Relatività ristretta

a. Elettromagnetismo

Nel 19esimo secolo si era arrivati a formulare una teoria completa dei fenomeni elettromagnetici, riassunta dalle equazioni di Maxwell.

Questa teoria prevede la propagazione di onde elettromagnetiche, tra cui la luce visibile, con velocità $c \sim 3 \times 10^8$ m/s, predetta dalla teoria in funzione di due costanti che dipendono solo dal mezzo in cui queste onde si propagano.

Questo è in ovvio contrasto con l'invarianza Galileiana, secondo cui le leggi fisiche sono le stesse in tutti i riferimenti inerziali e dunque le velocità dipendono dal riferimento.

Proposta: forse le equazioni di Maxwell valgono solamente in uno specifico riferimento inerziale?

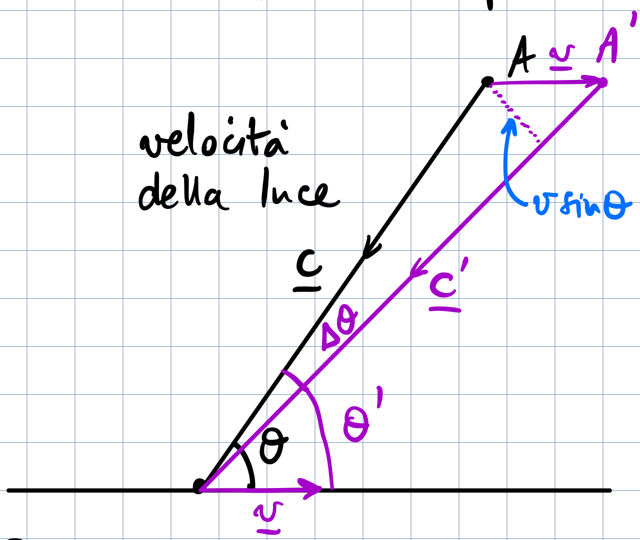
Idea soggiacente: se la luce è un'onda, qualcosa deve "ondeggiare". Chiamiamo questo qualcosa "etere" e il riferimento speciale è quello in cui l'etere è fermo (questo è vero ad esempio per le onde sonore).

Idea naturale per l'epoca: l'etere è il riferimento delle stelle fisse.

Due osservazioni sembravano confermare questa proposta.

- **Aberrazione stellare**

A stella fissa all'infinito



O osservatore fisso rispetto all'etere

O' osservatore in moto con velocità $\underline{v}$

L'osservatore O' vede una velocità $\underline{c}' = \underline{c} - \underline{v}$

$$\tan\theta = \frac{c_y}{c_x} = \frac{c\sin\theta}{c\cos\theta}$$

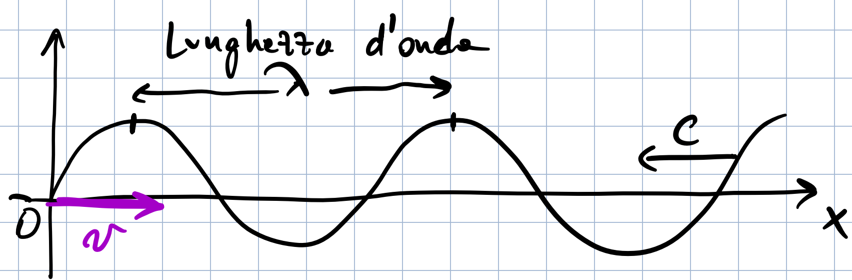
$$\tan\theta' = \frac{c'_y}{c'_x} = \frac{c_y}{c_x + v} = \frac{c\sin\theta}{c\cos\theta + v} = \frac{\tan\theta}{1 + \frac{v}{c\cos\theta}}$$

Per $v \ll c$ abbiamo

$$\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta \approx \frac{v\sin\theta}{c}$$

- **Effetto Doppler**

Onda in quiete rispetto all'etere



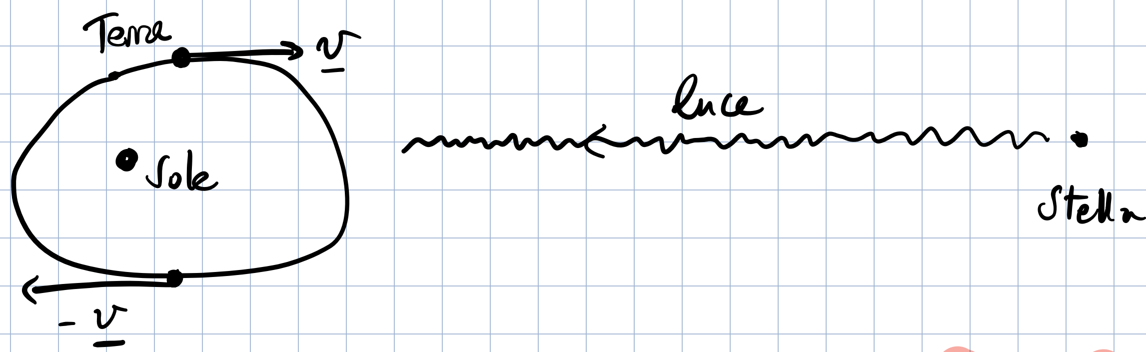
Frequenza $\nu = c/\lambda$ misurata da un osservatore immobile perché la cresta successiva arriva dopo un tempo $t = \lambda/c$

Un osservatore O' in moto misura una frequenza

$$\nu' = \frac{c + v}{\lambda}$$

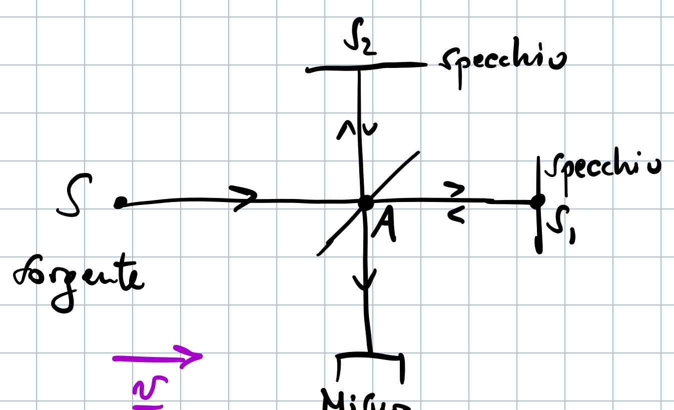
$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{v}{c}$$

Entrambe le osservazioni potevano farsi usando misure in stagioni diverse, per esempio



NB: $v_{Terra} \sim 30\ km/s \Rightarrow \frac{v}{c} \approx 10^{-4}$

Idea di Michelson - Morley: misuriamo il moto della terra rispetto all'etere.



velocità dell'apparato rispetto all'etere

$$l_1 = |AS_1| \neq l_2 = |AS_2|$$

$$T_1 = \frac{l_1}{c+v} + \frac{l_1}{c-v} = \frac{2l_1}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$T_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \leftarrow c_{eff}$$

$\hat{\uparrow}$ c_{eff} nel riferimento dell'apparato

$$|c_{eff} + \underline{v}|^2 = c_{eff}^2 + v^2 = c^2$$

Sfasamento

$$\Delta t = T_2 - T_1$$

Ruotando l'apparato di 90° possiamo scambiare ℓ_1 con ℓ_2 e otteniamo

$$\tau = \Delta t' - \Delta t = \frac{2(\ell_1+\ell_2)}{c}\left[\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] \approx \frac{\ell_1+\ell_2}{c} \times \frac{v^2}{c^2}$$

L'apparecchiatura fu migliorata al punto di avere una risoluzione $\Delta v \sim 1.5\ km/s \ll v_{terra}$

ma si vedeva sempre $\tau = 0$

Dunque la velocità della luce è sempre c.

