nullo: moto "risonante", viene distrutto dalla perturbazione.

Non è ovvio che la serie in $\underline{k}$ converga, e agli ordini successivi in ε abbiamo problemi simili.

Ciononostante, molti moti quasi periodici sopravvivono per ε piccolo: teorema KAM.

Contemporaneamente appaiono moti "caotici" (non quasi periodici)

La situazione è complessa...

(cf. il libro di Gallavotti per approfondire)

Applicazione : piccole oscillazioni di problemi vincolati

Consideriamo un sistema con Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i^2 - V(x_1 \dots x_N)$$

NB: il termine cinetico può rappresentare sia punti materiali che corpi rigidi con $m_i \dot{x}_i^2 \to I_i \dot{\theta}_i^2$

Se introduciamo dei vincoli abbiamo delle coordinate $q_1 \dots q_n$ e

$$x_i(q_1 \dots q_n) \Rightarrow \dot{x}_i(q) = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_a} \dot{q}_a$$

Ottengo una Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\sum_a \frac{\partial x_i}{\partial q_a} \dot{q}_a\right)\left(\sum_b \frac{\partial x_i}{\partial q_b} \dot{q}_b\right) - V(x(q))$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ab} g_{ab}(q)\, \dot{q}_a \dot{q}_b - V(q_1 \dots q_n)$$

con $g_{ab}(q) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a}\frac{\partial x_i}{\partial q_b}$ è una matrice $n \times n$ simmetrica.

Dunque $$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \frac{1}{2}\dot{q}^T \hat{g}(q)\, \dot{q} - V(q)$$

dove $\dot{q}$ e q sono vettori con n componenti.

Passiamo alle Hamiltoniane:

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} = \sum_b g_{ab}(q)\, \dot{q}_b \qquad \text{ovvero} \qquad p = \hat{g}(q)\, \dot{q}$$

dunque $\dot{q} = \hat{g}^{-1}(q)\, p$ e $\dot{q}^T = p^T \hat{g}^{-1}(q)$

$$H(p,q) = \sum_a p_a \dot{q}_a - \mathcal{L}(\dot{q},q) = p^T \dot{q} - \mathcal{L}(\dot{q},q)$$

$$= p^T \hat{g}^{-1}(q)\, p - \frac{1}{2} p^T \hat{g}^{-1} \hat{g}\, \hat{g}^{-1} p + V(q)$$

$$= \frac{1}{2} p^T \hat{g}^{-1}(q)\, p + V(q)$$

$$(\text{in componenti}) = \frac{1}{2} \sum_{ab} p_a\, g^{-1}_{ab}(q)\, p_b + V(q_1 \cdots q_n)$$

I punti di equilibrio hanno $\dot{q} = 0$ dunque $p = \hat{g}\, \dot{q} = 0$

e

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a} = \underbrace{-\frac{1}{2} p^T \frac{\partial \hat{g}^{-1}(q)}{\partial q_a} p}_{=0 \text{ perché } p=0} - \frac{\partial V}{\partial q_a} = 0$$

Dunque i punti di equilibrio sono dati da $\dfrac{\partial V}{\partial q_a} = 0$ e $p = 0$ indipendentemente da $g(q)$

Ora studiamo le piccole oscillazioni intorno a un equilibrio $(p=0, q=\bar{q})$ con $\bar{q}$ soluzione di $\frac{\partial V}{\partial q_a}=0$

Supponiamo che $q_a - \bar{q}_a = \delta q_a(t)$ piccolo.

Abbiamo $\dot{q}_a = \delta \dot{q}_a$ dello stesso ordine di δq_a

Allora $p = \hat{g}(q)\,\dot{q} \approx \hat{g}(\bar{q})\,\delta\dot{q} + o(\delta q^2)$ e possiamo ignorare la dipendenza di $\hat{g}$ da q: $\bar{g} = \hat{g}(\bar{q})$

Abbiamo $$V(q) \approx V(\bar{q}) + \sum_a \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_a}(\bar{q})}_{=0}\,\delta q_a + \frac{1}{2}\sum_{ab} \delta q_a \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial q_b}}_{= K_{ab}(\bar{q}) = \bar{K}_{ab}}\,\delta q_b + o(\delta q^3)$$

Concludiamo che

$$\mathcal{L}(\dot{q},q) = \frac{1}{2}\dot{q}^T \bar{g}\,\dot{q} - \frac{1}{2}(q-\bar{q})^T \bar{K} (q-\bar{q})$$

$$H(p,q) = \frac{1}{2} p^T \bar{g}^{-1} p + \frac{1}{2}(q-\bar{q})^T \bar{K} (q-\bar{q})$$

Ricordiamo che $g_{ab}(q) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a}\frac{\partial x_i}{\partial q_b}$ dunque

$$v^T g v = \sum_{ab} v_a g_{ab} v_b = \sum_i m_i \left(\sum_a \frac{\partial x_i}{\partial q_a} v_a\right)^2 \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

dunque g è definita positiva

L'equilibrio è stabile se tutti gli autovalori di $\bar{K}$ sono positivi (dal teorema di Lagrange-Dirichlet)