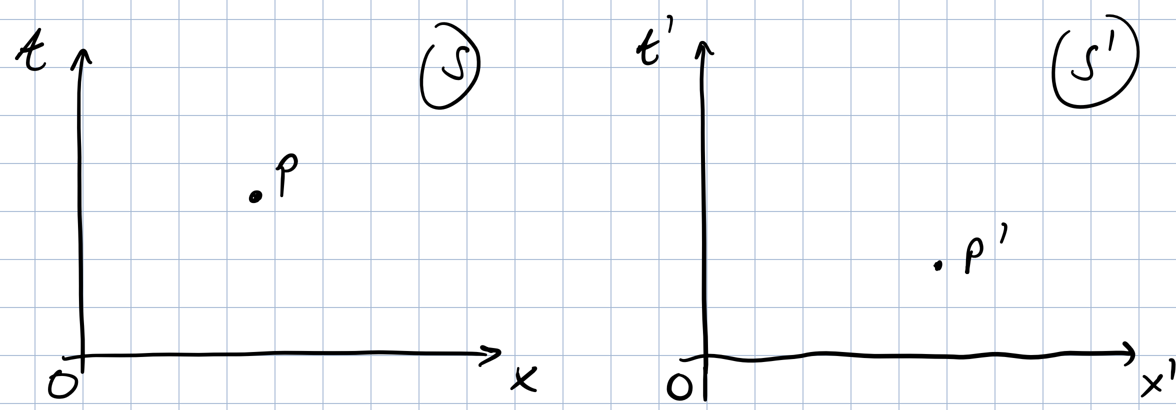
Forse l'etere è solidale con la terra?

- strano
- in contraddizione con aberrazione stellare ed effetto Doppler

6. Trasformazioni di Lorentz

Idea: magari per qualche motivo le distanze tra oggetti cambiano a seconda del moto relativo all'etere, in modo da mantenere c invariata?

- Cerchiamo una trasformazione tale che la velocità della luce rimane invariata in tutti i riferimenti inerziali.



$$x' = f(x,t) \qquad t' = g(x,t)$$

- Un moto rettilineo uniforme deve restare tale in tutti i riferimenti inerziali. Dunque la trasformazione deve essere lineare:
$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2 t$$
$$t' = \alpha_3 x + \alpha_4 t$$

- Il sistema S' si muove a velocità v rispetto a S

dunque $(x,t) = (vt, t) \longrightarrow x' = 0$

che implica $x' = \gamma_v (x - vt)$

e all'inverso $(x', t') = (-vt', t') \longrightarrow x = 0$

dunque $x = \gamma_{-v} (x' + vt')$

- Non c'è ragione per cui un sistema S' che si muove con velocità v si comporti diversamente da uno con velocità $-v$, dunque è ragionevole assumere $\gamma_v = \gamma_{-v}$

Allora
$$\begin{cases} x' = \gamma_v \cdot (x - vt) \\ t' = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\gamma_v} - x'\right) = \frac{1}{v}\left[\frac{x}{\gamma_v} - \gamma_v x + \gamma_v vt\right] \end{cases}$$

- Adesso imponiamo che c sia la stessa nei due sistemi, ovvero
$$x = ct \longleftrightarrow x' = ct'$$

Allora $ct' = \gamma_v (ct - vt)$ e $ct = \gamma_v (ct' + vt')$

Perché siano compatibili dobbiamo avere
$$\frac{t'}{t} = \frac{\gamma_v (c - v)}{c} = \frac{c}{\gamma_v (c + v)}$$

ovvero
$$\gamma_v^2 = \frac{c^2}{(c-v)(c+v)} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

$$\gamma_v = \sqrt{\frac{1}{1 - v^2/c^2}}$$

Otteniamo la trasformazione di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma_v (x - vt) \\ t' = \gamma_v \left[t - \frac{1}{v}\left(1 - \frac{1}{\gamma_v^2}\right) x\right] = \gamma_v \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \end{cases}$$

Possiamo aggiungere le direzioni y e z trasversali al moto relativo di S' rispetto a S, e otteniamo

$$\begin{cases} x' = \gamma_v \left(x - \frac{v}{c} \cdot ct \right) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma_v \left(ct - \frac{v}{c} x \right) \end{cases}$$

Usiamo ct invece di t per avere le stesse dimensioni.

Lorentz aveva verificato che le equazioni di Maxwell sono invarianti (hanno la stessa forma) in tutti i riferimenti legati da trasformazioni di questo tipo.

Esercizio Verificare che $y = ct$ diventa un moto rettilineo uniforme con velocità c in S'.

Esercizio equazione delle onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

Verificare che è invariante.

Dato che nello spazio (x, y, z) abbiamo invarianza per rotazioni e traslazioni, possiamo combinare queste invarianze per scrivere le trasformazioni di Lorentz tra sistemi che si muovono con velocità $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$ generica

Idea di Einstein (1905)

Perché insistere con l'etere? Assumiamo semplicemente che le trasformazioni di Lorentz sono quelle che legano tra loro i sistemi inerziali.

Formuliamo così la teoria della relatività ristretta.

- I sistemi inerziali si muovono con velocità costante l'uno rispetto all'altro
- le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali.

Questa nozione di relatività generalizza quella Galileiana. Osserviamo che:

- Dato che le equazioni di Maxwell sono leggi della fisica, il secondo postulato implica che c è la stessa in tutti i riferimenti inerziali e che le trasformazioni tra sistemi inerziali sono quelle di Lorentz.
- Quando $v \ll c$, $\gamma \simeq 1$ e la nuova nozione di relatività si riduce a quella di Galileo:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

c. Cono di luce e causalità

Studiamo adesso le conseguenze fisiche di queste ipotesi.

La novità principale è che il tempo non è più assoluto ma dipende dal sistema di riferimento.

Questo pone immediatamente un problema: l'ordine temporale degli eventi potrebbe dipendere dal sistema di riferimento. Cosa accade al principio di causalità?

Consideriamo due eventi spazio-temporali di coordinate

$E_1 \to (t_1, x_1, y_1, z_1)$ $\qquad \Delta t = t_2 - t_1$

$E_2 \to (t_2, x_2, y_2, z_2)$ $\qquad \Delta x = x_2 - x_1$ etc.

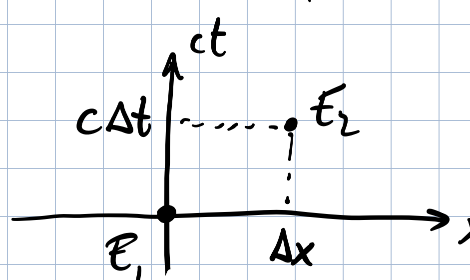
Scegliamo $\Delta y = \Delta z = 0$ per semplicità.

Possiamo sempre traslare (x,t) in modo che E_1 sia nell'origine, $t_1 = 0$ e $x_1 = 0$.

Vediamo come cambia da un sistema di riferimento a un altro:

$$\Delta x' = \gamma_v \left(\Delta x - \frac{v}{c} c\Delta t \right)$$

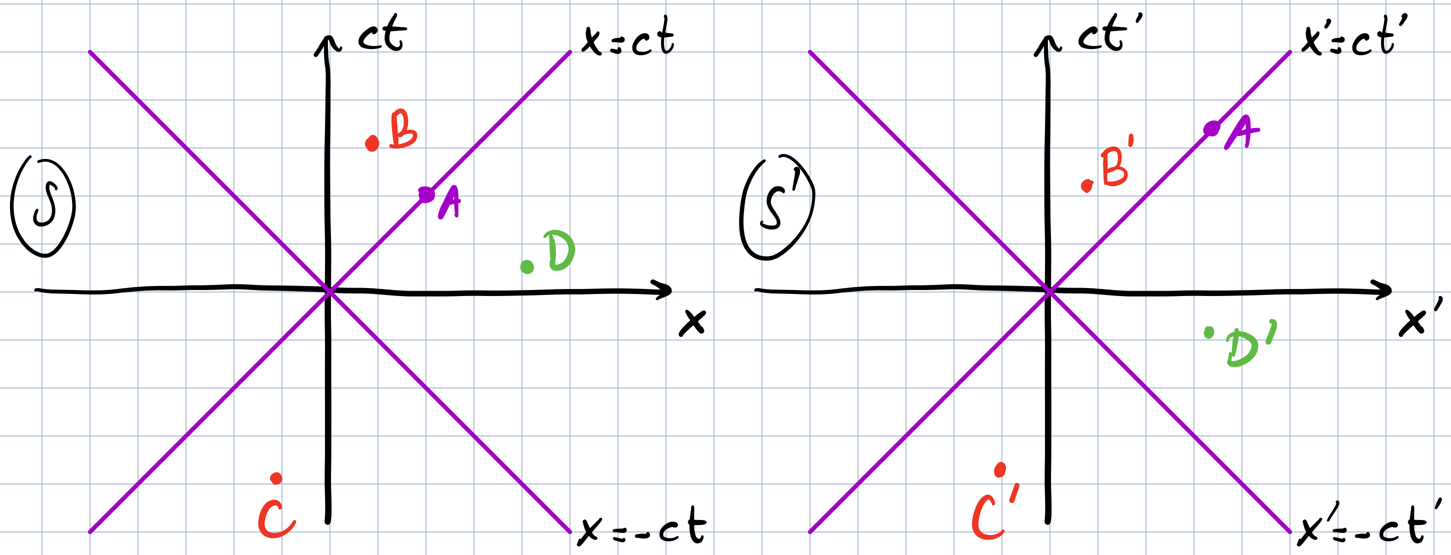
$$c\Delta t' = \gamma_v \left(c\Delta t - \frac{v}{c} \Delta x \right)$$



Due eventi simultanei in S $(\Delta t = 0)$ non lo sono in S' $\left(\Delta t' = -\gamma_v \frac{v \Delta x}{c^2}\right)$

$\Delta t'$ può cambiare segno se Δx è sufficientemente grande.

Cono di luce



$$\begin{cases} \Delta x' = \gamma_v \left(\Delta x - \frac{v}{c} \, c\Delta t \right) \\ c\Delta t' = \gamma_v \left(c\Delta t - \frac{v}{c} \Delta x \right) \end{cases}$$

- Osserviamo che $|v|<c$ altrimenti $\gamma_v = \sqrt{\frac{1}{1-v^2/c^2}}$ è immaginario o infinito. Dunque le trasformazioni di Lorentz hanno senso solo se $|v|<c$.

- Osserviamo che $c\Delta t' - \Delta x' = \gamma_v \left(1+\frac{v}{c}\right)(c\Delta t - \Delta x)$ e dato che $v>-c$, $c\Delta t' - \Delta x'$ ha lo stesso segno di $c\Delta t - \Delta x$.

  Stesso ragionamento per $c\Delta t' + \Delta x' = \gamma_v \left(1-\frac{v}{c}\right)(c\Delta t + \Delta x)$.

Concludiamo che

- Le bisettrici sono invarianti $\begin{cases} \Delta x = c\Delta t \leftrightarrow \Delta x' = c\Delta t' \\ \Delta x = -c\Delta t \leftrightarrow \Delta x' = -c\Delta t' \end{cases}$
- Punti al di sopra delle bisettrici rimangono al di sopra (stessa cosa al di sotto)
- Punti a destra o a sinistra delle bisettrici possono cambiare il segno di Δt.

Chiamiamo cono di luce la regione $|c\Delta t| \geq |\Delta x|$

I punti all'interno del cono di luce conservano il loro ordinamento temporale in tutti i sistemi di riferimento.

Il problema dell'ordinamento temporale si pone solo se $|\Delta x| > |c\Delta t|$. Ma in questo caso, un oggetto che viaggia da E_1 a E_2 ha velocità maggiore di c.

Se assumiamo che niente viaggia a velocità maggiore di c, allora non abbiamo problemi perché E_1 non può influenzare E_2 e viceversa.

Abbiamo due condizioni che indicano che la velocità della luce è la massima possibile:

- la condizione che γ sia reale e finito
- la condizione di causalità

Tempo proprio

Chiamiamo $\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2$

NB: non per forza positivo

$\Delta s^2 > 0$ distanza di tipo tempo (time-like)

$\Delta s^2 = 0$ distanza di tipo luce (light-like)

$\Delta s^2 < 0$ distanza di tipo spazio (space-like)

Osserviamo che

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = \gamma_v^2\left[(c\Delta t)^2 + \frac{v^2}{c^2}\Delta x^2 - \cancel{2v\Delta x\Delta t}\right]$$

$$-\gamma_v^2\left[\Delta x^2 + \frac{v^2}{c^2}(c\Delta t)^2 - \cancel{2v\Delta x\Delta t}\right] = \underbrace{\gamma_v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}_{=1}\Delta s^2$$

dunque $(\Delta s')^2 = \Delta s^2$ è invariante

Un oggetto in movimento con $|v| \leq c$ avrà $\Delta s^2 \geq 0$.

Allora possiamo definire

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c}$$ tempo proprio

Il nome deriva dal fatto che nel riferimento in cui l'oggetto è immobile $\Delta x = 0$ e $\Delta\tau = \Delta t$.

Tuttavia, $\Delta\tau$ è lo stesso in tutti i sistemi di riferimento.

d. Dilatazione dei tempi, contrazione delle lunghezze, conseguenze osservabili

Consideriamo un orologio fermo nel riferimento S' $(x'=0)$ che ticchetta ogni T' secondi, $t'_k = kT'$, $k \in \mathbb{N}$.