Le equazioni del moto sono $\bar{g}\,\ddot{q} = -\bar{K}\,(q-\bar{q})$

con $\bar{g}, \bar{K}$ simmetriche e definite positive

Possiamo scrivere $\ddot{q} = -\bar{g}^{-1}\bar{K}\,(q-\bar{q})$

Se $\bar{g}^{-1}\bar{K}$ è diagonalizzabile, otteniamo un insieme di

n oscillatori armonici indipendenti

Problema: in generale $\bar{g}$ e $\bar{K}$ non commutano dunque

$(\bar{g}^{-1}\bar{K})^T = \bar{K}^T g^{-1T} = \bar{K}\,\bar{g}^{-1} \neq \bar{g}^{-1}\bar{K}$ non è simmetrica

Non è detto che si possa diagonalizzare

ovvero non è detto che $\bar{g}, \bar{K}$ si possano diagonalizzare

simultaneamente.

Teorema (cf. note Fremento)

$\bar{g}, \bar{K}$ matrici simmetriche della stessa dimensione

con $\bar{g}$ definita positiva.

Diagonalizziamo $\bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & g_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & g_K \end{pmatrix}$

Definiamo

$R = \sqrt{\bar{g}} = \begin{pmatrix} \sqrt{g_1} & & 0 \\ & \sqrt{g_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \sqrt{g_K} \end{pmatrix}$ nella base dove $\bar{g}$ è diagonale,

scegliendo le radici reali e positive.

Allora $R = R^T$ e $\bar{g} = R^2$

La matrice $Q = R^{-1}\bar{K}R^{-1}$ è simmetrica, dunque la possiamo diagonalizzare: $Q = R^{-1}\bar{K}R^{-1} = B\Lambda B^{-1}$

dove $B^{-1} = B^T$ è ortogonale e $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}$

NB: $v^T Q v = v^T R^{-1}\bar{K}R^{-1} v = w^T \bar{K} w > 0, \ \forall v \in \mathbb{R}^n$
perché $\bar{K}$ è definita positiva. Dunque $\lambda_a > 0, \ \forall a$

Poniamo $C = R^{-1}B$

Allora
$$\begin{cases} C^T\bar{K}C = B^T R^{-1}\bar{K}R^{-1}B = B^T B \Lambda B^{-1} B = \Lambda \\ C^T \bar{g} C = B^T R^{-1} R^2 R^{-1} B = B^T B = \mathbb{1} \end{cases}$$

Se scriviamo $q - \bar{q} = C\varepsilon$ abbiamo $\bar{g}C\ddot{\varepsilon} = -\bar{K}C\varepsilon$

dunque $C^T\bar{g}C\ddot{\varepsilon} = -C^T\bar{K}C\varepsilon$

dunque $\ddot{\varepsilon} = -\Lambda\varepsilon$ Le coordinate ε sono n oscillatori armonici indipendenti

$\omega_a = \sqrt{\lambda_a}$

$$\ddot{\varepsilon}_a = -\omega_a^2 \varepsilon_a \Rightarrow \varepsilon_a(t) = \varepsilon_a(0)\cos(\omega_a t) + \frac{\dot{\varepsilon}_a(0)}{\omega_a}\sin(\omega_a t)$$

In generale $q = \bar{q} + C\varepsilon$ è una combinazione lineare di questi oscillatori armonici

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(t) \end{pmatrix}$$

Se scegliamo un dato iniziale tale che $\varepsilon_b(0) = \dot{\varepsilon}_b(0) = 0$

per tutti i $b \neq a$ tranne uno allora

$q = \bar{q} + C_a \varepsilon_a(t)$ è un singolo oscillatore armonico

dove q oscilla lungo il vettore C_a colonne di C

Concludiamo che

$$\begin{cases} C_a \text{ colonne di } C \text{ sono i modi normali di oscillazione} \\ \omega_a = \sqrt{\lambda_a} \text{ sono le frequenze dei modi normali} \end{cases}$$

Come li calcoliamo? (cf. note Emerenko)

I λ_a sono soluzioni di $\det(\bar{K} - \lambda \bar{g}) = 0$

Dimostrazione: λ_a sono autovalori di $Q = R^{-1} \bar{K} R^{-1}$

Quindi

$$0 = \det(Q - \lambda I) = \det(R^{-1} \bar{K} R^{-1} - \lambda I) =$$
$$= \det\left[R^{-1} (\bar{K} - \lambda R^2) R^{-1} \right] =$$
$$= \det(R^{-1}) \det(\bar{K} - \lambda \bar{g}) \det(R^{-1})$$

ma $\det(R^{-1}) = 1/\det(R) \neq 0 \Rightarrow \det(\bar{K} - \lambda \bar{g}) = 0$

I vettori C_a sono dati da $C = R^{-1} B$ dunque $C_a = R^{-1} b_a$

dove b_a sono gli autovettori di Q (colonne di B)

$$Q b_a = \lambda_a b_a \Rightarrow R^{-1} \bar{K} R^{-1} R C_a = \lambda_a R C_a \Rightarrow \bar{K} C_a = \lambda_a R^2 C_a$$

e dunque $\bar{K} C_a = \lambda_a \bar{g} C_a$