Cosa si osserva nel riferimento S?

$$\begin{cases} x = \gamma\left(x' + \frac{v}{c} ct'\right) \\ ct = \gamma\left(ct' + \frac{v}{c} x'\right) \end{cases}$$ dunque $t_k = \gamma t'_k = k\gamma T'$

I ticchettii nel sistema S sono dilatati di $\gamma > 1$.

Consideriamo adesso una barra rigida di lunghezza L' che si trova immobile in $0 \le x' \le L'$.

Nel riferimento S osserviamo che i due estremi sono

$$\begin{cases} x_0 = \gamma\, vt' \\ x_L = \gamma\left(L' + vt'\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} t_0 = \gamma t' \\ t_L = \gamma t' + \gamma \frac{v}{c^2} L' \end{cases}$$

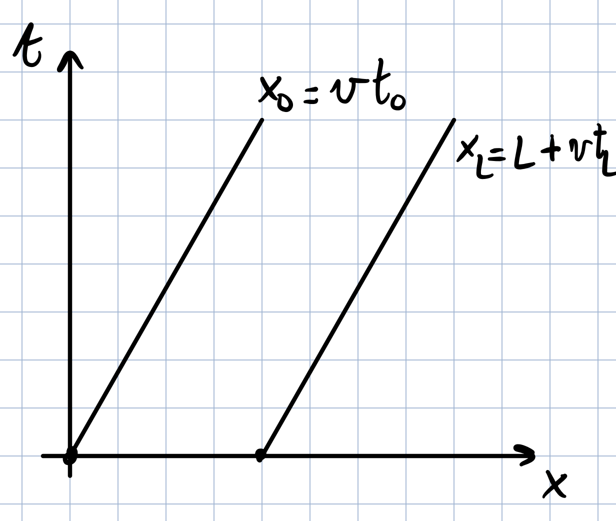
La "lunghezza" della barra nel sistema S va misurata confrontando i due estremi allo stesso tempo.

Abbiamo

$$x_0 = v t_0$$

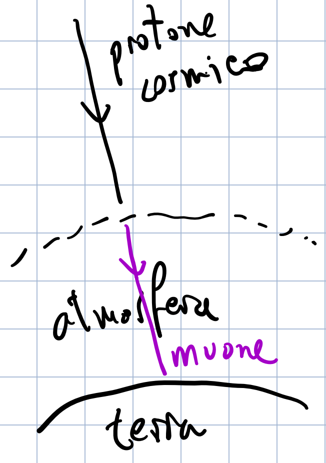
$$x_L = \gamma L' + \gamma v\left(\frac{1}{\gamma} t_L - \gamma \frac{v}{c^2} L'\right)$$

$$= \underbrace{\gamma L'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + v t_L$$



La barra sembra più corta: $L = L'/\gamma$

Esempio: un muone è una particella simile all'elettrone ma instabile. Decade in un tempo $\Delta t \sim 2\,\mu s$ nel proprio riferimento di quiete.



I muoni si formano quando i raggi colpiscono gli strati alti dell'atmosfera e viaggiano a una velocità variabile ma grosso modo

$$0.99\,c \lesssim v \lesssim 0.9999\,c$$

Secondo la meccanica classica il muone può viaggiare al massimo

$$\Delta x \sim c\,\Delta t \sim 3\,10^{8}\,\frac{m}{s} \cdot 2\,10^{-6}\,s \sim 600\,m$$

prima di decadere.

L'atmosfera è spessa ~ 10 Km dunque nessun muone dovrebbe arrivare sulla superficie terrestre.

Ma, relativisticamente:

- nel riferimento di quiete del muone l'atmosfera si muove con velocità v, dunque $10 < \gamma < 100$

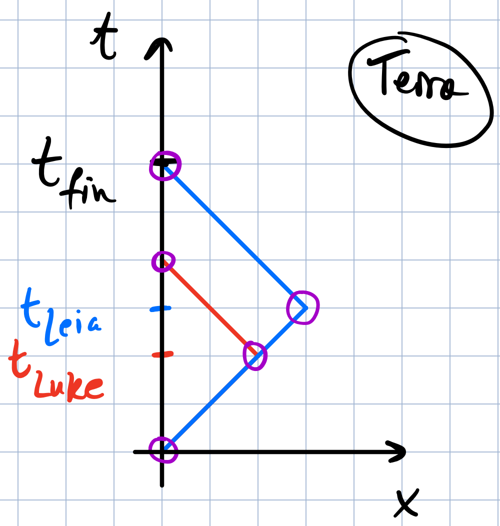
  Dunque l'atmosfera vista dal muone è spessa $10\,Km/\gamma$ ovvero tra $100\,m$ e $1\,Km$!

- nel riferimento della terra il muone si muove e dunque il suo tempo di vita è dilatato di un fattore γ il che produce lo stesso risultato.

Il fatto che tempi e lunghezze dipendano dal sistema di riferimento può dar luogo a degli effetti poco intuitivi o "paradossi".

Uno dei più famosi è il paradosso dei gemelli che può formularsi in vari modi diversi.

Prima formulazione (cf. note Marchioro)



Luke e Leia partono al tempo 0 per un viaggio spaziale a velocità $0.99\,c$. Al tempo t_{Luke}, Luke torna indietro, mentre Leia torna indietro a $t_{Leia} > t_{Luke}$. Dal punto di vista della terra, i due gemelli si ritrovano al tempo t_{fin}.

Assumiamo che le fasi di accelerazione/decelerazione siano identiche. L'unica differenza è dunque nel tempo trascorso in volo.

Nel riferimento proprio avremo $\tau_{Luke} = \dfrac{2\,t_{Luke}}{\gamma} + (t_{fin} - 2t_{Luke})$

$$\tau_{Leia} = \frac{2\,t_{Leia}}{\gamma} = \frac{t_{fin}}{\gamma}$$

e dunque $\tau_{Leia} < \tau_{Luke}$ e Leia si troverà ad essere più giovane di Luke quando si incontrano.

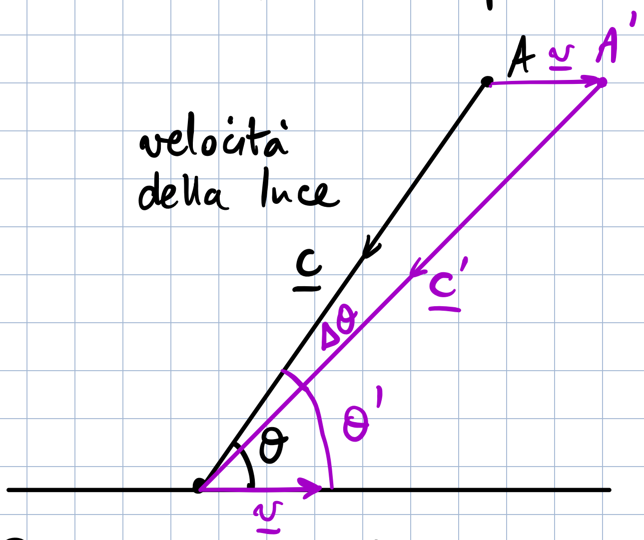
(cf. note Tong per una seconda formulazione più farraginosa)

La teoria della relatività ristretta è ovviamente in accordo con l'esperimento di Michelson-Morley.

Ma le altre osservazioni?

• Aberrazione stellare

A stella fissa all'infinito



O osservatore fisso rispetto all'etere

O' osservatore in moto con velocità $\underline{v}$

Adesso la luce ha la stessa velocità nei due sistemi di riferimento.

Nel riferimento di O la luce si muove con

$$\begin{cases} x(t) = -c\cos\theta\, t \\ y(t) = -c\sin\theta\, t \end{cases}$$

Nel riferimento di O' la traiettoria diventa

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma t\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right) \\ x' = \gamma(x - vt) = -t'\dfrac{(c\cos\theta + v)}{\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right)} \\ y' = y = -c\sin\theta\, t = -\dfrac{t'\, c\sin\theta}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right)} \end{cases}$$

Dunque

uguale alla formula classica se $\gamma \approx 1 + o(v^2/c^2)$

$$\tan\theta' = \frac{y'}{x'} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{c\sin\theta}{c\cos\theta + v} \approx \frac{\tan\theta}{1 + \frac{v}{c\cos\theta}} \approx \tan\theta - \frac{v}{c}\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

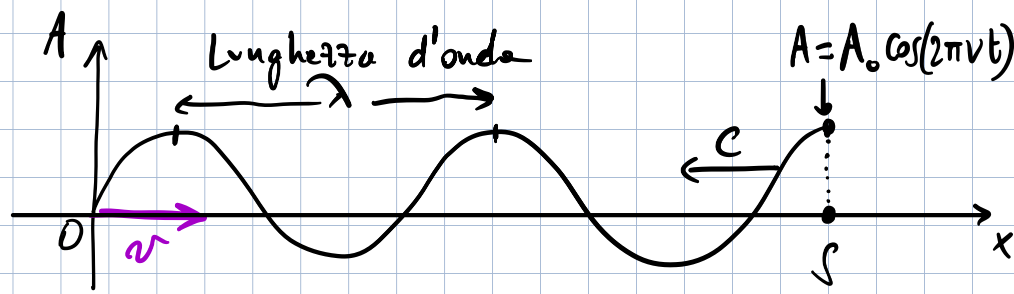
se $\theta' = \theta - \Delta\theta$ con $\Delta\theta$ piccolo

$$\tan\theta' \sim \tan\theta - (1 + \tan^2\theta)\,\Delta\theta \sim \tan\theta - \frac{v}{c}\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

dunque ritroviamo lo stesso risultato della fisica classica

$$\Delta\theta \sim \frac{v}{c}\,\frac{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}{1 + \tan^2\theta} = \frac{v}{c}\sin\theta$$

- **Effetto Doppler relativistico**



In un riferimento O in cui la sorgente S è in quiete l'onda si propaga con velocità c. Se la sorgente emette con frequenza ν abbiamo una lunghezza d'onda $\lambda = c/\nu$

Un osservatore O' in moto verso la sorgente con velocità v incontra i picchi con frequenza $\nu_R = \frac{c+v}{\lambda} = \nu\left(1+\frac{v}{c}\right)$ nel riferimento della sorgente, come nel caso classico.

La sequenza di eventi corrispondente è $E_k = (t_k, x_k) = \left(\frac{k}{\nu_R}, v\frac{k}{\nu_R}\right)$.

Nel riferimento di O' questa sequenza corrisponde a

$$E'_k = (t'_k, 0) \quad \text{con} \quad t'_k = \gamma\left(t_k - \frac{v}{c^2}x_k\right) = \frac{k}{\nu_R}\gamma\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{k}{\gamma\nu_R}$$

dunque $$\nu' = \gamma\,\nu_R = \nu\gamma(1+v/c) = \nu\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} > \nu$$

Ma lo spostamento $\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{v}{c}$ è lo stesso al primo ordine in v/c e per questo motivo la teoria classica sembrava in accordo con le osservazioni.

Dunque la relatività ristretta è compatibile con tutte le osservazioni che abbiamo visto all'inizio.

e. Spazio di Minkowski

Abbiamo visto che in relatività ristretta spazio e tempo vengono "mescolati" dai cambiamenti di sistema di riferimento.
Introduciamo dunque un formalismo compatto che tratti spazio e tempo nel modo più simmetrico possibile.

$$X^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$ quadrivettore

Abbiamo considerato trasformazioni di Lorentz della forma

$$\begin{cases} x^{0\prime} = \gamma_v \left(x^0 - \frac{v}{c} x^1 \right) \\ x^{1\prime} = \gamma_v \left(x^1 - \frac{v}{c} x^0 \right) \\ x^{2\prime} = x^2 \\ x^{3\prime} = x^3 \end{cases}$$

ovvero $$X'^\mu = \Lambda^\mu{}_{\underbrace{\nu X^\nu}_{\text{Indici ripetuti si sommano}}}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\frac{v}{c}\gamma_v & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"Boost di Lorentz lungo x"

Abbiamo visto che

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

è invariante.

Scriviamo questo invariante in modo più compatto.

Definiamo $$X^2 = X \cdot X \overset{\text{def}}{\equiv} X^T \eta X = X^\mu \eta_{\mu\nu} X^\nu$$

con
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ "metrica di Minkowski"

Ancora più in generale, definiamo

- Quadrivettore: qualunque $X \in \mathbb{R}^4$ che si trasforma come $X' = \Lambda X$ cambiando riferimento inerziale
- $X \cdot Y = X^T \eta Y = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$

  il "prodotto scalare" di due quadrivettori.

Quali sono le matrici Λ tali che $X^T \eta Y$ è invariante?

Devono soddisfare $$X'^T \eta Y' = X^T \underbrace{\Lambda^T \eta \Lambda}_{} Y = X^T \underbrace{\eta}_{} Y$$

dunque $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

Quanti parametri liberi? Abbiamo $4 \times 4 = 16$ parametri e 10 equazioni perché $\Lambda^T \eta \Lambda$ e η sono simmetriche.

Ci aspettiamo 6 parametri indipendenti.

Osserviamo anche che:

- $\Lambda = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione

- se Λ è soluzione, Λ^{-1} è soluzione, perché

  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Leftrightarrow \Lambda^T \eta = \eta \Lambda^{-1} \Leftrightarrow \eta = (\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1}$

  (bisognerà mostrare che le trasformazioni di Lorentz sono invertibili, ma ce lo aspettiamo su base fisica)

- se Λ_1 e Λ_2 sono soluzioni, $\Lambda_3 = \Lambda_2 \Lambda_1$ è soluzione:

  $$\Lambda_3^T \eta \Lambda_3 = \Lambda_1^T \overbrace{\Lambda_2^T \eta \Lambda_2}^{=\eta} \Lambda_1 = \Lambda_1^T \eta \Lambda_1 = \eta$$

Dunque le soluzioni formano un gruppo detto "gruppo di Lorentz"

Abbiamo 6 trasformazioni indipendenti:

- Le 3 rotazioni dello spazio $\Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right)$

  con $R^T R = \mathbb{1}$

- I 3 boost di Lorentz lungo x, y, z

Combinando rotazioni e boost possiamo ottenere qualunque velocità relativa $\underline{v}$ e orientamento.

Indici

Una notazione comoda consiste nell'introdurre indici alti e bassi, sempre con la convenzione che indici ripetuti sono sommati.

Definiamo $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$

e l'inverso $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$ dove $\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Osserviamo che $\eta^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ la matrice identità.

Allora $x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$ è il nostro invariante.

Un indice alto si trasforma con

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

dove $\Lambda^\mu{}_\nu$ è una soluzione di $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

ma $\eta^2 = \mathbb{1}$ dunque $\eta \Lambda^T \eta \Lambda = \mathbb{1} \iff \eta \Lambda^T \eta = \Lambda^{-1}$

ovvero

$$\eta \Lambda \eta = (\Lambda^{-1})^T \rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \eta^{\rho\varepsilon} = (\Lambda^{-1})^\varepsilon{}_\mu$$

Un indice basso si trasforma con

$$x'_\mu = \eta_{\mu\nu} x'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \eta^{\rho\varepsilon} x_\varepsilon = x_\varepsilon (\Lambda^{-1})^\varepsilon{}_\mu$$

e dunque $x'_\mu x'^\mu = x_\varepsilon (\Lambda^{-1})^\varepsilon{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x_\mu x^\mu$

In generale, contrazioni di indici alti e indici bassi sono invarianti in tutti i riferimenti inerziali.

f. Cinematica relativistica

La cinematica è lo studio del moto indipendentemente dalle sue "cause" (le forze)

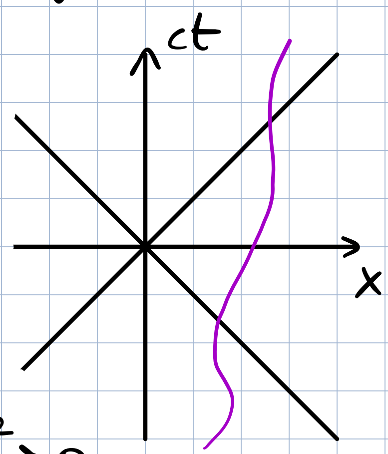
Come possiamo descrivere un moto relativistico?

In un certo riferimento possiamo specificare

$$t \longrightarrow x(t),\ y(t),\ z(t)$$
$$\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t)$$

Tuttavia, se cambiamo riferimento, sappiamo che t cambia e dunque $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ cambia in maniera complicata perché cambiano sia dx che dt.

C'è una parametrizzazione più conveniente.



Ricordiamo che $v \leq c$ e dunque in un tempo infinitesimo dt abbiamo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (c^2 - v^2)\,dt^2 \geq 0$$

Dunque $d\tau = \frac{ds}{c}$ è sempre ben definito ed è la variazione del tempo proprio dell'oggetto in moto.

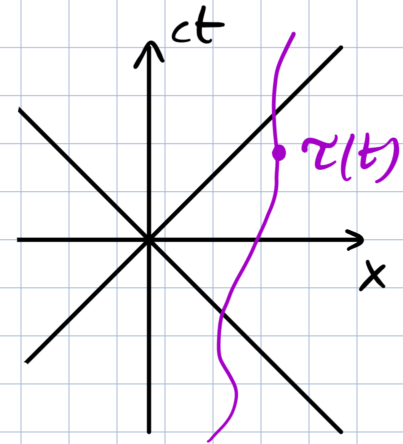
Definiamo
$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left[\frac{dx}{dt}\right]^2}$$

e dunque
$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma$$

Possiamo integrare questa relazione e definire
$$t(\tau) = \int_0^\tau \gamma(\tau')\,d\tau' \quad \text{e} \quad \tau(t) = \int_0^t \frac{1}{\gamma(t')}\,dt'$$

Parametrizziamo dunque la traiettoria usando τ invece di t in termini di un quadrivettore:

$$X(\tau) = \big(ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)\big)$$



Dal momento che τ è lo stesso in tutti i sistemi di riferimento, abbiamo
$$X'(\tau) = \Lambda X(\tau) \quad \text{con lo stesso } \tau.$$

Inoltre possiamo definire la quadrivelocità

$$U(\tau) = \frac{dX}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right) = \gamma\,(c, \underline{v})$$

usando
$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma \quad , \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\dot{x} \quad , \quad \text{etc.}$$

Dal momento che τ è lo stesso in tutti i riferimenti inerziali, abbiamo

$$X'(\tau) = \Lambda X(\tau) \quad \Rightarrow \quad U'(\tau) = \Lambda U(\tau)$$

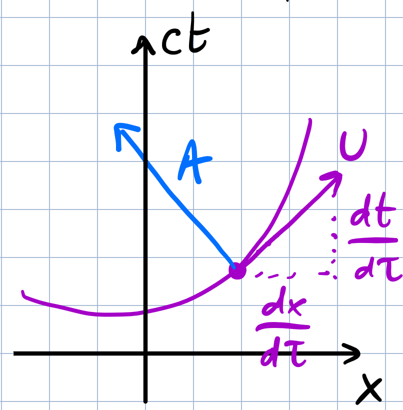
dunque la quadrivelocità è un quadrivettore.

Calcoliamo

$$U^2 = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (c^2 - v^2) = c^2$$

Dunque il modulo di U è c ed è lo stesso in tutti i riferimenti. In particolare nel riferimento di quiete abbiamo $U = (c, 0, 0, 0)$.

Inoltre U è sempre di tipo tempo.



Geometricamente, $\frac{U}{c}$ è il vettore unitario tangente alla traiettoria.

Osserviamo inoltre che

$$\frac{d}{d\tau} U^2 = 2 U \cdot \frac{dU}{d\tau} = 0$$

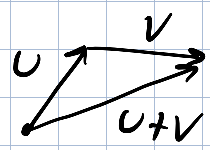
dunque la quadriaccelerazione $A = \frac{dU}{d\tau}$ è sempre ortogonale a U e dunque alla traiettoria

Crono-geometria

Il "prodotto scalare" $U \cdot V = U^\mu V_\mu = U^\mu \eta_{\mu\nu} V^\nu$ non è definito positivo e dunque non definisce una distanza.

Tuttavia, se U e V sono due **quadrivettori di tipo tempo** che si trovano nello stesso cono di luce $(u_0 v_0 > 0)$, vale una disuguaglianza triangolare inversa:

$$\sqrt{(U+V)^2} \geq \sqrt{U^2} + \sqrt{V^2}$$



Dimostrazione

$$U = (u^0, \underline{u}) \qquad V = (v^0, \underline{v})$$

Siccome U e V sono di tipo tempo, $|u^0| \geq |\underline{u}|$
$|v^0| \geq |\underline{v}|$

Inoltre per la parte spaziale vale la disuguaglianza di Schwarz: $|\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq |\underline{u}||\underline{v}|$

Allora

$$(U+V)^2 = U^2 + V^2 + 2u^0v^0 - 2\underline{u}\cdot\underline{v}$$

$\geq U^2 + V^2 + 2u^0v^0 - 2|\underline{u}||\underline{v}|$ per la dis. di Schwarz

$\geq U^2 + V^2 + 2u^0v^0 - 2|u^0||v^0|$ perché sono di tipo tempo

$= U^2 + V^2 \geq 0$ perché $u^0v^0 \geq 0$

dunque $U+V$ è di tipo tempo.

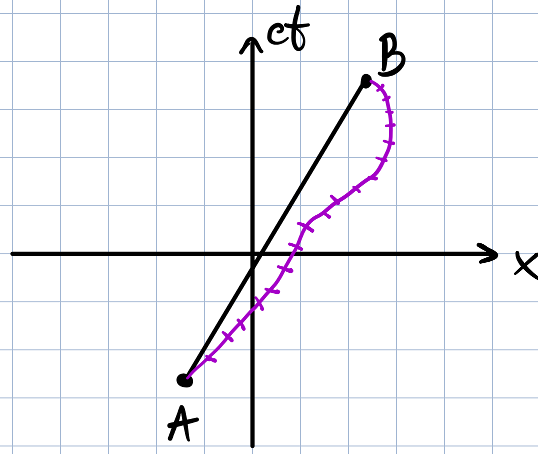
Ora possiamo metterci nel riferimento in cui

$$U + V = (u^0 + v^0, \vec{0})$$

Allora $\sqrt{(U+V)^2} = |u^0 + v^0| = |u^0| + |v^0| \geq \sqrt{U^2} + \sqrt{V^2}$

Da questo teorema segue una osservazione interessante.

Consideriamo il tempo proprio lungo una traiettoria che va da A a B.



Decomponiamo la traiettoria in tanti intervalli infinitesimi dX_i

Gli intervalli sono tutti di tipo tempo perché $|v| \leq c$ e stanno nello stesso cono di luce perché dt_i è sempre positivo.

Allora $$\sqrt{\left(\sum_i dX_i\right)^2} \geq \sum_i \sqrt{dX_i^2}$$

Ma $\sum_i dX_i = AB$ dunque $\frac{1}{c}\sqrt{\left(\sum_i dX_i\right)^2} = \frac{1}{c}\sqrt{AB^2} = \tau_R$ è il tempo proprio di una linea retta che va da A a B.

Invece $\frac{1}{c}\sum_i \sqrt{dX_i^2} = \frac{1}{c}\sum_i d\tau_i = \tau_C$ è la somma dei tempi propri lungo i pezzettini di traiettoria curva dunque è il tempo proprio totale lungo la traiettoria curva.

Concludiamo che $\tau_R \geq \tau_C$ e dunque la linea retta è quella che massimizza il tempo proprio necessario ad andare da A a B.

9. Dinamica relativistica

Studiamo ora la dinamica di una particella libera.

In meccanica classica il moto minimizza l'azione

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(\dot{x},x) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

sui moti che vanno da $(\underline{x}_1, t_1)$ a $(\underline{x}_2, t_2)$.

Cerchiamo una azione relativistica nella forma

$$A = \int \tilde{\mathcal{L}}(U, X)\, d\tau$$

Qual è la forma di $\mathcal{L}(U,X)$?

L'invarianza per traslazioni spazio-temporali richiede

$\tilde{\mathcal{L}}(U,X) = \tilde{\mathcal{L}}(U, X+X_0)$, $\forall X_0$ ovvero $\mathcal{L}(U)$ non dipende da X.

D'altro canto le leggi della fisica devono essere le stesse in tutti i riferimenti inerziali dunque $\mathcal{L}(U)$ deve essere invariante sotto trasformazioni di Lorentz.

Ma l'unico invariante è $U^2 = c^2$ che è costante.

Dunque $\tilde{\mathcal{L}}$ = costante e

$$A = K \int d\tau$$

è proporzionale al tempo proprio lungo la traiettoria

Per determinare la costante fissiamo un riferimento e ricordiamo che $d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$, dunque

$$A = K \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \underset{|\dot{x}| \ll c}{\approx} K \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2}{c^2} + \dots\right)$$

Per ritrovare il risultato classico vogliamo $K = -mc^2$

dunque

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}$$

è la Lagrangiana nel riferimento fissato.

Osserviamo che K è negativo, dunque minimizzare A corrisponde a massimizzare il tempo proprio: una particella libera si muove in linea retta

Scriviamo ora l'impulso e la Hamiltoniana (energia):

$$\underline{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{x}}} = -\frac{mc^2}{2} \gamma \left(-\frac{2\underline{\dot{x}}}{c^2}\right) = m\gamma \underline{\dot{x}}$$

$$H = E = \underline{p} \cdot \underline{\dot{x}} - \mathcal{L} = m\gamma \underline{\dot{x}}^2 + mc^2 \sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}$$

$$= m\gamma c^2 \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) = m\gamma c^2$$

Possiamo combinare queste due quantità in un quadrimpulso

$$P = \left(\frac{E}{c}, \underline{p}\right) = \left(m\gamma c, m\gamma \underline{\dot{x}}\right) = mU$$

Dato che $\underline{P}$ è proporzionale a $\underline{U}$, è un quadrivettore

Otteniamo inoltre vari risultati interessanti:

- $\underline{P}^2 = m^2 \underline{U}^2 = m^2 c^2$ in tutti i riferimenti.
- nel riferimento di quiete $\underline{\dot{x}} = 0$ abbiamo $\gamma = 1$ e $\underline{P} = (mc, 0)$ e $E = mc^2$
- se $m > 0$, l'energia $E = m\gamma c^2 \longrightarrow \infty$ quando $v \to c$. Serve una energia infinita per accelerare una massa finita alla velocità della luce $\Rightarrow |v| < c$ se $m > 0$.
- Combinando $\underline{P}^2 = m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2$ otteniamo l'espressione generale dell'energia $E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2}$

  che si riduce a $E \sim mc^2 + \frac{\underline{p}^2}{2m}$ per $|\underline{p}| \ll c$
- se $m = 0$ allora $\underline{P}^2 = 0$ e $E = c|\underline{p}|$

  Ricordando che $\underline{v} = \underline{\dot{q}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} = \frac{\partial E}{\partial \underline{p}}$ otteniamo $\underline{v} = c \frac{\underline{p}}{|\underline{p}|}$

Gli oggetti di massa nulla si muovono alla velocità della luce

In effetti la "velocità della luce" è in realtà la "velocità degli oggetti di massa nulla". La luce è uno di questi perché il fotone (quanto di luce) ha $m = 0$.

Quadriforza

In analogia con la meccanica di Newton, definiamo $\frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu$ quadriforza

Osserviamo che $\frac{dP}{d\tau} = m\frac{dU}{d\tau} = F$ è ortogonale a U

quindi solo tre delle sue componenti sono indipendenti.
Vogliamo scriverle in funzione della forza Newtoniana.
Fissiamo un riferimento e scriviamo per le componenti di $P = (m\gamma c, m\gamma \underline{\dot{x}})$, usando $\frac{d}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt}$:

$$\frac{d}{d\tau}(m\gamma c) = \gamma\frac{d}{dt}(m\gamma c) = F^0$$
$$\frac{d}{d\tau}(m\gamma\underline{\dot{x}}) = \gamma\frac{d}{dt}(m\gamma\underline{\dot{x}}) = \underline{F}$$

Allora visto che $\underline{p} = m\gamma\underline{\dot{x}}$ possiamo identificare la forza di Newton con $\underline{f} = \underline{F}/\gamma$.

Usiamo $F\cdot U = F_0U_0 - \underline{F}\cdot\underline{U} = 0$ e $U = (\gamma c, \gamma\underline{v})$ e dunque ricordando che $E = m\gamma c^2$, la prima equazione diventa

$$\frac{dE}{dt} = \frac{cF_0}{\gamma} = \frac{c\underline{F}\cdot\underline{U}}{\gamma U_0} = \frac{c}{U_0}\underline{f}\cdot\underline{U} = \frac{1}{\gamma}\underline{f}\cdot\gamma\underline{v} = \underline{f}\cdot\underline{v}$$

che è la relazione nota dalla meccanica di Newton.

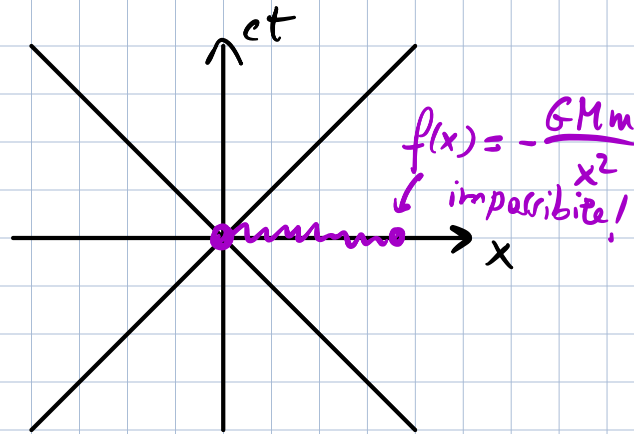
Concludiamo che la quadriforza ha la forma

$$F = \gamma\left(\frac{1}{c}\underline{f}\cdot\underline{v}, \underline{f}\right)$$

e dunque è una combinazione della forza Newtoniana e della velocità.

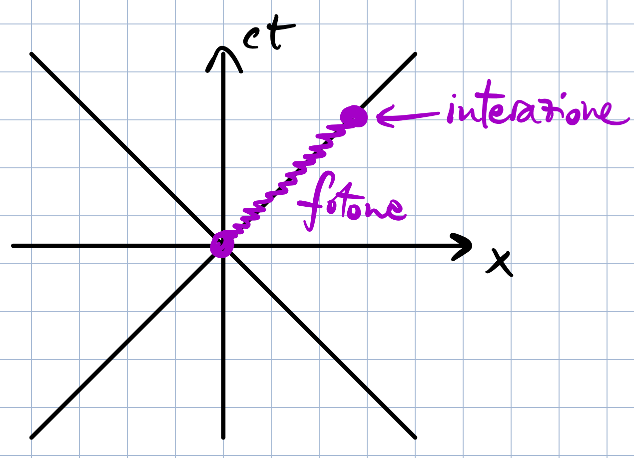
Tuttavia la maggior parte delle forze che abbiamo visto in meccanica Newtoniana sono incompatibili con la relatività.

Infatti una particella non può esercitare una forza istantanea a distanza finita altrimenti influenzerebbe eventi al di fuori del cono di luce.



Ci sono solo due possibilità:

- O le interazioni sono puntiformi cioè avvengono a $\Delta t = 0$, $\Delta x = 0$
- Oppure una particella emette un qualcosa (fotone) che viaggia a velocità finita $|v| \leq c$ e incontra una seconda particella.



9. Conservazione del quadrimpulso totale

Vedrete in corsi successivi che una volta formulate correttamente le interazioni, il quadrimpulso totale si conserva:

$$P_{tot} = \sum_i P_i$$

Ricordiamo che il quadrimpulso è di tipo tempo (o luce) e soddisfa la disuguaglianza triangolare inversa, dunque

$$\sqrt{P_{tot}^2} \geq \sum_i \sqrt{P_i^2} = \sum_i m_i c = M_{tot}\, c$$

Se $M_{tot} > 0$, allora P_{tot} è di tipo tempo ed esiste un riferimento nel quale

$$P_{tot} = \left(\frac{E^*}{c}, \underline{0} \right)$$

che è il riferimento del centro di massa.

In ogni altro riferimento

$$P_{tot}^2 = \frac{E_{tot}^2}{c^2} - \underline{P}_{tot}^2 = \frac{E^{*2}}{c^2} \Rightarrow E_{tot} \geq E^*$$

ovvero l'energia è minima nel riferimento del centro di massa.

Nella fisica relativistica la massa non è conservata e si possono creare o distruggere particelle.

Esempio Una particella a riposo di massa M decade in due particelle uguali di massa m.

$$P = (Mc, \underline{0}) \quad \text{è conservato.}$$

Dopo il decadimento, $P_1 + P_2 = P$, dunque

$$\begin{cases} m\gamma_1 c + m\gamma_2 c = Mc \\ m\gamma_1 \underline{v}_1 + m\gamma_2 \underline{v}_2 = \underline{0} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione abbiamo $\gamma_1 \underline{v}_1 = -\gamma_2 \underline{v}_2$

e dunque $\dfrac{v_1^2}{c^2 - v_1^2} = \dfrac{v_2^2}{c^2 - v_2^2} \Rightarrow \underline{v}_1 = -\underline{v}_2 = \underline{v}$

Allora dalla prima equazione

$$\frac{2m}{M} = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow v = c\sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}$$

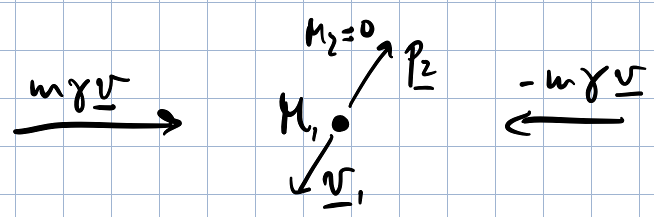
Se $2m < M$, abbiamo convertito energia di massa in energia cinetica

Quanto deve essere $\delta m = M - 2m$ per creare $1\,J$ di energia cinetica?

$$v \ll c \Rightarrow 2mc^2 + mv^2 \approx Mc^2 \Rightarrow mv^2 \sim \delta m\, c^2 \sim 1\,J$$

$$\delta m \sim \frac{1\,J}{c^2} \sim \frac{1\ kg\, m^2/s^2}{9 \times 10^{16}\ m^2/s^2} \simeq 10^{-17}\ kg$$

Considerando il processo inverso in cui due particelle collidono per formarne una di massa maggiore più una di massa nulla



La conservazione di P^0_{tot} implica

$$2m\gamma c = M_1\gamma_1 c + |\underline{p}_2|$$

$$\underline{0} = M_1\gamma_1 \underline{v}_1 + \underline{p}_2 \Rightarrow \underline{p}_2 = -M_1\gamma_1\underline{v}_1$$

dunque

$$2m\gamma c = M_1\gamma_1 c + M_1\gamma_1 v_1 \geq M_1 c$$

$$\gamma \geq \frac{M_1}{2m}$$

Se vogliamo creare un bosone W facendo collidere un elettrone e un positrone:

Se $M_1 \sim m_W \sim 1.6\times 10^{-25}$ kg

$m \sim m_e \sim 10^{-30}$ kg

$$\gamma \geq 10^5$$

Serve un acceleratore molto potente !